

GÉOMÉTRIE AFFINE

Table des matières

1	Espaces affines	4
2	Géométrie affine	13

La notion de point est introduite tôt, puis vient celle de vecteur joignant deux points donnés. Lorsqu'on établit proprement les fondements de la géométrie, il s'avère plus simple d'inverser le processus : on introduit tout d'abord les vecteurs, ou plus exactement les espaces vectoriels dont les éléments sont appelés vecteurs ; on ne définit qu'ensuite les espaces affines, dont les éléments sont appelés points, et dans lesquels deux points définissent un vecteur au sens des espaces vectoriels.

Les espaces affines

C'est à ces espaces affines, qui sont donc plus proches de l'intuition première que les espaces vectoriels, que nous nous intéresserons pour commencer. Leur définition consiste essentiellement à prendre comme axiomes les propriétés usuelles des vecteurs définis par deux points, comme par exemple la relation de Chasles.

Nous verrons aussi qu'ils ne sont pas si éloignés que ça des espaces vectoriels. Plus précisément, une fois donné un espace affine E , on peut, en choisissant un point O de E , voir de façon naturelle E comme un espace vectoriel dont l'origine est O . Le point crucial est que O peut être choisi arbitrairement : contrairement à un espace vectoriel dans lequel l'origine jouit de propriétés spécifiques (c'est l'élément neutre de l'addition), un espace affine ne possède a priori aucun point privilégié. Tous jouent le même rôle et ce n'est qu'occasionnellement, pour des besoins précis (calculatoires ou géométriques) que l'on choisit d'en distinguer un, adapté à la situation considérée, en en lui conférant le statut d'origine. Notons que cela est tout à fait cohérent avec l'intuition que nous pouvons avoir de notre espace ambiant : s'il peut être commode, dans certains cas, d'en fixer une origine, il n'y a aucun point qui semble prédestiné à ce rôle.

L'exemple typique d'espace affine est le suivant : on se donne un espace vectoriel E , un sous-espace vectoriel F de E , un vecteur v de E . Soit \mathcal{F} le translaté $F + v$ de F par v , c'est-à-dire l'ensemble $\{f + v \mid f \in F\} \subset E$; il admet une structure naturelle d'espace affine (notons que si v n'appartient pas à F , c'est-à-dire si $\mathcal{F} \neq F$, alors \mathcal{F} n'est pas un sous-espace vectoriel de E , car il ne contient pas l'origine). L'application $f \mapsto f - v$ permet d'identifier \mathcal{F} à l'espace vectoriel F (avec v qui correspond à l'origine). Mais ce n'est pas la seule : si w est un vecteur de la forme $v + f$ avec $f \in F$ alors \mathcal{F} est aussi égal à $F + w$, et l'on peut donc également identifier \mathcal{F} à F par l'application $f \mapsto f - w$; c'est

cette fois-ci w qui correspond à l'origine. Si v n'appartient pas à F il n'y a pas de vecteur privilégié parmi ceux qui sont de la forme $v + f$ avec $f \in F$, et il n'y a donc pas, parmi les différentes façons d'identifier \mathcal{F} à F que nous avons décrites (qui sont associées à différents choix d'origine) une qui soit meilleure, ou plus naturelle, que les autres ; on retrouve bien le phénomène évoqué ci-dessus.

Les formules de la géométrie affine

Venons-en à l'aspect calculatoire de la théorie. En algèbre linéaire, les formules (équations des sous-espaces vectoriels, description des applications linéaires...) sont pour l'essentiel des formules linéaires en les coordonnées, c'est-à-dire de la forme $\sum a_i x_i$, sans terme constant : c'est encore une manifestation du rôle particulier de l'origine, qui appartient à tous les sous-espaces vectoriels, est envoyée sur l'origine par toute application linéaire, etc. Puisqu'en géométrie affine ce privilège est abrogé, nous devons travailler avec des formules affines en les coordonnées, c'est-à-dire de la forme $\sum a_i x_i + b$. La présence de ce terme constant complique parfois les choses – et c'est, en un sens, la raison technique pour laquelle nous étudions les espaces vectoriels avant les espaces affines.

Sous-espaces affines, applications affines

Les sous-espaces vectoriels et les applications linéaires ont leurs pendants en géométrie affine - ce sont les sous-espaces affines et les applications affines, que nous étudierons. De nouveaux phénomènes apparaissent, toujours et encore liés à l'absence de point privilégié :

- ◇ l'intersection de deux sous-espaces affines peut très bien être vide (par exemple l'intersection de deux droites parallèles dans le plan est vide, ou encore l'intersection d'un plan et une droite parallèles dans l'espace), alors que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels contient toujours l'origine ;
- ◇ une application affine peut très bien ne pas avoir de point fixe (par exemple une translation n'a pas de point fixe, ou encore la composée d'une rotation autour d'un axe et d'une translation parallèle à l'axe en question n'a pas de point fixe), alors qu'une application linéaire fixe toujours l'origine.

Les barycentres et les coordonnées barycentriques

Nous aborderons ensuite la notion de barycentre et à laquelle on peut plus ou moins penser comme à un analogue affine de la notion de combinaison linéaire. Elle débouchera sur le calcul en coordonnées barycentriques. Celui-ci présente à première vue un avantage par rapport au calcul en coordonnées cartésiennes (on y manipule pour l'essentiel des formules sans terme constant) et un inconvénient (il y a une variable de plus : par exemple, on doit manipuler trois coordonnées barycentriques lorsqu'on travaille dans le plan). On se rend compte à la pratique qu'il possède également deux atouts spécifiques, qui justifient son introduction :

- ◇ il permet d'exploiter la symétrie de certaines situations ; ainsi, si on travaille avec un triangle (ABC) , les trois points A , B et C jouent le même rôle ; si on décide (par exemple) de travailler dans le repère cartésien $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, cette symétrie est rompue puisque A est privilégié, alors qu'elle est préservée si on travaille en coordonnées barycentriques dans le repère (A, B, C) ; aussi ce dernier point de vue conduira-t-il souvent à des calculs plus simples et des formules plus élégantes ;

- ◇ il permet de mettre en évidence l'analogie entre certains phénomènes, et de les aborder de manière unifiée : il traite par exemple exactement de la même manière les triplets de droites parallèles et les triplets de droites concourantes dans le plan (ce qui traduit le fait, auquel on pourrait donner un sens mathématique rigoureux, que trois droites parallèles sont concourantes à l'infini).

Les espaces affines euclidiens

Les notions évoquées jusqu'à maintenant (espaces affines, sous-espaces affines, applications affines, barycentres), ne font finalement appel qu'aux quatre opérations, ce qui permet de leur donner un sens sur un corps quelconque.

Nous pouvons aussi aborder des concepts qui requièrent quant à eux de travailler sur le corps des nombres réels. Plus précisément, nous nous intéressons aux espaces affines sur \mathbb{R} dont l'espace vectoriel sous-jacent est euclidien, c'est-à-dire de dimension finie et muni d'un produit scalaire ; c'est ce qu'on appelle les espaces affines euclidiens.

