Arithmétique

Table des matières

1 Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Dans ce paragraphe nous présentons les propriétés de la division dans l'ensemble des entiers relatifs, ainsi que le pgcd et le ppcm. Nous établissons les deux théorèmes fondamentaux de Gauss et de Bézout et nous faisons quelques rappels sur les nombres premiers.

1.1 Nombres premiers

On appelle *entier naturel* tout élément de

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

On appelle *entier relatif* tout élément de

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Définition 1.1

On dit qu'un entier relatif a est un *multiple* d'un entier relatif b, ou que b est un *diviseur* de a, lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $a = kb$. Cela se note $b|a$.
Pour tout $a \in \mathbb{Z}$ l'ensemble des multiples de a se note $a\mathbb{Z}$.

Exemples 1. ◇ L'entier 3 possède quatre diviseurs : -3, -1, 1 et 3.
◇ Nous avons $5\mathbb{Z} = \{5k \,|\, k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -20, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, \dots\}$.

Proposition 1.2

Pour tous a, b et c dans $\mathbb{Z}$ nous avons les propriétés suivantes :
- $\diamond$ $a|a$, $\pm 1|a$ et $a|0$;
- $\diamond$ si $a|b$ et $b|c$, alors $a|c$;
- $\diamond$ si $a|b$ et si $b \neq 0$, alors $|a| \leq |b|$;
- $\diamond$ si $a|b$ et $b|a$, alors $a = \pm b$;
- $\diamond$ si $a|b$ et $a|c$, alors $a|(kb + \ell c)$ quels que soient les entiers k, $\ell \in \mathbb{Z}$.

Démonstration.
- $\diamond$ Cela découle du fait que $a = 1 \times a = (-1) \times (-a)$ et $0 = 0 \times a$.
- $\diamond$ Si $a|b$ et $b|c$, alors il existe des entiers q et r tels que $b = aq$ et $c = br$. Nous en déduisons que $c = aqr$ donc $a|c$.
- $\diamond$ Supposons que $a|b$, c'est-à-dire $b = aq$ avec $q \in \mathbb{Z}$. Si $b \neq 0$, alors $q \neq 0$ donc $|q| \geq 1$. Par suite $|b| = |a||q| \geq |a|$.
- $\diamond$ Supposons que $a|b$ et que $b|a$; autrement dit il existe des entiers q et r tels que $a = bq$ et $b = ar$. Si a ou b est nul, alors $a = b = 0$ et nous avons bien $a = \pm 1$.
  Supposons que a et b soient non nuls. Nous avons $a = bq = arq$ donc $1 = rq$. Comme r et q sont des entiers, $r = q = \pm 1$ et $a = \pm b$.
- $\diamond$ Supposons que a divise b et c. Il existe alors des entiers p et q tels que $b = ap$ et $c = aq$. Pour tous entiers k et ℓ nous avons $kb + \ell c = a(kp + \ell q)$ donc $a|(kb + \ell c)$.

□

Définition 1.3

Un entier $p \geq 2$ est *premier* lorsqu'il possède pour seuls diviseurs positifs 1 et lui-même.

Soit $n \geq 2$ un entier. Le plus petit diviseur positif d de n tel que $d > 1$ est évidemment un nombre premier.

Exemples 2.
- $\diamond$ 1 n'est pas premier et 2 est le seul nombre premier pair.
- $\diamond$ 101 et 103 sont premiers.
- $\diamond$ 91 n'est pas premier : $91 = 7 \times 13$.

Théorème 1.4

Il existe une infinité de nombres premiers.

Démonstration. Soit un entier $n \geq 2$. Alors l'entier $N = n! + 1$ n'a aucun diviseur compris entre 2 et n ; en effet si N possédait un diviseur k compris entre 2 et n alors k diviserait $n!$ et N donc diviserait $N - n! = 1$ ce qui n'est pas possible. Or N possède au moins un diviseur premier p. Puisque $p \geq 2$, nous en déduisons que $p > n$. Cela montre qu'il existe des nombres premiers aussi grands que l'on veut. □

Proposition 1.5

Tout entier $n > 1$ est produit de nombres premiers.

Démonstration. Nous raisonnons par récurrence. Soit un entier $n > 1$. Si n est premier, il est produit de nombres premiers. Sinon n se factorise en $n = pq$, où les entiers p et q satisfont les inégalités $1 < p < n$ et $1 < q < n$. Par hypothèse de récurrence les entiers p et q sont produits de nombres premiers, il en résulte que n aussi. □

1.2 Division euclidienne

Proposition-Définition 1.6

Soit b un entier non nul. Pour tout $a \in \mathbb{Z}$ il existe des entiers q et r uniques tels que $a = bq + r$ et $0 \leq r < |b|$.
L'entier q s'appelle le *quotient* de a par b et l'entier r s'appelle le *reste* de la division de a par b.

Remarques 1.
- ◇ Nous avons l'équivalence suivante : b divise a si et seulement si le reste de la division de a par b est nul.
- ◇ Si $b > 0$, alors le quotient q est l'unique entier tel que $q \leq \frac{a}{b} < q + 1$: c'est la partie entière du nombre rationnel $\frac{a}{b}$.

Démonstration. Supposons dans un premier temps que $b > 0$. Soit E l'ensemble des multiples de b inférieurs ou égaux à a. Remarquons que E est une partie de $\mathbb{Z}$ majorée par a ; il en résulte que E a un plus grand élément que nous écrirons bq. Le multiple $b(q + 1)$ n'appartient alors pas à E. Ainsi $bq \leq a < b(q + 1)$. En posant $r = a - bq$ il vient $0 \leq r < b(q + 1) - bq = b$ et $a = bq + r$.

Supposons désormais que $b < 0$. Appliquons ce qui précède à a et $-b$: il existe q et r dans $\mathbb{Z}$ tels que $a = (-b)q + r$ et $0 \leq r < -b$ donc $a = b(-q) + r$ et $0 \leq r < |b|$.

Montrons maintenant que le couple (q, r) est unique. Raisonnons par l'absurde : supposons que le couple (q, r) n'est pas unique. Soient (q, r) et (q', r') tels que $a = bq + r = bq' + r'$ avec $0 \leq r < |b|$ et $0 \leq r' < |b|$. Par soustraction il vient $0 = b(q - q') + (r - r')$ d'où

$$|b|\,|q - q'| = |r - r'|.$$

Mais comme r et r' sont compris entre 0 et $|b| - 1$ nous avons $|r - r'| < |b|$ d'où $|b|\,|q - q'| < |b|$. Puisque $|b| > 0$, nous en déduisons que $|q - q'| < 1$ et comme $|q - q'|$ est un entier positif ou nul il s'ensuit $|q - q'| = 0$, ou encore $q = q'$. Par conséquent $r = r'$. □

Exemples 3. Voici des divisions euclidiennes :
- ◇ division de 12 par 5 : $12 = 5 \times 2 + 2$;
- ◇ division de 12 par -5 : $12 = (-5) \times (-2) + 2$;
- ◇ division de -12 par 5 : $-12 = 5 \times (-3) + 3$;
- ◇ division de -12 par -5 : $-12 = (-5) \times 3 + 3$.

1.2.1 Une application : les sous-groupes de $\mathbb{Z}$

Définition 1.7

Un sous-ensemble G de $\mathbb{Z}$ est un *sous-groupe* de $(\mathbb{Z}, +)$ si
- ◇ $G \neq \emptyset$;
- ◇ si g et h appartiennent à G, alors $g + h$ appartient à G;
- ◇ si g appartient à G, alors $-g$ appartient à G.

Exemple 4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'ensemble $k\mathbb{Z} := \{kn \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. En effet,
- ◇ $k\mathbb{Z} \neq \emptyset$ car $0 \in k\mathbb{Z}$;
- ◇ soient g, h dans $k\mathbb{Z}$, alors $g = kn$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $h = kn'$ avec $n' \in \mathbb{Z}$. Par suite $g + h$ s'écrit $k(n + n')$ avec $n + n' \in \mathbb{Z}$ d'où $g + h$ appartient à $k\mathbb{Z}$;
- ◇ soit g dans $k\mathbb{Z}$; alors g s'écrit kn avec $n \in \mathbb{Z}$ et $-g$ s'écrit $k(-n)$ avec $-n \in \mathbb{Z}$ d'où $-g$ appartient à $k\mathbb{Z}$.

L'énoncé suivant assure que ce sont les seuls sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$:

Théorème 1.8

Soit G un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. Il existe un unique entier $d \geq 0$ tel que $G = d\mathbb{Z}$.

Démonstration.
- ◇ Montrons tout d'abord l'existence.

  Si $G = \{0\}$, alors $G = 0\mathbb{Z}$.

  Supposons maintenant le groupe G non trivial ; G possède alors un élément g non nul. Il possède même un élément strictement positif ; en effet c'est clair si $g > 0$ et si $g < 0$ il suffit de prendre l'inverse $(-g)$ de g. L'ensemble des éléments strictement positifs de G étant non vide, il possède un plus petit élément d. Nous allons montrer que $G = d\mathbb{Z}$.

  Puisque G est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ contenant d, il contient $\{dn \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$, c'est-à-dire $d\mathbb{Z}$.

