Rappels, analyse de la variable réelle, complements

Questions du cours.

- Donner les définitions de fonction paire, fonction impaire, fonction périodique.
- Donner la définition de maximum local d'une fonction.
- Donner la définition de maximum global d'une fonction sur un intervalle.
- Énoncer le théorème sur la bijectivité d'une application monotone.
- Expliquer comment le graphe de la réciproque f^{-1} d'une fonction bijective se construit à partir du graphe de la fonction f .
- Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Donner la définition précise de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ et en donner une description graphique.
- Soit f une fonction définie au voisinage de $-\infty$, et $\ell \in \mathbb{R}$. Donner la définition précise de $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$.
- Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$. Donner la définition précise de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ et en donner une description graphique.
- Soit f une fonction définie dans un voisinage à gauche d'un point $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Donner la définition précise de $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell^+$ et en donner une description graphique.
- Donner un exemple explicite d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et n'admettant pas de limite, finie ou infinie, en $+\infty$.
- Donner un exemple explicite d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et n'admettant pas de limite, finie ou infinie, en 0.
- Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $+\infty$. Expliciter les cas pour lesquels $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et lister les cas dans lesquels il s'agit d'une forme indéterminée. Faire de même avec $f \times g$ et $\frac{f}{g}$.
- Énoncer les deux théorèmes sur les compositions de limites en les illustrant par des exemples.
- Énoncer un théorème sur la limite d'une fonction strictement monotone sur un intervalle.
- Énoncer le « théorème des gendarmes ».
- Énoncer le théorème sur les croissances comparées.

Exercice 1. Vrai-Faux

Parmi les affirmations suivantes, trouver celles qui sont correctes (en justifiant votre réponse).

- Si f est une fonction, alors $f(s+t) = f(s) + f(t)$.
- Si f est une fonction alors si $f(s) = f(t)$, on a $s = t$.
- Si f est une fonction, $f(2x) = 2f(x)$.
- Si $x_1 < x_2$ et f est une fonction strictement décroissante, alors $f(x_1) > f(x_2)$.
- Une droite verticale coupe le graphe d'une fonction en au plus un point.
- Si f et g sont des fonctions, alors $f \circ g = g \circ f$.
- Si f est injective et ne s'annule pas, f est de signe constant.
- Si f est injective et ne s'annule pas, alors $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$.
- Si $x > 0$, alors $(\ln(x))^6 = 6 \ln(x)$.
- Si $x > 0$ et $\alpha > 1$, alors $\log_\alpha(x) = \ln(\frac{x}{\alpha})$.

Questions du cours.

- (a) Donner les définitions de continuité d'une fonction en un point, sur un intervalle.
- (b) Pour les fonctions usuelles, décrire les intervalles où elles sont continues.
- (c) Décrire les opérations sur les fonctions continues (somme, produit, quotient, composition, multiplication par un scalaire).
- (d) Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
- (e) Énoncer le théorème de bijectivité pour une fonction continue sur un intervalle.
- (f) Décrire le domaine de définition et les propriétés des fonctions réciproques des fonctions trigonométriques et de trigonométrie hyperbolique.
- (g) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue sur un voisinage épointé d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ soit prolongeable par continuité en x_0 .
- (h) Énoncer le principe du maximum.
- (i) Donner des définitions équivalentes de l'affirmation : la fonction f est dérivable au point x_0 .
- (j) Montrer qu'une fonction dérivable en un point est toujours continue en ce point. Donner un exemple d'une fonction qui soit continue en un point mais pas dérivable en ce point.
- (k) Donner les formules de dérivation de la composée, de la somme, du produit, du quotient, de deux fonctions dérivables.
- (l) Énoncer le théorème sur la dérivée de la fonction réciproque d'une bijection dérivable sur un intervalle.
- (m) Expliciter les dérivées des fonctions usuelles.
- (n) Expliciter les dérivées des fonctions réciproques $\arccos(x)$, $\arcsin(x)$, $\arctan(x)$, $\operatorname{argch}(x)$, $\operatorname{argsh}(x)$, $\operatorname{argth}(x)$.
- (o) Que peut-on dire de la dérivée d'une fonction dérivable en un extremum local ?
- (p) Énoncer le théorème de Rolle.
- (q) Énoncer le théorème des accroissements finis, et l'inégalité des accroissements finis.