Dans un espace affine euclidien, on sait définir la distance entre deux points, puis les applications affines qui conservent les distances ; ce sont les isométries affines. On sait aussi dire ce que sont l'angle entre deux vecteurs (ou deux droites) et sa mesure (ces notions n'ont rien de spécifiquement affine, existent déjà dans les espaces vectoriels euclidiens et c'est à leur propos que nous y reviendrons), mais on se heurte à leur sujet à deux difficultés :

- ◇ la première, c'est que les définir rigoureusement est délicat ;
- ◇ la seconde est liée aux problèmes d'orientation, qui correspondent à des subtilités de la « vraie vie ». Par exemple, on peut essayer de répondre aux questions suivantes :
 - i) Si deux roues tournent dans un même plan, cela a-t-il un sens de demander si elles tournent toutes deux dans le même sens ?
 - ii) Si deux roues tournent dans l'espace (en position arbitraire l'une par rapport à l'autre), cela a-t-il un sens de demander si elles tournent toutes deux dans le même sens ?

1 Espaces affines

1.1 Structure d'espace affine

Définitions 1.1

Soit $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Un \mathbb{k} -espace vectoriel affine est la donnée

1. d'un ensemble de points $X \neq \emptyset$,
2. d'un \mathbb{k} -espace vectoriel E ,
3. et d'une application $X \times X \rightarrow E$, $(A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}$ qui vérifie :
 - 3.a) la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ pour tous $A, B, C \in X$;
 - 3.b) pour tout $A \in X$, pour tout $\vec{u} \in E$, il existe un unique $B \in X$ tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.
Nous noterons $B := A + \vec{u}$ l'unique $B \in X$ tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, de sorte que $B = A + \overrightarrow{AB}$.

Les éléments de X sont appelés des *points* et ceux de E des *vecteurs*.

Nous dirons que X est un *espace affine* et que E est la *direction* de cet espace affine.

- Remarques 1.* \diamond Nous notons comme indiqué $B = A + \overrightarrow{AB}$ ou encore $B - A = \overrightarrow{AB}$.
 \diamond La condition 3.b) équivaut à : pour tout $A \in X$ l'application $B \in X \mapsto \overrightarrow{AB} \in E$ est bijective.

Proposition-Définition 1.1

Soit X un espace affine de direction E . Alors pour tous $A, B, C, D \in X$ nous avons

1. $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ si et seulement si $A = B$;
2. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$;
3. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$: *identité du parallélogramme*.

- Démonstration.* 1. Pour tous $A, B \in X$, nous avons par Chasles $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB}$, soit $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$. Ainsi $A = B$ entraîne $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.
Réciproquement, si $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$; la propriété 3.b. de la Définition 1.1 assure que $A = B$ ($A = X$ vérifie $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ donc A est l'unique élément B de X tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$).
2. D'après la relation de Chasles nous avons $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$; or $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.
3. Grâce à la relation de Chasles nous réécrivons l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ sous la forme $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}$ ou encore $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
Réciproquement, la relation de Chasles assure que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ se réécrit $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$ soit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. □

Exemple 1. L'ensemble $X = \mathbb{R}^2$ est un espace affine dirigé par l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$ une fois muni de l'application

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)) \mapsto \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A).$$

Exemple 2. Plus généralement, $X = \mathbb{R}^n$ est un espace dirigé par l'espace vectoriel \mathbb{R}^n une fois muni de l'application

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad ((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) \mapsto (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n).$$

Exemple 3. Encore plus généralement, si E est un \mathbb{R} -espace vectoriel, alors $X = E$ est un espace affine dirigé par E une fois muni de l'application $E \times E \rightarrow E$, $(x, y) \mapsto y - x$.

Exercice 1. Soit $X = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = 1\}$. Soit E l'espace vectoriel défini par $E = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = 0\}$. Montrer que X est un espace affine de direction E une fois muni de $X \times X \rightarrow E$, $(f, g) \mapsto g - f$.

Définitions 1.2

La *dimension* (finie ou infinie) d'un espace affine X dirigé par le \mathbb{k} -espace vectoriel E est la dimension de E .

Tout espace affine de dimension 1 est appelé *droite affine*.

Tout espace affine de dimension 2 est appelé *plan affine*.

Exemple 4. Un espace affine de dimension 0 est un singleton $\{a\}$ muni de l'application de $\{a\} \times \{a\}$ dans l'espace vectoriel nul $\{0, +, \cdot\}$ définie par $\{a\} \times \{a\} \rightarrow \{0, +, \cdot\}$, $(a, a) \mapsto 0$.

Exemple 5. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, \mathbb{R}^n est un espace affine de dimension n .

Exemple 6. L'ensemble $X = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = 1\}$ est dirigé par $E = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = 0\}$; en particulier, $\dim X = \dim E = +\infty$.

1.2 Barycentres

Théorème-Définition 1.1

Soit X un espace affine dirigé par E . Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(A_1, A_2, \dots, A_n) \in X^n$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{k}^n$ tel que $\sigma = \sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$.

Alors il existe un unique point G dans X tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$ et nous avons

$$\forall O \in X \quad G = O + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i} \quad \iff \quad \forall O \in X \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i}.$$

Cet élément $G \in X$ est appelé le *barycentre* de la famille $((A_1, \lambda_1), (A_2, \lambda_2), \dots, (A_n, \lambda_n))$.

Démonstration. Soit $O \in X$ quelconque. Alors pour tout $M \in X$ nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{MA_i} &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i}) \quad (\text{Chasles}) \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i} \\
&= \sigma \overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i} \\
&= -\sigma \overrightarrow{OM} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i}
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = \vec{0} &\iff -\sigma \overrightarrow{OM} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{0} \\
&\iff \sigma \overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i} \\
&\iff \overrightarrow{OM} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i} \\
&\iff M = O + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i}.
\end{aligned}$$

Il existe donc bien un unique $M = G \in X$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$ et nous avons pour tout $O \in X$

$$G = O + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i}.$$

□

Exemple 7. Soient A et B deux points du plan affine \mathbb{R}^2 . Alors

- ◇ A est le barycentre de la famille $((A, 1), (B, 0))$ et plus généralement de la famille $((A, \lambda), (B, 0))$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$. En effet, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, nous avons d'une part $\lambda + 0 = \lambda \neq 0$, d'autre part $\lambda \overrightarrow{AA} + 0 \overrightarrow{AB} = \vec{0}$; l'unicité évoquée au Théorème-Définition 1.1 permet de conclure.
- ◇ De même, B est le barycentre de $((A, 0), (B, \lambda))$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Exemple 8. Le barycentre de $((A, 1), (B, 1))$ est le milieu du segment $[AB]$. En effet $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ et $1 + 1 = 2 \neq 0$. Il s'agit aussi du barycentre de la famille $((A, \lambda), (B, \lambda))$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$ (car $\lambda \overrightarrow{MA} + \lambda \overrightarrow{MB} = \vec{0}$).

Exemple 9. Plus généralement, nous avons

$$[A, B] = \{A + \lambda \overrightarrow{AB} \mid \lambda \in [0, 1]\} = \{M_\lambda \mid \lambda \in [0, 1]\}$$

où $M_\lambda = A + \lambda \overrightarrow{AB}$. Notons que si M est le milieu de $[A, B]$, alors $M = M_{1/2} = A + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$. Pour tout $\lambda \in [0, 1]$ nous avons

$$M_\lambda = A + \lambda \overrightarrow{AB} = A + (1 - \lambda) \underbrace{\overrightarrow{AA}}_{\vec{0}} + \lambda \overrightarrow{AB} = \frac{1}{(1 - \lambda) + \lambda} \left((1 - \lambda) \overrightarrow{AA} + \lambda \overrightarrow{AB} \right).$$

Autrement dit, M_λ est le barycentre de $((A, 1 - \lambda), (B, \lambda))$; il s'agit du point de $[A, B]$ tel que $\frac{\|\overrightarrow{AM_\lambda}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \lambda$.