  Reste à montrer l'inclusion réciproque $G \subset d\mathbb{Z}$. Soit $g \in G$. Comme $d > 0$ on peut effectuer la division euclidienne de g par d. Elle fournit un couple (q, r) d'entiers avec $0 \leq r < d$ tels que $g = dq + r$. Ainsi $r = g - dq$. Puisque $d\mathbb{Z} \subset G$, nous avons : $-dq \in G$. Étant donné que G est un groupe $g - dq$ appartient à G, *i.e.* r appartient à G. Puisque $0 \leq r < d$ et puisque d est le plus petit élément strictement positif de G, nous avons $r = 0$ et $g = dq$. En particulier, g appartient à $d\mathbb{Z}$ et $G \subset d\mathbb{Z}$.
- ◇ Il reste à s'assurer de l'unicité de d. Soit $\delta > 0$ un entier tel que $G = d\mathbb{Z} = \delta\mathbb{Z}$.

  Si $d = 0$, alors $G = 0\mathbb{Z} = \{0\}$ et δ est donc nul puisque δ appartient à $\delta\mathbb{Z} = G$.

  Supposons $d \neq 0$. Comme d appartient à $G = \delta\mathbb{Z}$ il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $d = a\delta$; de même il existe $b \in \mathbb{Z}$ tel que $\delta = bd$. Ainsi $d = a\delta = abd$ soit $d(1 - ab) = 0$. Par hypothèse d est non nul donc $1 - ab = 0$ soit $ab = 1$. Puisque a et b sont entiers ils sont ou bien tous deux égaux à 1 ou bien tous deux égaux à -1. Si a et b étaient tous deux égaux à -1, on aurait $\delta = bd = -d$ ce qui est impossible car d et δ sont positifs. Par suite $a = b = 1$ et $\delta = bd = d$.

□

1.3 Pgcd

Définitions 1.9

Soient a, $b \in \mathbb{Z}$ des entiers non tous deux nuls. Le plus grand entier qui divise a et b s'appelle le *pgcd* de a et b et se note $\text{pgcd}(a, b)$.
On dit que a et b sont *premiers entre eux* si $\text{pgcd}(a, b) = 1$.

On veillera à ne pas confondre les définitions de « nombre premier » et « nombres premiers entre eux ».

Remarques 2.
- ◇ Si $a > 0$, alors $\text{pgcd}(a, 0) = a$.
- ◇ Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $\text{pgcd}(a, 1) = 1$.
- ◇ Si a divise b et $a \neq 0$, alors $\text{pgcd}(a, b) = |a|$.

Proposition 1.10

Soit p un nombre premier. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ nous avons

$$\text{pgcd}(n, p) = \begin{cases} 1 \text{ si } p \text{ ne divise pas } n \\ p \text{ si } p \text{ divise } n \end{cases}$$

Démonstration. Tout diviseur positif commun à n et p est égal à 1 ou à p. □

Proposition 1.11

Pour tous entiers a et b strictement positifs, nous avons $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r)$ où r est le reste de la division euclidienne de a par b.

Démonstration. Si d divise a et b, alors d divise a et bq ; par conséquent d divise $a - bq = r$.
Réciproquement, si d divise b et r, alors d divise bq et r ; il en résulte que d divise $bq + r = a$.
L'ensemble des diviseurs communs à a et b est donc l'ensemble des diviseurs communs à b et r. □

1.3.1 Calcul du pgcd : l'algorithme d'Euclide

Nous exploitons la proposition précédente pour calculer le pgcd. Soient a et b des entiers positifs. Faisons les divisions successives :

$$
\begin{aligned}
a &= bq_1 + r_1 \\
b &= r_1 q_2 + r_2 \\
r_1 &= r_2 q_3 + r_3 \\
&\vdots \quad \vdots \\
r_{n-2} &= r_{n-1} q_n + r_n \\
r_{n-1} &= r_n q_{n+1} + 0
\end{aligned}
$$

où $0 = r_{n+1} < r_n < \ldots < r_2 < r_1 < |b|$.

Cette méthode de calcul du pgcd s'appelle l'*algorithme d'Euclide*.

Puisque les restes sont positifs ou nuls et diminuent strictement le dernier est nul. Le dernier reste non nul est un nombre $r_n > 0$ tel que r_n divise r_{n-1} ; ainsi

$$\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r_1) = \text{pgcd}(r_1, r_2) = \ldots = \text{pgcd}(r_{n-1}, r_n) = r_n$$

Proposition 1.12

pgcd(a, b) est le dernier reste non nul dans la suite des divisions de l'algorithme d'Euclide.

Exemple 5. Déterminons pgcd$(137, 24)$.

Nous avons les divisions euclidiennes successives suivantes :

$$
\begin{aligned}
137 &= 5 \times 24 + 17 \\
24 &= 1 \times 17 + 7 \\
17 &= 2 \times 7 + 3 \\
7 &= 2 \times 3 + 1 \\
3 &= 3 \times 1 + 0
\end{aligned}
$$

Il s'en suit que pgcd$(137, 24) = 1$.

Exemple 6. Les calculs ci-dessus montrent que 137 et 24 sont premiers entre eux.

Exemple 7. Déterminons pgcd$(931, 513)$. Nous avons les divisions euclidiennes successives suivantes :

$$
\begin{aligned}
913 &= 513 \times 1 + 418 \\
513 &= 418 \times 1 + 95 \\
418 &= 95 \times 4 + 38 \\
95 &= 38 \times 2 + 19 \\
38 &= 19 \times 1 + 0
\end{aligned}
$$

Il s'en suit que pgcd$(931, 513) = 19$.

1.3.2 Les théorèmes de Bézout et de Gauss

Théorème 1.13: (Bézout)

Soient a, $b \in \mathbb{Z}$ des entiers non tous deux nuls. Alors il existe u, $v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = \text{pgcd}(a, b)$; on parle de *relation de Bézout*.

Démonstration. Nous pouvons supposer a et b positifs. Notons D l'ensemble des entiers de la forme $au+bv$ où u, v appartiennent à $\mathbb{Z}$. Si des entiers n et m appartiennent à D, alors le reste de la division de n par m s'écrit $n - qm$ avec $q \in \mathbb{Z}$, donc appartient aussi à D. Comme a, b appartiennent à D, nous constatons que dans l'algorithme d'Euclide tous les restes sont des éléments de E ; en particulier, $\text{pgcd}(a, b)$ appartient à D. □

Méthode pour trouver une relation de Bézout.

Voyons sur un exemple comment trouver une relation de Bézout en utilisant le calcul matriciel pour écrire les divisions euclidiennes :

$$a = bq + r \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} b \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Exemple 8. L'exemple précédent assure l'existence d'entiers u et v tels que $931u + 513v = 19$. Voici comment calculer explicitement u et v :

$$931 = 513 \times 1 + 418 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 513 \\ 418 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 931 \\ 513 \end{pmatrix}$$

$$513 = 418 \times 1 + 95 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 418 \\ 95 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 513 \\ 418 \end{pmatrix}$$

$$418 = 95 \times 4 + 38 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 95 \\ 38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 418 \\ 95 \end{pmatrix}$$

$$95 = 38 \times 2 + 19 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 38 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 95 \\ 38 \end{pmatrix}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 38 \\ 19 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 931 \\ 513 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -9 \\ -11 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 931 \\ 513 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et en calculant la seconde ligne du produit matriciel de droite nous obtenons la relation de Bézout souhaitée : $19 = -11 \times 931 + 20 \times 513$.

Notations. Rappelons que pour tout entier a nous notons $a\mathbb{Z}$ l'ensemble des multiples de a. Si a et b sont des entiers, nous notons $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers de la forme $au + bv$ où u, v appartiennent à $\mathbb{Z}$.

Corollaire 1.14

Soient a et b des entiers non tous deux nuls.

a) Nous avons l'égalité : $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \text{pgcd}(a, b)\mathbb{Z}$.

b) Nous avons les équivalences :

$$\begin{aligned} a \text{ et } b \text{ sont premiers entre eux} &\iff a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \\ &\iff \text{il existe des entiers } u,\, v \in \mathbb{Z} \text{ tels que } au + bv = 1 \end{aligned}$$

c) Les diviseurs communs à a et b sont les diviseurs de $\text{pgcd}(a, b)$:

$$\forall\, n \in \mathbb{Z},\ (n|a \text{ et } n|b) \iff n|\text{pgcd}(a, b).$$

d) Pour tout entier $k \neq 0$, nous avons : $\text{pgcd}(ka, kb) = |k|\text{pgcd}(a, b)$.

e) Les entiers $a' = \frac{a}{\text{pgcd}(a,b)}$ et $b' = \frac{b}{\text{pgcd}(a,b)}$ sont premiers entre eux.

Démonstration. Posons $d = \text{pgcd}(a, b)$.

a) Le théorème de Bézout assure que d appartient à $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$, d'où $d\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$. Réciproquement, a et b sont multiples de d, donc tout entier $ak + b\ell \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est multiple de d c'est-à-dire appartient à $d\mathbb{Z}$.

b) Résulte de a).

c) Il existe des entiers u et v tels que $au + bv = d$. Si n divise a et b, alors n divise au et bv, par suite n divise d. Réciproquement si n divise d, alors n divise d et d divise a, par conséquent n divise a. De même n divise b.

d) Nous avons $(ka)u + (kb)v = kd$ donc kd appartient à $ka\mathbb{Z} + kb\mathbb{Z} = \text{pgcd}(ka, kb)\mathbb{Z}$. Ainsi kd est multiple de $\text{pgcd}(ka, kb)$. De plus, puisque d divise a et b, kd divise ka et kb, il en résulte que kd divise $\text{pgcd}(ka, kb)$.

e) D'après d), nous avons

$$d\text{pgcd}(a', b') = \text{pgcd}(da', db') = \text{pgcd}(a, b) = 1$$

d'où $\text{pgcd}(a', b') = 1$.