Exercice 2. Vrai-Faux

Parmi les affirmations suivantes, trouver celles qui sont correctes (en justifiant votre réponse).

- (a) Si $f(-1) = f(1)$ alors il existe γ qui vérifie $f'(\gamma) = 0$ et $|\gamma| < 1$.
- (b) Si $f'(x) < 0$ sur $]1, 6[$, alors f est strictement décroissante sur $]1, 6[$.
- (c) Si $f(x) > 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et si $\lim_0 f(x) = \ell$, alors $\ell > 1$.
- (d) Si f et g sont croissantes sur l'intervalle I , alors $f + g$ est croissante sur I .
- (e) Si f et g sont croissantes sur l'intervalle I , alors $f - g$ est monotone sur I .
- (f) Si f est continue en α , alors f est dérivable en α .
- (g) Si $f'(\gamma) = 0$ alors f admet un extremum local au point γ .
- (h) Si f admet un extremum local au point γ , alors $f'(\gamma) = 0$.
- (i) Si f est continue sur $] \alpha, \beta [$ alors f admet un minimum et un maximum globaux dans $] \alpha, \beta [$.

Exercice 3. Soit $I =] \alpha, \beta [$ avec $\alpha < \beta$. Considérons $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable (c'est-à-dire dérivable et dont la fonction dérivée est elle-même dérivable) telle que

$$\forall x \in I, \quad f'(x) \neq 0.$$

- (a) Montrer que f est strictement monotone sur $] \alpha, \beta [$. En déduire $f(] \alpha, \beta [)$.
- (b) On note $J = f(] \alpha, \beta [)$. Montrer que f réalise une bijection de I sur J .
- (c) Montrer que la fonction réciproque $f^{-1}: J \rightarrow I$ est deux fois dérivable et calculer ses dérivées première et seconde.

Exercice 4. Soient $\alpha < \beta$ deux réels, on considère une fonction f deux fois continument dérivable sur $[\alpha, \beta]$, c'est-à-dire que f est deux fois dérivable et ses dérivées f' et f'' sont continues. On veut montrer la propriété suivante :

$$\text{Il existe } \gamma \in]\alpha, \beta[\text{ tel que : } \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} = f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + \frac{(\beta - \alpha)^2}{8} f''(\gamma) \quad (1)$$

Pour montrer cette propriété, on pose, pour tout $x \in [\alpha, \beta]$:

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + f(\alpha)}{2} - f\left(\frac{x + \alpha}{2}\right) - \frac{(x - \alpha)^2}{8} A$$

avec A un réel.

- (a) Calculer $\varphi(\alpha)$ et calculer $\varphi'(x)$, pour tout $x \in [\alpha, \beta]$.
- (b) Montrer que l'on peut choisir A tel que $\varphi(\beta) = 0$. (Dans la suite, on suppose donc que le réel A est choisi tel que $\varphi(\beta) = 0$.)
- (c) Après avoir énoncé soigneusement le théorème de Rolle, montrer qu'il existe $\xi \in]\alpha, \beta[$ tel que $\varphi'(\xi) = 0$.
- (d) Après avoir énoncé soigneusement le théorème des accroissements finis, appliquer-le à la fonction f' , sur l'intervalle $[\frac{\alpha + \xi}{2}, \xi]$, et montrer qu'il existe $\gamma \in]\alpha, \beta[$ tel que $A = f''(\gamma)$.
- (e) Enfin, montrer que la propriété (1) est vérifiée.