Exemple 10. En général pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ avec $\lambda + \mu \neq 0$ le barycentre G de $((A, \lambda), (B, \mu))$ est tel que A, B et G sont alignés. En effet, $\lambda \overrightarrow{GA} + \mu \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ et $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ car $\lambda + \mu \neq 0$; ainsi les vecteurs \overrightarrow{GA} et \overrightarrow{GB} sont colinéaires, *i.e.* les points A, B et G sont alignés.

Définition 1.1

On dit que $(I_1, I_2, \dots, I_\ell)$ est une *partition* de $\{1, 2, \dots, n\}$ si

- ◇ pour tout $1 \leq k \leq n$, nous avons $I_k \neq \emptyset$,
- ◇ pour tout $j \neq k$ nous avons $I_j \cap I_k = \emptyset$,
- ◇ $\bigcup_{k=1}^{\ell} I_k = \{1, 2, \dots, n\}$.

Proposition 1.1: (Associativité des barycentres)

Soit X un espace affine dirigé par E . Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(A_1, A_2, \dots, A_n) \in X^n$ et soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{k}^n$ tel que $\sigma = \sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$.

Soit $(I_1, I_2, \dots, I_\ell)$ une partition de $\{1, 2, \dots, n\}$ telle que

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, \ell\} \quad \sigma_k = \sum_{i \in I_k} \lambda_i \neq 0.$$

Pour $k \in \{1, 2, \dots, \ell\}$ nous désignons par G_k le barycentre de $((A_i, \lambda_i))_{i \in I_k}$.

Alors le barycentre de $((A_1, \lambda_1), (A_2, \lambda_2), \dots, (A_n, \lambda_n))$ est aussi le barycentre de $((G_1, \sigma_1), (G_2, \sigma_2), \dots, (G_\ell, \sigma_\ell))$.

Démonstration. Soit G le barycentre de $((A_1, \lambda_1), (A_2, \lambda_2), \dots, (A_n, \lambda_n))$. Alors

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \sum_{k=1}^{\ell} \left(\underbrace{\sum_{i \in I_k} \lambda_i \overrightarrow{GA_i}}_{\sigma_k \overrightarrow{GG_k}} \right) = \sum_{k=1}^{\ell} \sigma_k \overrightarrow{GG_k}$$

i.e. G est le barycentre de $((G_1, \sigma_1), (G_2, \sigma_2), \dots, (G_\ell, \sigma_\ell))$. □

Application. Soit ABC un triangle de plan affine \mathbb{R}^2 . Le barycentre G de $((A, 1), (B, 1), (C, 1))$ est appelé le *centre de gravité* du triangle ABC . Il se trouve à l'intersection des trois médianes qui sont donc concourantes. Définissons en effet

$$A' = \text{bar}((B, 1), (C, 1)), \quad B' = \text{bar}((A, 1), (C, 1)), \quad C' = \text{bar}((A, 1), (B, 1)).$$

Ainsi A' est le milieu de $[B, C]$, B' est le milieu de $[A, C]$, C' est le milieu de $[A, B]$. La propriété (Proposition 1.1) assure que

- ◇ G est le barycentre de $((A, 1), (A', 2))$ donc G appartient à (AA') la médiane issue de A ;
- ◇ G est le barycentre de $((B, 1), (B', 2))$ donc G appartient à (BB') la médiane issue de B ;
- ◇ G est le barycentre de $((C, 1), (C', 2))$ donc G appartient à (CC') la médiane issue de C .

En particulier, les trois médianes se rencontrent en G . De plus, nous avons

$$\frac{\|\vec{AG}\|}{\|\vec{AA'}\|} = \frac{\|\vec{BG}\|}{\|\vec{BB'}\|} = \frac{\|\vec{CG}\|}{\|\vec{CC'}\|} = \frac{2}{3}$$

en effet à partir de $\vec{GA} + 2\vec{GA'} = \vec{0}$ nous obtenons $\vec{GA} + 2\vec{GA} + 2\vec{AA'} = \vec{0}$, soit $3\vec{AG} = 2\vec{AA'}$, ou encore $\frac{\|\vec{AG}\|}{\|\vec{AA'}\|} = \frac{2}{3}$.

1.3 Sous-espaces affines

Définition 1.2

Soit X un espace affine dirigé par E . Soit $Y \subset X$. On dit que Y est un *sous-espace affine* de X s'il existe un sous-espace vectoriel F de E tel que Y est un sous-espace affine de direction F muni de l'application

$$Y \times Y \xrightarrow{f} E, \quad (A, B) \mapsto \vec{AB}.$$

Autrement dit cela signifie que $Y \neq \emptyset$ et

1. $\forall (A, B) \in Y^2 \vec{AB} \in F$ (*i.e.* l'image de l'application f est F et pas E) ;
2. $\forall A \in Y, \forall \vec{u} \in F, A + \vec{u} \in Y$.

Remarque 1. Soit Y un sous-espace affine de X dirigé par $F \subset E$. Alors

$$\forall A \in Y \quad \forall \vec{u} \in F \quad A + \vec{u} \in Y.$$

En effet, la Définition 1.2 assure que

- ◇ \vec{AB} appartient à F pour tout $B \in Y$ ce qui conduit à $B = A + \vec{AB}$ appartient à $A + F$ pour tout $B \in Y$, c'est-à-dire $Y \subset A + F$.
- ◇ $A + \vec{u}$ appartient à Y pour tout $\vec{u} \in F$. Nous en déduisons que $A + F \subset Y$.

Remarque 2. Réciproquement, soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E et soit $A \in X$; alors $Y = A + F$ est un sous-espace affine de X dirigé par F .

En effet

- ◇ $Y \neq \emptyset$ puisque $A = A + \vec{0}$ appartient à $A + F$.
- ◇ Soit (B, C) un élément de $Y \times Y$. Il existe \vec{u} et \vec{v} dans F tels que $B = A + \vec{u}$ et $C = A + \vec{v}$. Cela signifie que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. En particulier $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ appartiennent à F . Ainsi comme F est un sous-espace vectoriel de E , nous avons :

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

appartient à F .

- ◇ Soit B un élément de $Y = A + F$ et soit \vec{u} un élément de F . Alors

$$B + \vec{u} = B + (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}) + \vec{u} = B + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}) + \vec{u}$$

Exemple 11. Les points et les droites sont des sous-espaces affines du plan affine \mathbb{R}^2 .

Notation. Soit X un espace affine. Soit Y un sous-espace affine de X . Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans Y^n . Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{k}^n$ tel que $\sigma = \sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$. Nous désignerons par

$$\text{bar}((A_1, \lambda_1), (A_2, \lambda_2), \dots, (A_n, \lambda_n))$$

le barycentre de la famille $((A_i, \lambda_i))_{1 \leq i \leq n}$.

Proposition 1.2: (Stabilité par barycentre)

Soit X un espace affine. Soit Y un sous-espace affine de X . Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans Y^n .

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{k}^n$ tel que $\sigma = \sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$.

Alors $G = \text{bar}((A_1, \lambda_1), (A_2, \lambda_2), \dots, (A_n, \lambda_n))$ appartient à Y .