□

Théorème 1.15: (Théorème de Gauss)

Soient a, b et c des entiers non nuls. Si a divise bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

Démonstration. Supposons que a et b soient premiers entre eux ; nous avons alors une relation de Bézout : $au + bv = 1$. Il s'en suit que $acu + bcv = c$. Si a divise bc, alors a divise $(bc)v$ et $a(cu)$ donc a divise c. □

Corollaire 1.16

Soit p un nombre premier. Soient b et c deux entiers. Si p divise bc, alors p divise b ou p divise c.

Démonstration. Supposons que p divise bc. Si p ne divise pas b, alors puisque p est un nombre premier, il est premier avec b. Le théorème de Gauss (Théorème 1.15) assure alors que p divise c. □

D'après ce corollaire si un nombre premier divise un produit d'entiers, il divise au moins l'un des facteurs.

Corollaire 1.17

Soient n, a et b des entiers non nuls. Si n est premier avec a et avec b, alors n est premier avec ab.

Démonstration. Supposons que n soit premier avec a et b. Soit d un diviseur commun à n et ab. Tout diviseur positif commun à d et a divise b et a donc est égal à 1 (n et a sont premiers entre eux) : les entiers d et a sont donc premiers entre eux. Étant donné que d divise ab le théorème de Gauss assure que d divise b. Ainsi d divise b et n ; il en résulte que $d = 1$ (n et b sont premiers entre eux). Le seul diviseur positif commun à n et ab est donc 1. Il en résulte que $\text{pgcd}(a, b) = 1$. □

Donnons maintenant une application utile du théorème de Gauss :

Proposition 1.18

Soit p un nombre premier. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p-1$, le coefficient binomial $\binom{p}{k}$ est un multiple de p.

Démonstration. Par définition $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$ d'où $p! = \binom{p}{k}k!(p-k)!$. Ainsi p divise $\binom{p}{k}k!(p-k)!$. Supposons que $1 \leq k \leq p-1$; alors p ne divise aucun entier compris entre 1 et k. Par suite le corollaire du Théorème de Gauss assure que p ne divise pas $k!$. Les inégalités $1 \leq p-k \leq p-1$ assurent que p ne divise pas non plus $(p-k)!$. D'après le même corollaire nous en déduisons que p ne divise pas $k!(p-k)!$. Il s'en suit que p divise $\binom{p}{k}$. □

1.3.3 Équations du type $ax + by = c$, a, $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $c \in \mathbb{Z}$

Soient a, $b \in \mathbb{Z}$ des entiers non nuls et soit $c \in \mathbb{Z}$.
Les nombres de la forme $au + bv$, u, $v \in \mathbb{Z}$, sont les multiples de $\text{pgcd}(a, b)$. Nous en déduisons

Lemme 1.19

L'équation $ax + by = c$ a des solutions si et seulement si c est un multiple de $\text{pgcd}(a, b)$.

Montrons sur un exemple comment trouver toutes les solutions de l'équation.

Exemple 9. Soit $c \in \mathbb{Z}$. Trouver tous les $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que $931x + 513y = c$.

- ◇ Si c n'est pas un multiple de $19 = \text{pgcd}(931, 513)$, alors l'équation n'a pas de solution.
- ◇ Supposons que $c = 19c'$, $c' \in \mathbb{Z}$. L'équation $931x + 513y = c$ équivaut alors à $49x + 27y = c'$.
  - Puisque $49 \times (-11) + 27 \times 20 = 1$, $(x_0, y_0) = (-11c', 20c')$ est solution.
  - Toute solution (x, y) vérifie $49(x - x_0) + 27(y - y_0) = 0$ c'est-à-dire

$$27(y - y_0) = -49(x - x_0).$$

En particulier 27 divise $49(x - x_0)$. Comme 27 et 49 sont premiers en eux, le théorème de Gauss assure que 27 divise $x - x_0$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = x_0 + 27k$. Il s'en suit

$$27(y - y_0) = -49(x - x_0) = -49 \times 27k$$

d'où $y - y_0 = -49k$ et $y = y_0 - 49k$. Nous vérifions que ces nombres x et y sont bien solution.

En conclusion l'ensemble des solutions entières de l'équation $931x + 513y = c$ est

$$\{(-11c' + 27k, 20c' - 49k) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

1.4 Ppcm

Définition 1.20

Soient a et b des entiers non nuls. Le ppcm *de a et b*, noté $\text{ppcm}(a, b)$, est le *plus petit entier positif multiple* de a et de b.

Proposition 1.21

Soient a et b des entiers non nuls. Pour qu'un entier n soit multiple de a et de b, il faut et il suffit qu'il soit multiple de $\text{ppcm}(a, b) = \frac{ab}{\text{pgcd}(a,b)}$.
En particulier, si a et b sont premiers entre eux, alors tout entier multiple de a et de b est multiple de ab.

Démonstration. Posons $d = \text{pgcd}(a, b)$, $a' = \frac{a}{d}$ et $b' = \frac{b}{d}$.

Si n est multiple de $\frac{ab}{d} = ab' = a'b$, alors n est multiple de a et b.

Réciproquement, supposons que n soit un multiple de a et b, autrement dit supposons que $n = ka$ et $n = \ell b$ avec k, $\ell \in \mathbb{Z}$. Alors $kda' = \ell db'$ d'où $d(ka' - \ell b') = 0$. Il en résulte que $ka' = \ell b'$ et que a' divise $\ell b'$. Puisque a' et b' sont premiers entre eux, le théorème de Gauss assure que a' divise ℓ. Par suite il existe $u \in \mathbb{Z}$ tel que $\ell = ua'$. Il s'en suit que $n = \ell b = ua'b = u\frac{ab}{d}$; par conséquent n est multiple de $\frac{ab}{d}$. □

Exemple 10. Ainsi nous avons $\text{ppcm}(931, 513) = \frac{931 \times 513}{\text{pgcd}(931,513)} = \frac{49 \times 19 \times 27 \times 19}{19} = 49 \times 27 \times 19$.

1.5 Décomposition en facteurs premiers

Nous avons montré que tout entier au moins égal à 2 est produit de nombres premiers. Nous allons voir que cette factorisation est essentiellement unique :

Proposition 1.22

Pour tout entier $a > 1$ il existe une unique suite de nombres premiers p_1, p_2, …, p_k tels que $a = p_1 p_2 \dots p_k$ et $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_k$.

Démonstration. L'existence est assurée par la Proposition 1.5, en ordonnant les facteurs.

Montrons l'unicité. Supposons que q_1, q_2, …, q_ℓ soient des nombres premiers tels que

$$q_1 q_2 \dots q_\ell = p_1 p_2 \dots p_k, \qquad\qquad q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_\ell.$$

Si $p_1 < q_1$, alors $p_1 < q_i$ pour tout i, donc p_1 ne divise aucun q_i ; le Corollaire 1.16 assure alors que p_1 ne divise pas le produit $q_1 q_2 \dots q_\ell$: contradiction.

Un raisonnement similaire montre que nous ne pouvons pas avoir $q_1 < p_1$.

Par suite $p_1 = q_1$.

Si $a = p_1$, nous avons fini. Sinon, en divisant par p_1, nous obtenons $q_2 q_3 \dots q_\ell = p_2 p_3 \dots p_k$. Si $\ell < k$, alors de proche en proche nous obtenons $1 = p_{i+1} p_{i+2} \dots p_k$, ce qui est impossible puisque les nombres p_i ne sont pas égaux à 1. Si $k < \ell$, alors de proche en proche nous obtenons $q_{j+1} p_{j+2} \dots q_\ell = 1$, ce qui est impossible puisque les nombres q_i ne sont pas égaux à 1. Finalement $\ell = k$ et $p_j = q_j$ pour tout $1 \leq j \leq k$ □

En regroupant les termes égaux dans la décomposition, nous constatons que tout entier $a > 1$ s'écrit de manière unique à l'ordre près des facteurs :

$$a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$$

où les p_i sont des nombres premiers deux à deux distincts et $n_i \geq 1$.

Par commodité nous étendons cette écriture en considérant un produit sur tous les nombres premiers, y compris ceux qui ne divisent pas n que nous affectons de l'exposant 0 : en effet, par convention si q est un entier non nul, alors $q^0 = 1$. Notons $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers, nous écrivons

$$a = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\nu_p(a)}, \qquad \text{où } \nu_p(a) \in \mathbb{N}.$$

Dans ce produit il n'y a bien sûr qu'un nombre fini de facteurs différents de 1 car il n'y a qu'un nombre fini d'exposants non nuls. L'entier $\nu_p(a)$ s'appelle *l'exposant de p dans la décomposition de a en facteurs premiers.*

Exemple 11. Nous avons

$$504 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 2^3\, 3^2\, 7 = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\nu_p(504)}.$$

où $\nu_2(504) = 3$, $\nu_3(504) = 2$, $\nu_7(504) = 1$ et $\nu_p(504) = 0$ pour tout nombre premier $p > 7$.