Démonstration. Soit E l'espace vectoriel dirigeant X . Soit F le sous-espace vectoriel de E dirigeant Y . Soit $A \in Y (\neq \emptyset)$. Par définition de G nous avons

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{AA_i}.$$

Puisque A et les A_i appartiennent à Y , $\overrightarrow{AA_i}$ appartient à F . Comme F est un sous-espace vectoriel de E , \overrightarrow{AG} appartient à F . Il en résulte que $G = A + \overrightarrow{AG}$ appartient à $A + F$. Or pour tout $A \in Y$, $Y = A + F$ donc G appartient à Y . \square

Définition 1.3

Soit X un espace affine. Soient Y_1 et Y_2 deux sous-espaces affines de X dirigés respectivement par F_1, F_2 .

- ◇ Y_1 est (faiblement) parallèle à Y_2 si $F_1 \subset F_2$;
- ◇ Y_1 et Y_2 sont (fortement) parallèles si $F_1 = F_2$.

Théorème 1.1: (5ème postulat d'Euclide)

Soit X un espace affine dirigé par E . Soit $A \in X$. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Alors $Y := A + F$ est l'unique sous-espace affine de X dirigé par F et passant par A .

Démonstration. Notons que $A + F$ est un sous-espace affine de X dirigé par F et contenant A (en effet $A = A + \vec{0}$ appartient à $A + F$).

Finalement montrons l'unicité. Soit X' un sous-espace affine de X de direction F tel que $A \in X'$. La Remarque 2 assure que $X' = A + F$. \square

Remarque 3. Mentionnons le cas particulier suivant : dans le plan affine \mathbb{R}^2 étant donné un point A et une droite \mathcal{D} il existe une unique droite passant par A et parallèle à \mathcal{D} : c'est $A + F$ où $F \subset \mathbb{R}^2$ est le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 dirigeant \mathcal{D} .

Proposition 1.3

Soit X un espace affine dirigé par E . Soient Y_1, Y_2 deux sous-espaces affines de X . Si Y_1 est faiblement parallèle à Y_2 , alors

- ◊ ou bien $Y_1 \subset Y_2$;
- ◊ ou bien $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$.

Démonstration. Soit F_1 , resp. F_2 la direction de Y_1 , resp. Y_2 . Par hypothèse $F_1 \subset F_2$. Supposons que $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$. Soit alors $A \in Y_1 \cap Y_2$. Nous avons

$$Y_1 = A + F_1 = \{A + \vec{u} \mid \vec{u} \in F_1\} \stackrel{F_1 \subset F_2}{\subset} \{A + \vec{v} \mid \vec{v} \in F_2\} = A + F_2 = Y_2.$$

\square

Corollaire 1.1

Deux sous-espaces affines fortement parallèles sont soit égaux, soit disjoints.

Démonstration. Soit X un espace affine dirigé par E . Soient Y_1 et Y_2 deux sous-espaces affines fortement parallèles de direction respectives F_1, F_2 . Par hypothèse $F_1 = F_2$.

Supposons que $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$. La Proposition 1.3 assure

- ◊ d'une part que Y_1 étant faiblement parallèle à Y_2 , $Y_1 \subset Y_2$;
- ◊ d'autre part que comme Y_2 est faiblement parallèle à Y_1 , $Y_2 \subset Y_1$.

Il en résulte que $Y_1 = Y_2$. \square

Remarque 4. Contrairement aux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E l'intersection de deux sous-espaces affines d'un même espace affine X peut être vide. Par exemple dans \mathbb{R}^2 l'intersection de deux droites parallèles non confondues est vide.

Théorème 1.2: Intersection d'espaces affines

Soit X un espace affine dirigé par E . Soit Y_1 (resp. Y_2) un sous-espace affine de X dirigé par F_1 (resp. F_2). Alors

- i) \diamond ou bien $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$,
 \diamond ou bien $Y_1 \cap Y_2$ est un sous-espace affine de X de direction $F_1 \cap F_2$.
- ii) Si, de plus $F_1 + F_2 = E$, alors $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$. En particulier, si $F_1 \oplus F_2 = E$, *i.e.* si $F_1 + F_2 = E$ et $F_1 \cap F_2 = \{0\}$, alors $Y_1 \cap Y_2$ est un singleton (car $Y_1 \cap Y_2$ est dirigé par $\{0\}$).

Exemple 12. L'intersection de deux droites non parallèles de \mathbb{R}^2 est un point ! Leurs directions F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^2 de dimension 1 distincts donc supplémentaires dans \mathbb{R}^2 (c'est-à-dire nous sommes dans le second cas de l'assertion ii)).

Démonstration. i) Supposons que $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$. Soit $A \in Y_1 \cap Y_2$. Alors :

- $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E et pour tout $\vec{u} \in F_1 \cap F_2$ d'une part $\vec{u} \in F_1$ et $A + \vec{u} \in Y_1$, d'autre part $\vec{u} \in F_2$ et $A + \vec{u} \in Y_2$. Par conséquent $A + F_1 \cap F_2 \subset Y_1 \cap Y_2$.
 - Pour tout $B \in Y_1 \cap Y_2$ nous avons d'une part A, B appartiennent à Y_1 et \overrightarrow{AB} appartient à F_1 , d'autre part A, B appartiennent à Y_2 et \overrightarrow{AB} appartient à F_2 . Il s'en suit que $B = A + \overrightarrow{AB}$ appartient à $A + F_1 \cap F_2$ et que $Y_1 \cap Y_2 \subset A + F_1 \cap F_2$. Finalement $Y_1 \cap Y_2 = A + F_1 \cap F_2$ est un espace affine dirigé par $F_1 \cap F_2$.
- ii) Supposons de plus que $F_1 + F_2 = E$ et montrons que $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$. Soient $A \in Y_1$ et $B \in Y_2$, alors

$$Y_1 = A + F_1 = \{A + \vec{u} \mid \vec{u} \in F_1\}, \quad Y_2 = B + F_2 = \{B + \vec{v} \mid \vec{v} \in F_2\}.$$

Par suite $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$ si et seulement si il existe $u \in F_1, v \in F_2$ tels que $A + \vec{u} = \underbrace{B}_{A + \overrightarrow{AB}} + \vec{v}$ si et seulement si il existe $u \in F_1, v \in F_2$ tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u} - \vec{v}$ si et seulement si $\overrightarrow{AB} \in F_1 + F_2$. Puisque $F_1 + F_2 = E$, \overrightarrow{AB} appartient à $F_1 + F_2$ d'où $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$. □

1.4 Applications affines

Définitions 1.3

Soient X et Y deux espaces affines dirigés par E et F .

- \diamond Une application $f: X \rightarrow Y$ est dite *affine* s'il existe une application linéaire $\vec{f}: E \rightarrow F$ telle que

$$\forall A, B \in X \quad \overrightarrow{f(A)f(B)} = \vec{f}(\overrightarrow{AB}) \in F.$$

- \diamond L'application linéaire \vec{f} s'appelle la *partie linéaire* de f .

Exemple 13. Soient X et Y deux espaces affines de direction E et F respectivement. Les applications $f: X \rightarrow Y$ constantes sont les applications affines de partie linéaire nulle. En effet, si f est constante, il existe $M \in Y$ tel que $f(A) = M$ pour tout $A \in X$. Alors pour tous A, B dans X nous avons

$$\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{MM} = \vec{0}_F = 0_{E \rightarrow F}(\overrightarrow{AB}).$$

Ainsi si f est constante, alors f est affine et $\vec{f} = 0_{E \rightarrow F}$.

Réciproquement, soit f une fonction affine telle que $\vec{f} = 0_{E \rightarrow F}$. Alors pour tous A, B dans X nous avons $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \vec{0}_F$. Autrement dit pour tous A, B dans X nous avons $f(A) = f(B)$: f est constante.

Exemple 14. Pour tout $\vec{u} \in E$ on définit la translation $t_{\vec{u}}: X \rightarrow X$ de vecteur \vec{u} par : $t_{\vec{u}}(A) = A + \vec{u}$ pour tout $A \in X$. Alors $t_{\vec{u}}$ est affine et $\vec{t_{\vec{u}}} = \text{id}_E$. En effet, pour tous A, B dans X nous avons

$$\overrightarrow{t_{\vec{u}}(A)t_{\vec{u}}(B)} = \overrightarrow{A + \vec{u} \quad B + \vec{u}} = \overrightarrow{AB}$$

(car $B + \vec{u} = A + \overrightarrow{AB} + \vec{u} = (A + \vec{u}) + \overrightarrow{AB} = \text{id}_E(\overrightarrow{AB})$).

Exemple 15. De plus $\{f: X \rightarrow X \mid f \text{ affine de partie linéaire } \text{id}_E\} = \{t_{\vec{u}} \mid \vec{u} \in E\}$. En effet, d'après l'Exemple 14 nous avons l'inclusion

$$\{t_{\vec{u}} \mid \vec{u} \in E\} \subset \{f: X \rightarrow X \mid f \text{ affine de partie linéaire } \text{id}_E\}.$$

Nous nous intéressons maintenant à l'inclusion réciproque à savoir

$$\{f: X \rightarrow X \mid f \text{ affine de partie linéaire } \text{id}_E\} \subset \{t_{\vec{u}} \mid \vec{u} \in E\}.$$

Soit f une fonction affine de partie linéaire id_E . Montrons qu'il existe $\vec{u} \in E$ tel que $f = t_{\vec{u}}$. Soit $O \in X$; alors pour tout $A \in X$ nous avons

$$\begin{aligned} f(A) &= f(O) + \overrightarrow{f(O)f(A)} = f(O) + \vec{f}(\overrightarrow{OA}) = f(O) + \text{id}_E(\overrightarrow{OA}) = f(O) + \overrightarrow{OA} \\ &= f(O) + \overrightarrow{Of(O)} + \overrightarrow{f(O)A} = f(O) + \overrightarrow{f(O)A} + \overrightarrow{Of(O)} = A + \overrightarrow{Of(O)}. \end{aligned}$$

En posant $\vec{u} = \overrightarrow{Of(O)}$ nous obtenons : pour tout $A \in X$ nous avons $f(A) = A + \vec{u}$, soit $f = t_{\vec{u}} = t_{\overrightarrow{Of(O)}}$.

Exemple 16. Pour tout $A \in X$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$ nous définissons l'homothétie de centre A et de rapport λ par

$$h_{A,\lambda}: X \rightarrow X, \quad B \mapsto A + \lambda \overrightarrow{AB}.$$

Alors $h_{A,\lambda}$ est une application affine de direction λid_E . En effet, pour tous $B, C \in X$ nous avons

$$\overrightarrow{h_{A,\lambda}(B)h_{A,\lambda}(C)} = \overrightarrow{A + \lambda \overrightarrow{AB} \quad A + \lambda \overrightarrow{AC}} = \lambda(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \lambda \overrightarrow{BC} = \lambda \text{id}_E(\overrightarrow{BC})$$

Exemple 17. Si $f: X \rightarrow Y$ est une application affine, alors

$$\exists A \in X \quad \forall M \in X \quad f(M) = f(A) + \overrightarrow{f(A)f(M)} = f(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM}).$$

Réciproquement, si $f: X \rightarrow Y$ est telle que

$$\exists A \in X \quad \exists B \in Y \quad \exists L: E \rightarrow F \text{ linéaire telle que } \forall M \in X \quad f(M) = B + L(\overrightarrow{AM})$$

alors f est affine, $\overrightarrow{f} = L$ et $f(A) = B$. En effet pour tous $M, N \in X$ nous avons

$$f(N) = B + L(\overrightarrow{AN}) = \underbrace{B + L(\overrightarrow{AM})}_{f(M)} + L(\overrightarrow{MN})$$

d'où $\overrightarrow{f(M)f(N)} = L(\overrightarrow{MN})$. Ainsi f est affine, $\overrightarrow{f} = L$ et $f(A) = B + L(\overrightarrow{0}_E) = B$. Par suite l'application $f: X \rightarrow Y$ est affine si et seulement s'il existe $A \in X, B \in Y, L$ linéaire telle que

$$\forall M \in X \quad f(M) = B + L(\overrightarrow{AM})$$

(et alors $\overrightarrow{f} = L$).

Conséquences. Soit $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Soit $f: \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}$. Alors f est affine si et seulement s'il existe $L: \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}$ linéaire telle que pour tout $x \in \mathbb{k}$

$$f(x) = f(0) + L(x - 0).$$

Or $L: \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}$ est linéaire si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{k}$ tel que $L(x - 0) = L(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{k}$. Ainsi $f: \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}$ est affine si et seulement s'il existe $(a, b) \in \mathbb{k}^2$ tel que $f(x) = ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{k}$.

2 Géométrie affine

Dans ce paragraphe les espaces affines considérés sont de dimension finie.

2.1 Repères

Dans un espace affine on ne parle pas de base mais de repère; ces derniers sont définis comme suit :

Définitions 2.1

Soit X un espace affine de dimension finie dirigé par E . On appelle *repère affine* (ou *repère cartésien*) de X tout couple (O, \mathcal{B}) où

- ◇ O est un point de X appelé *origine*,
- ◇ \mathcal{B} est une base de E .

Si X est un espace affine de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, i.e. si E est un espace vectoriel de dimension n , un repère de X est donc constitué d'un point de X , l'origine, et de n vecteurs de E qui forment une base de E .

Soit $(O; (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n))$ un tel repère. Alors pour tout $M \in X$ il existe un unique n -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{k}^n$ tel que $\overrightarrow{OM} \underset{\in E}{=} x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + \dots + x_n \vec{u}_n$. Comme $M = O + \overrightarrow{OM}$ cela signifie encore que pour tout $M \in X$ il existe un unique n -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{k}^n$ tel que $M = O + x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + \dots + x_n \vec{u}_n$.

Définition 2.1

Les scalaires x_1, x_2, \dots, x_n à savoir les coordonnées du vecteur \overrightarrow{OM} dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ sont appelés les *coordonnées* du point M dans le repère $(O; (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n))$.

Exemple 18. Dans le plan affine muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) le point A de coordonnées $(2, 3)$ est le point $O + 2\vec{i} + 3\vec{j}$.

Supposons que l'espace affine X de dimension $n > 0$ soit muni du repère cartésien $(O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$. Soit $M \in X$ de coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n) : M = O + x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + \dots + x_n \vec{u}_n$. Nous identifions souvent $M \in X$ et $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{k}^n$.