La décomposition d'un produit s'obtient en multipliant les décompositions. Pour tout nombre premier p et tous entiers positifs a et b, nous avons donc

$$\nu_p(ab) = \nu_p(a) + \nu_p(b).$$

1.5.1 Expressions du pgcd et du ppcm

Si des entiers a et b ont pour décomposition $a = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\nu_p(a)}$ et $b = \prod_{b\in\mathbb{P}} p^{\nu_p(b)}$, alors

$$\mathrm{pgcd}(a,b) = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\min(\nu_p(a),\nu_p(b))}, \qquad \mathrm{ppcm}(a,b) = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\max(\nu_p(a),\nu_p(b))}.$$

Exemple 12. Considérons

$$n = 172872 = 2^3 \times 3^2 \times 7^4 \qquad \text{et} \qquad m = 525525 = 3^1 \times 5^2 \times 7^2 \times 11^1 \times 13^1.$$

Quitte à admettre des puissances nulles nous pouvons écrire la décompositions sur les mêmes facteurs

$$n = 2^3 \times 3^2 \times 5^0 \times 7^4 \times 11^0 \times 13^0 \qquad \text{et} \qquad m = 2^0 \times 3^1 \times 5^2 \times 7^2 \times 11^1 \times 13^1.$$

Par conséquent

$$\mathrm{pgcd}(m,n) = 2^0 \times 3^1 \times 5^0 \times 7^2 \times 11^0 \times 13^0 = 147$$

et

$$\mathrm{ppcm}(m,n) = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^4 \times 11^1 \times 13^1 = 618017400.$$

1.5.2 Nombres de diviseurs

Soit $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$ un entier décomposé en facteurs premiers. Pour qu'un entier positif d divise n il faut et il suffit que la décomposition de d soit de la forme

$$d = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \text{ où } 0 \le \alpha_i \le n_i \text{ pour tout } i.$$

Il y a $n_1 + 1$ valeurs possibles pour α_1, $n_2 + 1$ pour α_2, etc, par suite : *le nombre de diviseurs positifs de* $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$ *est* $(n_1 + 1)(n_2 + 1)\dots(n_k + 1)$.

Exemple 13. Le nombre de diviseurs positifs de $4312 = 2^3 \times 7^2 \times 11$ est $(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 24$.

1.5.3 Décomposition de $n!$

Pour tout nombre réel x, nous notons $E(x)$ la partie entière de x.
Soit n un entier au moins égal à 2 et soit p un nombre premier.

- ◇ Parmi les entiers 1, 2, …, n ceux qui sont multiples de p s'écrivent kp où k est un entier tel que $1 \le k \le E\left(\frac{n}{p}\right)$: il y en a $E\left(\frac{n}{p}\right)$.
- ◇ Parmi ces multiples de p, ceux qui sont multiples de p^2 sont les kp^2 où k est un entier tel que $1 \le k \le E\left(\frac{n}{p^2}\right)$: il y en a $E\left(\frac{n}{p^2}\right)$.

◇ Parmi 1, 2, …, n il y a donc $E\left(\frac{n}{p}\right) - E\left(\frac{n}{p^2}\right)$ entiers multiples de p et pas de p^2.

◇ Plus généralement, pour tout entier $k \geq 1$, il y a $E\left(\frac{n}{p^k}\right) - E\left(\frac{n}{p^{k+1}}\right)$ entiers multiples de p^k et pas de p^{k+1} parmi 1, 2, …, n.

Nous en déduisons que si $p^r \leq n < p^{r+1}$, alors

$$\nu_p(n!) = \left(E\left(\frac{n}{p}\right) - E\left(\frac{n}{p^2}\right)\right) + 2\left(E\left(\frac{n}{p^2}\right) - E\left(\frac{n}{p^3}\right)\right) + \ldots + r\left(E\left(\frac{n}{p^r}\right) - E\left(\frac{n}{p^{r+1}}\right)\right).$$

Proposition 1.23

Soit n un entier au moins égal à 2. Pour tout nombre premier p, nous avons

$$\nu_p(n!) = E\left(\frac{n}{p}\right) + E\left(\frac{n}{p^2}\right) + \ldots + E\left(\frac{n}{p^k}\right) + \ldots$$

(où la somme n'a qu'un nombre fini de termes).

Exemple 14. Nous avons $\nu_3(25!) = E\left(\frac{25}{3}\right) + E\left(\frac{25}{9}\right) = 8 + 2 = 10$.

2 Relations d'équivalence et ensemble quotient

Nous sommes souvent amenés à partager les éléments d'un ensemble en différentes classes, c'est-à-dire à définir une partition de cet ensemble. Il devient alors possible de raisonner et de calculer sur les classes : c'est un procédé algébrique puissant.

2.1 Partition et relation d'équivalence

2.1.1 Partition d'un ensemble

Définition 2.1

Soit E un ensemble. Une *partition* de E est la donnée de parties C_i de E, non vides, deux à deux disjointes et dont la réunion est E. On dit que les parties C_i sont des *classes*.

On peut évidemment définir des partitions de manière totalement arbitraire, par exemple $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{0\} \cup \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \geq 5\}$, ou bien réunir les éléments qui partagent une propriété commune :

Exemple 15. Pour tout entier naturel n notons C_n l'ensemble des entiers relatifs qui sont divisibles par 2^n mais pas par 2^{n+1}. On a ainsi C_0 qui est l'ensemble des entiers impairs, C_1 l'ensemble des entiers multiples de 2 mais pas de 4.

Les parties $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{0\}$ forment une partition de $\mathbb{Z}$.

On peut aussi utiliser une fonction intermédiaire :

Exemple 16. Soit $f\colon E \to F$ une application surjective.

Rappelons que pour tout élément $b \in F$, la partie de E définie par

$$f^{-1}(b) = \{x \in E \,|\, f(x) = b\}$$

s'appelle *l'image réciproque de b par f*.

- ◇ Puisque f est surjective, $f^{-1}(b)$ est non vide.
- ◇ Les parties $C_b = f^{-1}(b)$ sont deux à deux disjointes car s'il existe x appartenant à $C_b \cap C_{b'}$, alors $b = f(x) = b'$.
- ◇ De plus leur réunion est E, car pour tout $x \in E$ nous avons $x \in f^{-1}(f(x))$ donc x appartient à $C_{f(x)}$. Par suite les parties C_b forment une partition de E.

Exemple 17. Soit $f\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ l'application définie par $f(x,y) = 2x+3y$. L'application f est surjective car pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, nous avons $f(-k,k) = -2k+3k = k$. Ainsi par exemple les parties

$$C_0 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \,|\, 2x+3y = 0\} \qquad \text{et} \qquad C_5 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \,|\, 2x+3y = 5\}$$

sont des classes de la partition de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ définie par f.

En toute généralité, si E est un ensemble et si $\mathcal{P} = \{C_i\}_{i\in I}$ est une partition de E, on peut dire de deux éléments de E qu'ils sont « reliés » par la partition $\mathcal{P}$ s'ils appartiennent au même ensemble C_i. En particulier on constate alors que tout $x \in E$ est relié à lui-même, que si $x \in E$ est relié à $y \in E$ alors y est relié à x et enfin que si x est relié à y et y à z alors x est relié à z. Une telle relation entre les éléments d'un même ensemble est une *relation d'équivalence*. Il s'agit d'un moyen qui peut s'avérer extrêmement fin pour obtenir des informations sur un ensemble, notamment sur les groupes. Dans le paragraphe qui suit nous introduisons plus précisément cette notion.

2.1.2 Relation d'équivalence

Définition 2.2

Soit E un ensemble. On a défini une *relation* $\mathcal{R}$ sur l'ensemble E si on s'est donné un ensemble $\Gamma \subset E \times E$ appelé *graphe de la relation*.

Cette définition revient à dire que pour définir une relation, on se donne l'ensemble des couples (x,y) d'éléments de E qui vérifient la relation. Nous avons ici le même mode de définition que pour une application, qui est un cas particulier de relation. Au lieu de noter $(x,y) \in \Gamma$ nous noterons $x\mathcal{R}y$.

Définition 2.3

Une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une *relation d'équivalence* si elle est

(i) réflexive : $\forall\, a \in E,\ a\mathcal{R}a$;

(ii) symétrique : $\forall\, a, b \in E,\ a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$;

(iii) transitive : $\forall\, a, b, c \in E\ (a\mathcal{R}b \text{ et } b\mathcal{R}c) \Rightarrow a\mathcal{R}c$;

Pour tout $a \in E$, l'ensemble

$$\overline{a} = \{x \in E \,|\, x\mathcal{R}a\}$$

s'appelle la *classe (d'équivalence) de a*.

Exemple 18. Sur tout ensemble E, l'égalité de deux éléments est une relation d'équivalence. En effet définissons sur E la relation $\mathcal{R}$ par : soient x, $y \in E$ alors $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x = y$. La relation $\mathcal{R}$ est :

- ◇ réflexive : pour tout x dans E, nous avons $x = x$, *i.e.* $x\mathcal{R}x$;
- ◇ symétrique : soient x et y dans E tels que $x\mathcal{R}y$, c'est-à-dire $x = y$; mais $x = y$ si et seulement si $y = x$, autrement dit $y\mathcal{R}x$;
- ◇ transitive : soient x, y et z dans E tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$; alors d'une part $x = y$ et d'autre part $y = z$ ce qui conduit à $x = z$, *i.e.* $x\mathcal{R}z$.

Pour tout x dans E, $\overline{x} = \{x\}$.

Comme on peut s'en douter, ce premier exemple correspond à la relation d'équivalence « triviale ». Les classes d'équivalence y étant réduites à un élément elle n'a concrètement pas une grande utilité. Elle indique cependant que les relations d'équivalence sont en quelque sorte des généralisations de la relation d'égalité.

Exemple 19. Sur l'ensemble des droites (du plan ou de l'espace), la relation « droites parallèles ou confondues » est une relation d'équivalence. Si d est une droite, sa classe d'équivalence $\overline{d}$ est par définition la direction de d.

Exemple 20. Pour les angles du plan, la relation de congruence modulo 2π est une relation d'équivalence. La classe d'équivalence d'un angle par la relation de congruence modulo 2π est l'angle lui-même modulo 2π.