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{k}$ une forme affine (*i.e.* une application affine à valeurs dans \mathbb{k}). Pour tout $M = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ nous avons

$$f(M) = f(O) + \overrightarrow{f}(x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + \dots + x_n \vec{u}_n)$$

où $\overrightarrow{f} : E \rightarrow \mathbb{k}$ désigne la partie linéaire de f ou encore

$$f(M) = f(O) + \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{f}(\vec{u}_i).$$

Posons $b := f(O) \in \mathbb{k}$ et $a_i = \overrightarrow{f}(\vec{u}_i) \in \mathbb{k}$ pour $1 \leq i \leq n$. En identifiant M et (x_1, x_2, \dots, x_n) nous obtenons :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{k}^n \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = b + \underbrace{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n}_{\overrightarrow{f}(x_1, x_2, \dots, x_n)}.$$

Réciproquement, une telle application $f : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}$ est bien affine, de partie linéaire

$$\overrightarrow{f} : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i.$$

2.2 Géométrie euclidienne

Dans cette partie nous supposons que X est l'espace \mathbb{R}^n de direction l'espace vectoriel \mathbb{R}^n (pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque) muni de l'application canonique

$$(A = (x_1, x_2, \dots, x_n), B = (y_1, y_2, \dots, y_n)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \overrightarrow{AB} := B - A = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Définition 2.2

Soient $\vec{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $\vec{v} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ dans \mathbb{R}^n . Le produit scalaire de \vec{u} et \vec{v} est défini par $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathbb{R}$.

Définition 2.3

La norme d'un vecteur $\vec{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \in \mathbb{R}^+$.

Proposition 2.1: Propriétés du produit scalaire

Soient $\vec{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $\vec{v} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ dans \mathbb{R}^n . Alors

1. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$;
2. les applications

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, w \mapsto \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \quad \text{et} \quad \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, w \mapsto \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$$

sont linéaires ;

3. $\|\vec{u}\|^2 = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle$; en particulier, $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$ et $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$ si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$;
4. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

Démonstration. 1. Nous avons $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n y_i x_i = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$.

2. Montrons que $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \vec{w} \mapsto \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$ est linéaire, *i.e.* que $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (z_1, z_2, \dots, z_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i z_i$ est linéaire.

Soient λ, μ deux réels. Soient (z_1, z_2, \dots, z_n) et $(z'_1, z'_2, \dots, z'_n)$ deux éléments de \mathbb{R}^n . Alors

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \lambda(z_1, z_2, \dots, z_n) + \mu(z'_1, z'_2, \dots, z'_n) \rangle &= \langle (x_1, x_2, \dots, x_n), \lambda(z_1, z_2, \dots, z_n) + \mu(z'_1, z'_2, \dots, z'_n) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n x_i (\lambda z_i + \mu z'_i) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n x_i z_i + \mu \sum_{i=1}^n x_i z'_i \\ &= \lambda \langle \vec{u}, (z_1, z_2, \dots, z_n) \rangle + \mu \langle \vec{u}, (z'_1, z'_2, \dots, z'_n) \rangle \end{aligned}$$

3. Nous avons $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i x_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$ et $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$ si et seulement si $x_i^2 = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$ si et seulement si $x_i = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$ si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$.

4. Nous avons

$$\begin{aligned}
 \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \|(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)\|^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2x_i y_i + y_i^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n y_i^2 \\
 &= \|u\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|v\|^2
 \end{aligned}$$

□

Rappel. Considérons \mathbb{R}^2 muni de son repère orthonormé. Soient $\vec{u} = (x_1, x_2)$ et $\vec{v} = (y_1, y_2)$. Notons ϑ l'angle géométrique entre \vec{u} et \vec{v} , $\vartheta \in [0, \pi]$. Alors

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \begin{cases} x_1 y_1 + x_2 y_2 \\ \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \vartheta. \end{cases}$$

En particulier, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ si et seulement si $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ (rappelons que $\vartheta \in [0, \pi]$) si et seulement si $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Cela conduit à la définition suivante :

Définition 2.4

Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} de \mathbb{R}^n sont *orthogonaux* dans \mathbb{R}^n si $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$. Nous notons alors $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Exemple 19. Dans \mathbb{R}^n nous notons $e_i = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{ème position}}, 0, 0, \dots, 0)$, $1 \leq i \leq n$ les vecteurs de la base canonique.

Les vecteurs de la base canonique sont deux à deux orthogonaux : si $i < j$, alors

$$(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^{i-1} 0 \times 0 + 1 \times 0 + \sum_{k=i+1}^{j-1} 0 \times 0 + 0 \times 1 + \sum_{k=j+1}^n 0 \times 0 = 0$$

Proposition 2.2

Pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ nous avons

1. $\|\vec{u}\| \geq 0$ et $\|\vec{u}\| = 0$ si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$;
2. $\|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \|\vec{u}\|$;
3. $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (inégalité triangulaire).

Démonstration. 1. Par définition $\|\vec{u}\| \geq 0$. De plus

$$\|\vec{u}\| = 0 \iff \|\vec{u}\|^2 = 0 \iff \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \iff x_i^2 = 0 \forall 1 \leq i \leq n \iff x_i = 0 \forall 1 \leq i \leq n \iff \vec{u} = \vec{0}.$$

2. Par définition $\|\lambda \vec{u}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\lambda x_i)^2}$ d'où

$$\|\lambda \vec{u}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda^2 x_i^2} = \sqrt{\lambda^2 \sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{\lambda^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = |\lambda| \|\vec{u}\|.$$

3. i) Commençons par montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz : pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ nous avons $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$.

Si $\vec{u} = 0$, alors l'inégalité est évidente.

Dans le cas contraire nous introduisons la fonction du second degré $f: \lambda \mapsto \|\vec{v} - \lambda \vec{u}\|^2$.

D'une part f est toujours positive, d'autre part nous avons

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \|\vec{v} - \lambda \vec{u}\|^2 \\ &= \langle \vec{v} - \lambda \vec{u}, \vec{v} - \lambda \vec{u} \rangle \\ &= \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle - 2\lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \lambda^2 \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \|\vec{v}\|^2 - 2\lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \lambda^2 \|\vec{u}\|^2 \end{aligned}$$

Puisque f est toujours positive, son discriminant est négatif :

$$\left(-2\lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle\right)^2 - 4\|\vec{v}\|^2 \lambda^2 \|\vec{u}\|^2 \leq 0$$

c'est-à-dire $4\lambda^2 \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 \leq 4\|\vec{v}\|^2 \lambda^2 \|\vec{u}\|^2 \leq 0$ ou encore $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$.

ii) Nous avons $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ si et seulement si $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \leq \left(\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|\right)^2$. Or

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2$$

et

$$\left(\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|\right)^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|.$$

Ainsi $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \leq \left(\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|\right)^2$ si et seulement si

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$$

si et seulement si $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$: l'inégalité triangulaire découle donc de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

Définition 2.5

Soient A, B deux points de \mathbb{R}^n . La *distance* entre A et B est définie par $d(A, B) := \|\overrightarrow{AB}\|$.

La Proposition 2.2 assure que

Proposition 2.3

Soient A, B et C trois points de \mathbb{R}^n . Alors

1. $d(A, B) \geq 0$ et $d(A, B) = 0$ si et seulement si $A = B$;
2. $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$;

Démonstration. 1. Pour tous A, B et C dans \mathbb{R}^n nous avons

◊ d'une part $d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| \geq 0$,

◊ d'autre part $d(A, B) = 0$ si et seulement si $\|\overrightarrow{AB}\| = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ si et seulement si $A = B$.

2. Pour tous A, B et C dans \mathbb{R}^n nous avons

$$d(A, C) = \|\overrightarrow{AC}\| \stackrel{\text{Chasles}}{=} \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\| \stackrel{\text{inégalité triangulaire}}{\leq} \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\| = d(A, B) + d(B, C).$$

□

Exemple 20. Considérons dans \mathbb{R}^3 les points $A = (0, 1, 3)$ et $B = (1, 2, -1)$. Alors

$$d(A, B) = \left((1-0)^2 + (2-1)^2 + (-1-3)^2 \right)^{1/2} = (18)^{1/2} = 3\sqrt{2}.$$

Définition 2.6

Soit $A \in \mathbb{R}^n$. Soit $Y \neq \emptyset$ un sous-ensemble de \mathbb{R}^n . La *distance* est

$$d(A, Y) = \inf_{B \in Y} d(A, B) \in \mathbb{R}^+.$$

Exemple 21. Dans \mathbb{R}^2 montrons que la distance du point $(x, 0)$ à l'axe des ordonnées (Oy) est $|x|$.

Soit $(0, y)$ un point de (Oy) .

◊ D'une part,

$$d((x, 0), (0, y)) = \left((x-0)^2 + (y-0)^2 \right)^{1/2} = (x^2 + y^2)^{1/2} \stackrel{y^2 \geq 0}{\geq} (x^2)^{1/2} = |x|$$

Par suite $\inf_{y \in \mathbb{R}} d((x, 0), (0, y)) \geq |x|$.

Par ailleurs

$$\inf_{y \in \mathbb{R}} d((x, 0), (0, y)) = \inf_{M \in Oy} d((x, 0), M) = d((x, 0), Oy)$$

d'où $d((x, 0), Oy) \geq |x|$.

◇ D'autre part, $d((x, 0), \underbrace{(0, 0)}_{\in Oy}) = |x|$ d'où $d((x, 0), Oy) \leq |x|$.

Finalement $d((x, 0), Oy) = |x|$.

Définition 2.7

Une base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ de \mathbb{R}^n est *orthonormée* si

$$\{\forall 1 \leq i \leq n \quad \|\vec{u}_i\| = 1 \forall 1 \leq i \neq j \leq n \quad \langle \vec{u}_i, \vec{u}_j \rangle = 0\}$$

Exemple 22. Dans \mathbb{R}^n la base canonique est orthonormée car

◇ $\forall i \neq j \quad \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle$

◇ $\forall i \quad \|\vec{e}_i\| = \|(0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots, 0)\| = \left(\sum_{k=1}^{i-1} 0^2 + 1^2 + \sum_{k=i+1}^n 0^2 \right)^{1/2} = 1$.

Théorème 2.1: Théorème de Pythagore

Dans \mathbb{R}^n les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.

Démonstration. L'énoncé découle directement de la propriété suivante : si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs de \mathbb{R}^n , alors $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$. □

Définition 2.8: S

it F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . L'*orthogonal* de F est défini par

$$F^\perp = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid \forall \vec{u} \in F \quad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0\}.$$

Remarque 5. Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . L'orthogonal de F est

$$F^\perp = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{v} \perp \vec{u} \forall u \in F\}.$$

Proposition 2.4

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . Alors F^\perp est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Démonstration. ◇ L'ensemble F^\perp n'est pas vide ; en effet, $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$ appartient à F^\perp car

$$\langle \vec{u}, \vec{0} \rangle = \sum_{i=1}^n u_i \cdot 0 = 0 \text{ pour tout } \vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in F.$$

◇ Soient \vec{v} et \vec{w} deux éléments de F^\perp et soient λ, μ des réels. Alors la Proposition 2.1 assure que pour tout u dans F^\perp nous avons

$$\langle \vec{u}, \lambda \vec{v} + \mu \vec{w} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \mu \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle.$$

Or car v appartient à F^\perp et car w appartient à F^\perp donc pour tout $u \in F^\perp$ nous avons

$$\langle \vec{u}, \lambda \vec{v} + \mu \vec{w} \rangle = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0$$

et $\lambda \vec{v} + \mu \vec{w}$ appartient à F^\perp . □

Définitions 2.2

Soient F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n et F^\perp l'orthogonal de F .

- ◇ Si \vec{u} appartient à F^\perp , on dit que \vec{u} est *orthogonal* à F .
- ◇ Si Y est un sous-espace affine de \mathbb{R}^n dirigé par F et si u appartient à F^\perp , on dit aussi que \vec{u} est *orthogonal* à Y .
- ◇ Si Y et Y' sont deux sous-espaces affines de X respectivement dirigés par F et F^\perp , on dit que Y et Y^\perp sont orthogonaux.

Remarque 6. En particulier si Y_1 et Y_2 sont (fortement) parallèles donc sont dirigés par le même sous-espace vectoriel F de \mathbb{R}^n , alors si Y_1 est orthogonal à Y' , *i.e.* si Y' est dirigé par F^\perp , alors Y_2 est aussi orthogonal à Y' .

Exemple 23. Considérons dans \mathbb{R}^3 le plan vertical d'équation $x = 0$:

$$H = \{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Alors

$$\begin{aligned} H^\perp &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid \langle (a, b, c), (0, y, z) \rangle = 0 \forall y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid by + cz = 0 \forall y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid b = c = 0\} \\ &= \{(a, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}(1, 0, 0) \end{aligned}$$

En particulier, la droite affine $(0, 1, 0) + H^\perp = \{(x, 1, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ est orthogonale à H .

Théorème 2.2

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . Alors F et F^\perp sont supplémentaires dans \mathbb{R}^n , *i.e.* $F \oplus F^\perp = \mathbb{R}^n$.

Remarque 7. Dire que F et F^\perp sont supplémentaires dans \mathbb{R}^n revient à dire que $F + F^\perp = \mathbb{R}^n$ et $F \cap F^\perp = \{\vec{0}\}$. Vérifions cette dernière propriété : soit \vec{u} un élément de $F \cap F^\perp$; alors d'une part \vec{u} appartient à F et \vec{u} appartient à F^\perp . Il en résulte que $\vec{u} \perp \vec{u}$ donc que $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$, *i.e.* que $\vec{u} = \vec{0}$. Ainsi $F \cap F^\perp \subset \{\vec{0}\}$ d'où $F \cap F^\perp = \{\vec{0}\}$.

2.3 Équation cartésienne d'un hyperplan. Droites et plans dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3

2.3.1 Équation cartésienne d'un hyperplan

Soit $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ un repère de \mathbb{R}^n (ou plus généralement d'un espace affine X de dimension n).

Dans la suite nous identifierons le point $M = O + \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$ qui appartient à \mathbb{R}^n (ou à X) et ses coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Nous avons vu que f est affine si et seulement s'il existe $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i + b$ pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Remarque 8. La partie linéaire d'une telle application affine f est

$$\vec{f}: (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i.$$

Et nous avons aussi déjà vu que f est constante si et seulement si $\vec{f} = 0$; on peut vérifier que $\vec{f} = 0$ si et seulement si $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

Ainsi nous pouvons énoncer la :

Proposition 2.5

La fonction $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est affine non constante si et seulement s'il existe $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i + b$ pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Définition 2.9

On appelle *hyperplan affine* de \mathbb{R}^n (ou hyperplan) tout sous-espace affine de \mathbb{R}^n dirigé par un hyperplan vectoriel, autrement dit tout sous-espace affine de dimension $n - 1$.

Exemples 1. \diamond Les hyperplans affines de \mathbb{R} sont les singletons de \mathbb{R} .

\diamond Les hyperplans affines de \mathbb{R}^2 sont les droites de \mathbb{R}^2 .

\diamond Les hyperplans affines de \mathbb{R}^3 sont les plans de \mathbb{R}^3 .