Exemple 21. Dans $\mathbb{Z}$, la relation $x \equiv y \mod (n)$, si $x - y$ est divisible par l'entier n est une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. En effet, $\mathcal{R}$ est

- ◇ réflexive : pour tout $x \in \mathbb{Z}$ nous avons $x - x = 0$ est divisible par n, *i.e.* $x\mathcal{R}x$;
- ◇ symétrique : soient x et y dans $\mathbb{Z}$ tels que $x\mathcal{R}y$, c'est-à-dire tels que $x - y = nu$ pour un certain $u \in \mathbb{Z}$, alors $y - x = n(-u)$ et $y\mathcal{R}x$;
- ◇ transitive : soient x, y et z dans $\mathbb{Z}$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. Alors d'une part $x - y = nu$ pour un certain $u \in \mathbb{Z}$ et $y - z = nv$ pour un certain $v \in \mathbb{Z}$. Nous en déduisons que

$$x - z = (x - y) + (y - z) = nu + nv = n\underbrace{(u + v)}_{\in\mathbb{Z}}$$

soit $x\mathcal{R}z$.

Les classes d'équivalence sont les $\overline{y} = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, \exists\, k \in \mathbb{Z},\, x - y = kn\}$ pour $y \in \{0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, n-\, 1\}$, ce qui correspond à l'ensemble des restes possibles de la division euclidienne par n. En effet, par définition

$$\overline{y} = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x\mathcal{R}y\} = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x - y \text{ est divisible par } n\} = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, \exists k \in \mathbb{Z}\, x - y = kn\}$$

L'ensemble de ces classes d'équivalence est noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Nous l'étudierons en détails au chapitre **??**.

Exemple 22. Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites de nombres complexes. On dit que $(x_n) \in \mathcal{S}$ est équivalente à $(y_n) \in \mathcal{S}$ s'il existe $(r_n) \in \mathcal{S}$ qui converge vers 1, et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout entier $n \geq N$ on ait $x_n = r_n y_n$. Il s'agit d'une relation d'équivalence. En effet, elle est

- ◇ réflexive : avec $r_n = 1$ pour tout n on a $x_n = r_n x_n$.

- ◇ symétrique : soient $N \in \mathbb{N}$ et (r_n) convergeant vers 1 tels que pour tout $n \geq N$ on a $x_n = r_n y_n$. Puisque (r_n) converge vers 1, la suite $\left(\frac{1}{r_n}\right) = (q_n)$ est bien définie à partir d'un certain rang N_1 et elle converge vers 1. Pour $n \geq \max(N, N_1)$ on a : $y_n = q_n x_n$, ce qui nous indique que (y_n) est équivalente à (x_n).
- ◇ transitive : soient (x_n) une suite équivalente à (y_n) elle-même équivalente à (z_n). Il existe $(N_1, N_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $(r_n) \in \mathcal{S}$ et $(s_n) \in \mathcal{S}$, toutes deux convergeant vers 1, tels que pour $n \geq \max(N_1, N_2) := N$ on a $x_n = r_n y_n$ et $y_n = s_n z_n$. On a alors, pour $n \geq N$, $x_n = r_n s_n z_n$. La suite $(r_n s_n)$ converge vers 1 ce qui permet de conclure que (x_n) est équivalente à (z_n).

Exemple 23. Dans $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(a,b)\mathcal{R}(a',b') \iff a + b' = a' + b$ est une relation d'équivalence. En effet, la relation $\mathcal{R}$ est

- ◇ réflexive : pour tout (a,b) dans E, nous avons $a + b = a + b$, *i.e.* $(a,b)\mathcal{R}(a,b)$;
- ◇ symétrique : soient (a,b) et (a',b') dans E tels que $(a,b)\mathcal{R}(a',b')$, c'est-à-dire tels que $a + b' = a' + b$. Or $a + b' = a' + b$ se réécrit $a' + b = a + b'$ donc $(a',b')\mathcal{R}(a,b)$.
- ◇ transitive : soient (a,b), (a',b') et (a'',b'') dans E tels que $(a,b)\mathcal{R}(a',b')$ et $(a',b')\mathcal{R}(a'',b'')$. Alors d'une part $a + b' = b + a'$ et d'autre part $a' + b'' = a'' + b'$; nous en déduisons que

$$a + b'' = \underbrace{a + b'}_{b+a'} - b' + b'' = b + a' - b' + b'' = b - b' + \underbrace{a' + b''}_{a''+b'} = b - b' + a'' + b' = a'' + b$$

  c'est-à-dire que $(a,b)\mathcal{R}(a'',b'')$.

La classe $\overline{(a,b)}$ de (a,b) est par définition le nombre relatif $a - b$. En effet, par définition

$$\begin{aligned} \overline{(a,b)} &= \{(a',b') \in E \,|\, (a',b')\mathcal{R}(a,b)\} = \{(a',b') \in E \,|\, a' + b = a + b'\} \\ &= \{(a',b') \in E \,|\, a' - b' = a - b\} \end{aligned}$$

Lorsque l'on construit les ensembles de nombres, cette manière de « symétriser » l'addition de $\mathbb{N}$ permet, partant de $\mathbb{N}$, de construire l'ensemble $\mathbb{Z}$. On a en effet très envie d'identifier la classe de (a,b) avec l'entier relatif $a - b$. On fait en réalité le contraire en définissant $(a - b)$ comme la classe de (a,b). Il faut alors définir une addition naturelle sur l'ensemble des classes d'équivalence, ce que l'on détaillera plus tard.

Exemple 24. Dans $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, $(p,q)\mathcal{R}(p',q') \iff pq' = p'q$ est une relation d'équivalence. On vérifie en effet qu'elle est :

- ◇ réflexive : pour tout (p,q) dans E, nous avons $pq = pq$, *i.e.* $(p,q)\mathcal{R}(p,q)$;
- ◇ symétrique : soient (p,q) et (p',q') dans E tels que $(p,q)\mathcal{R}(p',q')$. C'est-à-dire tels que $pq' = p'q$. Cela se réécrit $p'q = pq'$ donc $(p',q')\mathcal{R}(p,q)$.
- ◇ transitive : soient (p,q), (p',q') et (p'',q'') dans E tels que $(p,q)\mathcal{R}(p',q')$ et $(p',q')\mathcal{R}(p'',q'')$. Alors d'une part $pq' = p'q$ et d'autre part $p'q'' = p''q'$; nous en déduisons que

$$\underbrace{pq'}_{p'q} q'' = p'qq'' = q\underbrace{p'q''}_{p''q'} = qp''q' = p''qq'$$

  soit $pq'' = p''q$ (car q' appartient à $\mathbb{Z}^*$), *i.e.* $(p,q)\mathcal{R}(p'',q'')$.

La classe $\overline{(p,q)}$ de (p,q) est par définition le nombre rationnel $\frac{p}{q}$. En effet, par définition

$$\begin{aligned}\overline{(p,q)} &= \{(p',q') \in E \,|\, (p',q')\mathcal{R}(p,q)\} = \{(p',q') \in E \,|\, pq' = p'q\} \\ &= \left\{(p',q') \in E \,|\, \frac{p'}{q'} = \frac{p}{q}\right\}\end{aligned}$$

C'est la multiplication sur $\mathbb{Z}$ que l'on « symétrise » cette fois et partant de $\mathbb{Z}$ on construit l'ensemble $\mathbb{Q}$ en définissant $\frac{p}{q}$ comme la classe de (p,q). Il convient ensuite de munir l'ensemble des classes d'équivalence d'une addition et d'une multiplication.

Ces deux derniers exemples illustrent la puissance des relations d'équivalence qui permettent de formaliser certaines idées de manière très efficace.

Proposition 2.4

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Alors
- ◇ pour tout $a \in E$, $a \in \overline{a}$;
- ◇ pour tous a, $b \in E$ nous avons l'équivalence : $a\mathcal{R}b \iff \overline{a} = \overline{b}$;
- ◇ pour tous a, $b \in E$, si $\overline{a} \neq \overline{b}$, alors $\overline{a} \cap \overline{b} = \emptyset$.

Démonstration. Soient a, b dans E.
- ◇ Puisque d'après (i) nous avons $a\mathcal{R}a$, nous obtenons : $a \in \overline{a}$.
- ◇ Supposons que $a\mathcal{R}b$. Pour tout $z \in \overline{a}$ nous avons $z\mathcal{R}a$; puisque par hypothèse $a\mathcal{R}b$, nous obtenons par transitivité $z\mathcal{R}b$. En particulier z appartient à $\overline{b}$. Ceci montre que $\overline{a} \subset \overline{b}$. Comme $a\mathcal{R}b$ nous avons par symétrie $b\mathcal{R}a$; de la même façon que précédemment nous obtenons que $\overline{b} \subset \overline{a}$. Ainsi $\overline{a} = \overline{b}$.
  Réciproquement, si $\overline{a} = \overline{b}$, alors a qui appartient à $\overline{a}$ appartient aussi à $\overline{b}$ et donc $a\mathcal{R}b$.
- ◇ Montrons la dernière assertion en raisonnant par contraposée. Supposons que $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$. Soit donc z dans $\overline{a} \cap \overline{b}$. Puisque z appartient à $\overline{a}$ (resp. $\overline{b}$), $z\mathcal{R}a$ (resp. $z\mathcal{R}b$). Par symétrie $a\mathcal{R}z$. Par transitivité $a\mathcal{R}z$ et $z\mathcal{R}b$ conduisent à $a\mathcal{R}b$, soit $\overline{a} = \overline{b}$.

□

Remarquons que E est la réunion des classes d'équivalence car tout élément a de E appartient à $\overline{a}$. Nous en déduisons l'énoncé suivant :

Proposition 2.5

Étant donnée une relation d'équivalence sur E, les classes d'équivalence forment une partition de E.

Réciproquement, et comme nous l'avons déjà indiqué à la fin du paragraphe sur les partitions (§2.1.1), si on se donne une partition $(C_i)_{i\in I}$ de E, alors la relation définie par $a\mathcal{R}b \iff (\exists\, i \in I$ tel que $a, b \in C_i)$ est une relation d'équivalence dont les classes sont les C_i. Ainsi relation d'équivalence et partition sont deux points de vue différents sur un même concept.

2.1.3 Relation d'équivalence définie par une application

Soit $f\colon E \to F$ une application. Définissons une relation $\mathcal{R}_f$ sur E en posant

$$\forall\, x,\, y \in E,\ x\mathcal{R}_f y \iff f(x) = f(y).$$

Cette relation est réflexive, symétrique et transitive. En effet
- ◇ si $x \in E$, alors $f(x) = f(x)$, c'est-à-dire $x\mathcal{R}x$;
- ◇ si x, y sont deux éléments de E tels que $x\mathcal{R}y$, alors $f(x) = f(y)$ d'où $f(y) = f(x)$ et $y\mathcal{R}x$;
- ◇ si x, y et z sont des éléments de E tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $f(x) = f(y)$ et $f(y) = f(z)$; nous en déduisons que $f(x) = f(z)$, c'est-à-dire $x\mathcal{R}z$.

Définition 2.6

Soit $f\colon E \to F$ une application. La relation d'équivalence $\mathcal{R}_f$ définie par

$$\forall\, x,\, y \in E,\ x\mathcal{R}_f\, y \iff f(x) = f(y)$$

s'appelle la *relation d'équivalence définie par* f.

Pour tout $a \in E$, la classe de a est $\overline{a} = \{x \in E \,|\, f(x) = f(a)\} = f^{-1}(f(a))$.

Exemple 25. Soit O un point du plan euclidien E et soit $f\colon E \to \mathbb{R}$, la fonction qui à M associe OM. La relation d'équivalence associée à f est

$$\forall\, M,\, M' \in E,\ M\mathcal{R}_f M' \iff OM = OM'.$$

La classe d'équivalence d'un point $A \in E$ est formée des points M qui sont à la même distance de O que A :

$$\overline{A} = \{M \in E \,|\, M\mathcal{R}_f\} = \{M \in E \,|\, OM = OA\}$$

Ainsi :
- ◇ si $A \neq O$, alors $\overline{A}$ est le cercle de centre O passant par A,
- ◇ $\overline{O} = \{O\}$.

Exemple 26. Soient E et F deux espaces vectoriels et $f\colon E \to F$ une application linéaire. Si x et y sont dans E, alors

$$x\mathcal{R}_f\, y \iff f(x) = f(y) \iff f(x) - f(y) = 0_F \iff f(x - y) = 0_F.$$

Autremenent dit on a $x\mathcal{R}_f\, y \iff (x - y) \in \ker f$.

2.2 Ensemble quotient

Définitions 2.7

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E.

- ◇ L'ensemble des classes d'équivalence s'appelle l'*ensemble quotient* de E par $\mathcal{R}$ et se note $E/\mathcal{R}$.
- ◇ L'application $p\colon E \to E/\mathcal{R}$ définie par $p(x) = \overline{x}$ s'appelle la *projection canonique*.
- ◇ Étant donnée une classe d'équivalence $\overline{a}$ tout élément $x \in \overline{a}$ s'appelle un *représentant* de cette classe.

Proposition 2.8

- ◇ L'application p est surjective : $\forall\, \alpha \in E/\mathcal{R},\ \exists\, a \in E,\ \alpha = p(a)$.
- ◇ La relation $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence définie par p :

$$\forall\, x,\, y \in E,\ p(x) = p(y) \Leftrightarrow x\mathcal{R}y.$$

Démonstration.

- ◇ Toute classe $\alpha \in E/\mathcal{R}$ est la classe d'au moins un élément $a \in E$: $\alpha = \overline{a}$, donc $\alpha = p(a)$.
- ◇ Pour tous $x,\ y \in E$, nous avons $x\mathcal{R}y \iff \overline{x} = \overline{y} \iff p(x) = p(y)$ donc $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence définie par l'application p.

□

Toute relation d'équivalence sur E est donc définie par une application : la projection canonique $E \to E/\mathcal{R}$.

Exemple 27. Considérons la relation sur $\mathbb{R}^*$ définie par : $x\mathcal{R}y \iff xy > 0$.

C'est une relation d'équivalence car $x\mathcal{R}y$ si et seulement si x et y sont de même signe.

La relation $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence définie par l'application $\mathrm{sgn}\colon \mathbb{R}^* \to \{1, -1\}$ qui à tout $x \in \mathbb{R}^*$ associe son signe.

Il y a deux classes : $\overline{1} = \mathbb{R}^{*+}$ et $\overline{-1} = \mathbb{R}^{*-}$. L'ensemble quotient $\mathbb{R}^*/\mathcal{R}$ est donc formé de deux éléments.

2.3 Passage au quotient d'une application (**)

Comme nous l'avons vu

- ◇ la notion de relation d'équivalence sur un ensemble X est l'outil qui permet en pratique d'identifier les éléments de X partageant une certaine propriété (les rendant « équivalents ») ;
- ◇ la donnée d'une telle relation sur X définit une partition naturelle de X en classes d'équivalence ;
- ◇ l'ensemble de ces classes, un sous-ensemble de l'ensemble de toutes les parties de X, est appelé ensemble quotient de X par $\mathcal{R}$, et il est noté $X/\mathcal{R}$.

Sa propriété principale (dite « universelle ») est qu'une application $f\colon X \to Y$ constante sur les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ se factorise canoniquement en une application $f\colon X/\mathcal{R} \to Y$, appelée passage au quotient de f.

Exemple 28. Reprenons la relation de l'Exemple 20 de congruence modulo 2π. Étant donné $\theta \in [0, 2\pi[$ on note $\overline{\theta} := \{\theta + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$ sa classe d'équivalence. On a alors $E/\mathcal{R} = \bigcup_{\theta\in\mathbb{R}} \overline{\theta}$.

Considérons les fonctions $f\colon x \mapsto \cos(x)$ et $g\colon x \mapsto x+1$. Il est très tentant de définir « naïvement » $\overline{f}\colon E/\mathcal{R} \to \mathbb{R}$ et $\overline{g}\colon E/\mathcal{R} \to \mathbb{R}$ en posant tout simplement $\overline{f}(\overline{\theta}) = f(\theta)$ et $\overline{g}(\overline{\theta}) = g(\theta)$. Mais si cela a du sens pour $\overline{f}$, cela n'en a aucun pour $\overline{g}$. En effet, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a $\overline{\theta} = \overline{\theta + 2k\pi}$ alors $f(\theta) = \cos(\theta) = \cos(\theta+2k\pi) = f(\theta+2k\pi)$, par contre, si $k \neq 0$, $g(\theta) = \theta+1 \neq \theta+2k\pi+1 = g(\theta+2k\pi)$. La définition « naturelle » a donc un sens pour f, qui est constante sur les classes d'équivalence, mais aucun pour g, qui ne l'est pas.

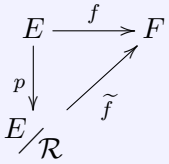
L'énoncé suivant permet de définir des applications sur un ensemble quotient :

Théorème 2.9: (Factorisation canonique d'une application)

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. Soit $p\colon E \to E/\mathcal{R}$ la projection canonique.
Soit $f\colon E \to F$.
Pour qu'il existe une application $\widetilde{f}\colon E/\mathcal{R}$ telle que $\widetilde{f} \circ p = f$ il faut et il suffit que $\forall\, x, y \in E$, $x\mathcal{R}y \Longrightarrow f(x) = f(y)$.
Dans ce cas

- $\widetilde{f}$ est unique et pour toute classe $\alpha \in E/\mathcal{R}$ nous avons $\widetilde{f}(\alpha) = f(a)$ pour tout représentant a de α ;
- $\widetilde{f}$ est injective si et seulement si $\forall\, x, y \in E$, $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow f(x) = f(y)$;
- les applications f et $\widetilde{f}$ ont la même image.

Si l'application $\widetilde{f}$ existe, nous disons que f *passe au quotient modulo* $\mathcal{R}$ et $\widetilde{f}$ s'appelle la *factorisation* de f par $E/\mathcal{R}$:



Démonstration.

- Supposons qu'il existe $\widetilde{f}\colon E/\mathcal{R} \to F$ telle que $f = \widetilde{f} \circ p$. Si $x, y \in E$ sont tels que $x\mathcal{R}y$, alors $p(x) = p(y)$, donc $f(x) = \widetilde{f}(p(x)) = \widetilde{f}(p(y)) = f(y)$.
  Réciproquement supposons que pour tous $x, y \in E$, nous ayons la propriété : $x\mathcal{R}y \Longrightarrow f(x) = f(y)$. Si $\alpha \in E/\mathcal{R}$, alors pour tous représentants a, a' de α nous avons $a'\mathcal{R}a$ donc $f(a) = f(a')$: l'application f prend la même valeur sur tous les représentants de α. Nous pouvons donc poser $\widetilde{f}(\alpha) = f(a)$ où a est un représentant quelconque de α. Nous définissons ainsi une application $\widetilde{f}\colon E/\mathcal{R} \to F$ telle que $\widetilde{f}(p(a)) = f(a)$ quel que soit $a \in E$.
- Supposons que $\widetilde{f}$ soit injective. Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors $\widetilde{f}(p(x)) = \widetilde{f}(p(y))$ donc $p(x) = p(y)$ et par suite $x\mathcal{R}y$.
  Réciproquement, supposons que pour tous $x, y \in E$ nous avons $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow f(x) = f(y)$. Soient $\alpha = p(a)$ et $\beta = p(b)$ des éléments de $E/\mathcal{R}$ tels que $\widetilde{f}(\alpha) = \widetilde{f}(\beta)$. Alors $f(a) = \widetilde{f}(\alpha) = \widetilde{f}(\beta) = f(b)$ donc $a\mathcal{R}b$ et $\alpha = \beta$: l'application $\widetilde{f}$ est donc injective.

◇ Puisque $f = \widetilde{f} \circ p$ nous avons $f(E) = \widetilde{f}(p(E)) = \widetilde{f}\left(E/\mathcal{R}\right)$ car p est surjective.

□

En appliquant le Théorème 2.9 à la relation $\mathcal{R}_f$ définie par f, nous obtenons l'énoncé très utile suivant.

Corollaire 2.10: (Factorisation canonique d'une application)

Soit $f\colon E \to F$. Soit $\mathcal{R}_f$ la relation d'équivalence associée à f. Soit $p\colon E \to E/\mathcal{R}_f$ la projection canonique.

- ◇ Il existe une unique application $\widetilde{f}\colon E/\mathcal{R}_f \to F$ telle que $\widetilde{f} \circ p = f$.
- ◇ L'application $\widetilde{f}$ est injective.
- ◇ L'application $\widetilde{f}$ est bijective si et seulement si l'application f est surjective.

Démonstration. Dans le Théorème 2.9, prenons $\mathcal{R}_f$ comme relation d'équivalence sur E. Pour tous x, $y \in E$ nous avons alors les deux implications

$$x\mathcal{R}_f y \Longrightarrow f(x) = f(y) \qquad\qquad f(x) = f(y) \Longrightarrow x\mathcal{R}_f y$$

donc f passe au quotient modulo $\mathcal{R}_f$ et l'application $\widetilde{f}$ est injective. Par suite l'application $\widetilde{f}$ est bijective si et seulement si elle est surjective, c'est-à-dire si et seulement si f est surjective car f et $\widetilde{f}$ ont même image. □

Exemple 29. Reprenons un exemple introduit précédemment. Soit O un point du plan euclidien E et soit $f\colon E \to \mathbb{R}$, la fonction qui à M associe OM. La relation d'équivalence associée à f est

$$\forall\, M,\, M' \in E,\, M\mathcal{R}_f M' \Longleftrightarrow OM = OM'.$$

L'ensemble quotient $E/\mathcal{R}_f$ est l'ensemble des cercles de centre O. L'application $\widetilde{f}\colon E/\mathcal{R}_f \to \mathbb{R}$ est définie comme suit : pour tout cercle $C \in E/\mathcal{R}_f$ $\widetilde{f}(C) = OM$ où M est un point quelconque de C. Autrement dit, pour tout cercle C de centre O, $\widetilde{f}(C)$ est le rayon de C. Cette application est bien injective.

Pour qu'une application $g\colon E \to \mathbb{R}$ passe au quotient il faut et il suffit que pour tous M, $M' \in E$ nous ayons la propriété suivante : $OM = OM' \Rightarrow g(M) = g(M')$: cette propriété signifie que pour tout $M \in E$, $g(M)$ ne dépend que de la distance OM.

Exemple 30. Dans l'ensemble $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ définissons la relation

$$\forall\, (x,y),\, (x',y') \in E,\, (x,y)\mathcal{R}(x',y') \Longleftrightarrow xy' - x'y = 0.$$

C'est une relation d'équivalence (à vérifier en exercice [1]).

1. On peut ensuite relire l'Exemple 24...

Soit $f\colon E \to \mathbb{Q}$ l'application définie par $f(x,y) = \frac{x}{y}$. Pour tous (x,y), (x',y') dans E nous avons

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \iff xy' = x'y \iff \frac{x}{y} = \frac{x'}{y'} \iff f(x,y) = f(x',y').$$

Ainsi $\mathcal{R}$ est la relation définie par f.

En appelant $p\colon E \to {}^{E}\!/_{\mathcal{R}}$ la projection canonique, il existe donc une application injective $\widetilde{f}\colon E \to {}^{E}\!/_{\mathcal{R}} \to \mathbb{Q}$ telle que $\widetilde{f} \circ p = f$. L'application f est surjective car tout nombre rationnel s'écrit $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ et $f(a,b) = \frac{a}{b}$. Par conséquent l'application $\widetilde{f}$ est bijective.

L'ensemble quotient ${}^{E}\!/_{\mathcal{R}}$ est une construction de $\mathbb{Q}$ à partir des ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.

3 Congruences & ${}^{\mathbb{Z}}\!/_{n\mathbb{Z}}$

Dans ce paragraphe nous montrons comment calculer modulo un entier donné. Le théorème de Fermat constitue un résultat particulièrement utile. Nous voyons aussi comment résoudre des systèmes de congruences.

3.1 Congruences

3.1.1 Relation de congruence

Définition 3.1

Soient a et b des entiers relatifs. On dit que a *est congru à* b *modulo* n si $a-b$ est multiple de n. Cette relation se note $a \equiv b \bmod n$.

Exemples 31.
- $141 \equiv 9 \bmod 11$ car $141 - 9 = 132$ est multiple de 11 (en effet $11 \times 12 = 132$).
- Nous avons l'équivalence : $(a \equiv 0 \bmod n) \iff n \mid a$.
- Si $a \equiv b \bmod n$, alors pour tout diviseur positif d de n, nous avons $a \equiv b \bmod d$.

Proposition 3.2

Soient a, $b \in \mathbb{Z}$.
- Si r est le reste de la division euclidienne de a par n, alors $a \equiv r \bmod n$.
- a est congru à b modulo n si et seulement si a et b ont même reste dans la division euclidienne par n.

Démonstration. Soient q le quotient et r le reste de la division de a par n. Nous avons $a = nq + r$; par suite $a - r = nq$ est multiple de b et $a \equiv r \bmod n$.

Soit r' le reste de la division de b par b. Nous avons $b = nq' + r'$ et

$$a - b = n(q - q') + (r - r').$$

Si $r = r'$, alors $a - b = n(q - q')$ est multiple de b. Réciproquement, supposons que $a - b$ soit un multiple de n. Alors $r - r'$ est multiple de n. Mais r et r' sont compris entre 0 et $n - 1$ d'où les

inégalités $-n < r - r' < n$. L'unique multiple de n strictement compris entre $-n$ et n est 0, par suite $r - r' = 0$, c'est-à-dire $r = r'$. □

Soit $\rho\colon \mathbb{Z} \to \{0, 1, \ldots, n-1\}$ l'application qui à tout entier $x \in \mathbb{Z}$ associe son reste dans la division euclidienne par n. D'après la Proposition 3.2 nous avons pour tous x, $y \in \mathbb{Z}$ l'équivalence

$$x \equiv y \bmod n \iff \rho(x) = \rho(y).$$

Ainsi, la relation de congruence modulo n est la relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$ définie par l'application ρ.

Corollaire 3.3

La relation $x \equiv y \bmod n$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
- ◇ Si $a \in \mathbb{Z}$, alors la classe de a est $\overline{a} = \{a + nk \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$.
- ◇ Les classes d'équivalence sont $\overline{0}$, $\overline{1}$, …, $\overline{n-1}$; il y en a n.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{Z}$. Pour tout $x \in \mathbb{Z}$ nous avons par définition : $x \equiv a \bmod n$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - a = nk$. Par suite la classe de a est $\{a + nk \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$. Si r est le reste de la division de a par n, nous avons $a \equiv r \bmod n$ d'où $\overline{a} = \overline{r}$. Les différents restes possibles dans la division par n sont 0, 1, …, $n-1$; il en résulte que les classes d'équivalence sont $\overline{0}$, $\overline{1}$, …, $\overline{n-1}$. Des entiers entre 0 et $n-1$ ne peuvent être congrus modulo n que s'ils sont égaux ; par conséquent, les classes $\overline{0}$, $\overline{1}$, …, $\overline{n-1}$ sont deux à deux disjointes. □

Exemples 32.
- ◇ Il y a deux classes de congruence modulo 2 : la classe $\overline{0} = 2\mathbb{Z}$ qui est formée des entiers pairs, et la classe $\overline{1} = \{2k + 1 \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ qui est formée des entiers impairs.
- ◇ Les trois classes de congruence modulo 3 sont

$$\overline{0} = 3\mathbb{Z}, \qquad \overline{1} = \{3k + 1 \,|\, k \in \mathbb{Z}\}, \qquad \overline{2} = \{3k + 2 \,|\, k \in \mathbb{Z}\}.$$

3.1.2 Règles de calcul

Proposition 3.4

Soit n un entier au moins égal à 1. Pour tous entiers relatifs a, b, a', b' si $a \equiv b \bmod n$ et $a' \equiv b' \bmod n$, alors

$$a + a' \equiv b + b' \bmod n \qquad \text{et} \qquad aa' = bb' \bmod n.$$

Par suite, pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons $a^k \equiv b^k \bmod n$.

Démonstration. Nous avons

$$(a + a') - (b + b') = (a - b) + (a' - b') \tag{3.1}$$

et

$$aa' - bb' = (a - b)a' + b(a' - b') \tag{3.2}$$

Suppsons que $a \equiv b \bmod n$ et $a' \equiv b' \bmod n$. Alors $a-b$ et $a'-b'$ sont multiples de n. Il en résulte que la somme $(a-b)+(a'-b')$ est multiple de n ; d'après (3.1) nous avons $(a+a') \equiv (b+b') \bmod n$.

De même $(a-b)a'$ et $b(a'-b')$ sont multiples de n ; ainsi par (3.2) nous obtenons $aa' \equiv bb' \bmod n$. □

Exemple 33. Calculons $5^k+1 \bmod 6$.

Puisque $5 \equiv -1 \bmod 6$, nous avons $5^k \equiv (-1)^k \bmod 6$.

- ◇ Si k est pair, alors $(-1)^k = 1$ donc $5^k+1 \equiv 2 \bmod 6$.
- ◇ Si k est impair, alors $(-1)^k = -1$ donc $5^k+1 \equiv 0 \bmod 6$.

Ainsi, pour tout entier k positif et impair, 5^k+1 est multiple de 6.

Proposition 3.5

Soit p un nombre premier.
Pour tout entier k tel que $0 < k < p$, nous avons $\binom{p}{k} \equiv 0 \bmod p$.

Théorème 3.6: (Théorème de Fermat)

Soit p un nombre premier. Pour tout entier $a \in \mathbb{Z}$, nous avons $a^p \equiv a \bmod p$.

Démonstration. Commençons par le cas $a \geq 0$ et raisonnons par récurrence.

Si $a = 0$, alors la formule est vraie.

Supposons que a soit un entier positif tel que $a^p \equiv a \bmod p$. La formule du binôme assure que

$$(a+1)^p = a^p + \binom{p}{1}a^{p-1} + \binom{p}{2}a^{p-2} + \ldots + \binom{p}{k}a^{p-k} + \ldots + \binom{p}{p-1}a + 1.$$

La Proposition 3.5 assure que les coefficients $\binom{p}{1}$, $\binom{p}{2}$, …, $\binom{p}{p-1}$ sont tous congrus à 0 modulo p ; par suite

$$(a+1)^p \equiv a^p + 1 \bmod p.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, nous en déduisons que $(a+1)^p \equiv a+1 \bmod p$. La formule est donc vraie quel que soit l'entier $a \geq 0$.

Supposons que a soit un entier négatif tel que $a^p \equiv a \bmod p$. D'après ce qui précède nous avons

$$(-1)^p a^p = (-a)^p \equiv -a \bmod p.$$

Si $p > 2$, alors p est impair donc $(-1)^p = -1$ et par conséquent $a^p \equiv a \bmod p$. Si $p = 2$, alors $(-1)^2 a^2 \equiv a^2 \bmod 2$ et $-1 \equiv 1 \bmod 2$. Il en résulte que $-a \equiv a \bmod 2$, d'où $a^2 \equiv a \bmod 2$. □

Corollaire 3.7

Soit p un nombre premier. Pour tout entier $a \in \mathbb{Z}$ non multiple de p, nous avons $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$.

Démonstration. Le Théorème de Fermat (Théorème 3.6) assure que $a^p \equiv a \bmod p$, autrement dit p divise $a^p - a = a(a^{p-1} - 1)$. Si p ne divise pas a, alors d'après le théorème de Gauss (Théorème 1.15) p divise $a^{p-1} - 1$ d'où $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$. □

Exemple 34. Calculons $666^{999} \bmod 13$.

Il s'agit de trouver l'entier $r \in \{0, 1, \ldots, 12\}$ tel que $666^{999} \equiv r \bmod 13$.

Nous avons : $666 = 13 \times 51 + 3$; par suite $666 \equiv 3 \bmod 13$.

Nous en déduisons que $666^{999} \equiv 3^{999} \bmod 13$.

Le Corollaire 3.7 assure que $3^{12} \equiv 1 \bmod 13$. Effectuons la division euclidienne de 999 par 12 : $999 = 12 \times 83 + 3$. Il vient

$$3^{999} = 3^{12\times 83+3} = 3^{12\times 83} \times 3^3 = (3^{12})^{83} \times 3^3 \equiv 1^{83} \times 3^3 \equiv 27 \equiv 1 \bmod 13.$$

Il en résulte que $666^{999} \equiv 1 \bmod 13$.

3.1.3 Résolution d'équations

Équation $ax \equiv b \bmod n$

Soit n un entier au moins égal à 2.

Proposition 3.8

Pour tout entier $a \in \mathbb{Z}$ premier à n, il existe un entier $a' \in \mathbb{Z}$ tel que $aa' \equiv 1 \bmod n$.

Démonstration. Soit a un entier premier à n. Le théorème de Bézout assure l'existence de deux entiers a', $n' \in \mathbb{Z}$ tels que $aa' + nn' = 1$. L'entier $aa' - 1$ est multiple de n, il s'en suit que $aa' \equiv 1 \bmod n$. □

Remarque 3. Pour trouver a', il suffit de chercher une relation de Bézout entre a et n.

Résolution de l'équation. Soit a un entier premier à n. Pour résoudre l'équation $ax \equiv b \bmod n$, nous multiplions par a' ce qui donne $x \equiv a'b \bmod n$. Nous avons bien trouvé les solutions car $a(a'b) = (aa')b \equiv b \bmod n$.

Exemple 35. Trouvons les entiers x tels que $7x + 11$ soit multiple de 36. Un entier x est solution si et seulement si $7x \equiv -11 \bmod 36$. Nous avons la relation de Bézout $1 \times 36 - 7 \times 5 = 1$ et la congruence $(-5) \times 7 \equiv 1 \bmod 36$. Les solutions sont les entiers x tels que $x \equiv (-5) \times (-11) = 55 \bmod 36$, c'est-à-dire $x \equiv 19 \bmod 36$.

Système d'équations ($x \equiv a \bmod n$, $x \equiv b \bmod p$)

Soient n et p des entiers premiers entre eux.

Nous cherchons les entiers $x \in \mathbb{Z}$ qui sont congrus à a modulo n et à b modulo p.

◇ *Calcul d'une solution.*

Nous écrivons une relation de Bézout entre n et p :

$$nu + pv = 1 \text{ avec } u, v \in \mathbb{Z}.$$

Posons $\alpha = pv$ et $\beta = nu$. Nous avons alors

$$\alpha \equiv \begin{cases} 1 \bmod n \\ 0 \bmod p \end{cases} \qquad \beta \equiv \begin{cases} 0 \bmod n \\ 1 \bmod p \end{cases}$$

Nous en déduisons que

$$\alpha a \equiv \begin{cases} a \bmod n \\ 0 \bmod p \end{cases} \qquad \beta b \equiv \begin{cases} 0 \bmod n \\ b \bmod p \end{cases}$$

Ainsi l'entier $x_0 = \alpha a + \beta p$ est une solution du système d'équations.

◇ *Calcul de toutes les solutions.*
Pour tout entier $x \in \mathbb{Z}$ nous avons les équivalences

$$\begin{cases} x \equiv a \bmod n \\ x \equiv b \bmod p \end{cases} \iff x \equiv x_0 \bmod n \text{ et } x \equiv x_0 \bmod p$$
$$\iff x - x_0 \text{ est multiple de } n \text{ et de } p$$
$$\iff x - x_0 \text{ est multiple de } np$$

car n et p étant premiers entre eux, nous avons $\text{ppcm}(n,p) = np$. Les solutions sont donc les entiers x de la forme $x_0 + knp$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 36. Trouver les entiers x tels que

$$\begin{cases} x \equiv 3 \bmod 8 \\ x \equiv 2 \bmod 21 \end{cases}$$

◇ *Calcul d'une solution.*
Nous avons la relation de Bézout $8 \times 8 - 21 \times 3 = 1$ et les congruences

$$-63 \equiv \begin{cases} 1 \bmod 8 \\ 0 \bmod 21 \end{cases} \quad \text{et} \quad 64 \equiv \begin{cases} 0 \bmod 8 \\ 1 \bmod 21 \end{cases}$$

L'entier $x_0 = -63 \times 3 + 64 \times 2 = -61$ est donc solution.

◇ *Calcul de toutes les solutions.*
Pour qu'un entier x soit solution il faut et il suffit que x soit congru à -61 modulo 8 et modulo 21, c'est-à-dire que $x + 61$ soit multiple de 8 et de 21. Puisque $\text{ppcm}(8,21) = 8 \times 21 = 168$, les solutions sont les entiers de la forme $-61 + 168k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

3.2 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Nous nous proposons dans ce paragraphe de remplacer l'écriture $a \equiv b \bmod n$ par l'écriture équivalente $\overline{a} = \overline{b}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Définition 3.9

Soit $n \geq 1$ un entier. Nous appelons $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble quotient de $\mathbb{Z}$ par la relation d'équivalence « est congru à » (modulo n).

Exemple 37. Pour $n = 2$, soit a un entier. Si a est pair, alors $\overline{a}$ pour la relation de congruence modulo 2 est l'ensemble P de tous les nombres pairs. Si a est impair, alors $\overline{a}$ est l'ensemble I de tous les nombres impairs. Finalement $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{I, P\}$.

Proposition 3.10

Pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ possède n éléments.

Démonstration. Cet énoncé découle du Corollaire 3.3. □

La Proposition 3.4 conduit à :

Définitions 3.11

Soient $\overline{a}$ et $\overline{b}$ deux éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Nous définissons
- ◇ la somme de $\overline{a}$ et $\overline{b}$ par $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b}$
- ◇ et leur produit $\overline{a}\,\overline{b} = \overline{ab}$.