Proposition 2.6

Un sous-espace H de \mathbb{R}^n est un hyperplan affine de \mathbb{R}^n si et seulement s'il existe $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ affine non constante telle que $H = f^{-1}(\{0\})$ ou encore $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$.

Démonstration.

□

à faire

2.3.2 Droites de \mathbb{R}^2

Soit \mathcal{D} une droite de \mathbb{R}^2 , *i.e.* un hyperplan de \mathbb{R}^2 . D'après ce qui précède il existe $a, b, c \in \mathbb{R}^3$, $(a, b) \neq (0, 0)$, tels que \mathcal{D} a pour équation $ax + by + c = 0$ (*i.e.* (x, y) appartient à \mathcal{D} si et seulement si $ax + by + c = 0$).

Direction de la droite $\mathcal{D} : ax + by + c = 0, (a, b) \neq (0, 0)$

Cette droite \mathcal{D} est dirigée par la droite vectorielle \mathcal{D}_0 d'équation $ax + by = 0$ (équation homogène associée). D'une part $(-b, a)$ appartient à \mathcal{D}_0 (car $a(-b) + b(a) = 0$), d'autre part $(-b, a) \neq (0, 0)$ (car $(a, b) \neq (0, 0)$). Il en résulte que \mathcal{D} est dirigée par $\text{Vect}(-b, a)$ (on dit aussi que \mathcal{D} est dirigée par $(-b, a)$). En particulier, soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ (*i.e.* tel que $ax_0 + by_0 + c = 0$), alors

$$\mathcal{D} = (x_0, y_0) + \text{Vect}((-b, a)) = (x_0, y_0) + \{\lambda(-b, a) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Autrement dit (x, y) appartient à \mathcal{D} si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = x_0 - \lambda b \\ y = y_0 + \lambda \end{cases}$ On dit

que $\begin{cases} x = x_0 - \lambda b \\ y = y_0 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$, est un système d'équations paramétriques de \mathcal{D} (car elles décrivent \mathcal{D} à l'aide du paramètre λ).

Exemple 24. Donnons une équation cartésienne de la droite \mathcal{D} décrite par le système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 1 - 4\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$. Nous avons $(x, y) \in \mathcal{D}$ si et seulement si $(x, y) \in \{(2, 1) + \lambda(3, -4) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Ainsi \mathcal{D} est la droite dirigée par $(3, -4)$ passant par $(2, 1)$. Il en résulte qu'une équation de \mathcal{D} est $4x + 3y + c = 0$ où c vérifie l'équation $4 \times 2 + 3 \times 1 + c = 0$, *i.e.* $c = -11$. Finalement une équation de \mathcal{D} est $4x + 3y - 11 = 0$.

Équation cartésienne de la droite passant par $A = (x_0, y_0)$ et dirigée par $\vec{u} = (u_1, u_2) \neq (0, 0)$

Soit \mathcal{C} cette droite : $\mathcal{D} = A + \text{Vect}(\vec{u})$. En raisonnant comme ci-dessus nous obtenons que \mathcal{D} a pour équation $u_2x - u_1y + c = 0$ où $u_2x_0 - u_1y_0 = 0$. Une autre façon de raisonner est la suivante : (x, y) appartient à \mathcal{D} si et seulement si $\vec{Ax} = (x - x_0, y - y_0)$ et $\vec{u} = (u_1, u_2) \neq (0, 0)$ sont colinéaires si et seulement si $\begin{vmatrix} x - x_0 & u_1 \\ y - y_0 & u_2 \end{vmatrix} = 0$ si et seulement si $u_2(x - x_0) + u_1(y - y_0) = 0$.

Application : la droite passant par $A = (1, 1)$ et dirigée par $\vec{u} = (2, -3)$ a pour équation $\begin{vmatrix} x - 1 & 2 \\ y - 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$, *i.e.* $-3(x - 1) - 2(y - 1) = 0$ soit $3x + 2y - 5 = 0$.

Équation de la droite (AB) où $A \neq B$

Soient $A = (x_0, y_0)$ et $B = (x_1, y_1)$ deux points distincts. La droite (AB) est la droite passant par A et dirigée par $\vec{AB} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0) \neq (0, 0)$ donc (x, y) appartient à (AB) si et seulement si $\begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0$ si et seulement si $\begin{vmatrix} x & x_0 & x_1 \\ y & y_0 & y_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Finalement (AB) a pour équation $(x - x_0)(y_1 - y_0) - (y - y_0)(x_1 - x_0) = 0$.

Exemple 25. Déterminons l'équation de la droite passant par $1 = (1, 1)$ et $B = (3, -2)$. D'après ce qui précède l'équation de cette droite est

$$(x - 1)(-2 - 1) - (y - 1)(3 - 1) = 0$$

i.e. $3x + 2y - 5 = 0$.

Intersection de deux droites

Soient \mathcal{D}_1 la droite d'équation $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ avec $(a_1, b_1) \neq (0, 0)$ et \mathcal{D}_2 la droite d'équation $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ avec $(a_2, b_2) \neq (0, 0)$. Alors

- ◇ \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont parallèles si et seulement si elles ont la même direction (elles sont alors confondues ou disjointes) si et seulement si $\text{Vect}(-b_1, a_1) = \text{Vect}(-b_2, a_2)$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $(-b_1, a_1) = \lambda(-b_2, a_2)$ si et seulement si $(-b_1, a_1)$ et $(-b_2, a_2)$ sont colinéaires.
- ◇ Dans le cas contraire nous avons nécessairement $\text{Vect}(-b_1, a_1) \cap \text{Vect}(-b_2, a_2) = \{(0, 0)\}$ (en effet $\text{Vect}(-b_1, a_1) \cap \text{Vect}(-b_2, a_2)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 de dimension < 1 puisque \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 ne sont pas parallèles). Comme

$$\dim \text{Vect}(-b_1, a_1) + \dim \text{Vect}(-b_2, a_2) = 1 + 1 = 2 = \dim \mathbb{R}^2,$$

il vient $\text{Vect}(-b_1, a_1) \oplus \text{Vect}(-b_2, a_2) = \mathbb{R}^2$. Le Théorème 1.2 assure que $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ est un singleton. Un cas particulier est le suivant : soient \mathcal{D}_1 la droite d'équation $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ et \mathcal{D}_2 la droite dirigée par (a, b) . Dans ce cas \mathcal{D}_2 est orthogonale à \mathcal{D}_1 ; en effet, d'une part \mathcal{D}_1 est dirigée par $\text{Vect}(-b, a)$ et d'autre part

$$\text{Vect}(-b, a)^\perp = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \langle (-b, a), (x, y) \rangle = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -bx + ay = 0\} = \text{Vect}(a, b).$$

2.3.3 Plans de \mathbb{R}^3

Soit \mathcal{P} un plan de \mathbb{R}^3 (à noter que c'est aussi un hyperplan de \mathbb{R}^3). Il est décrit par une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec a, b, c, d quatre réels tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ (le point (x, y, z) appartient à \mathcal{P} si et seulement si $ax + by + cz + d = 0$).

Équation du plan passant par A et dirigé par \vec{u} et \vec{v} non colinéaires

Soient $A = (x_0, y_0, z_0)$ un point de \mathbb{R}^3 , $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ et $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ deux vecteurs de \mathbb{R}^3 non colinéaires. Comme \vec{u} et \vec{v} sont non colinéaires, $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ est un plan vectoriel. Soit \mathcal{P} le plan passant par A et dirigé par $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$, *i.e.* $\mathcal{P} = A + \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$. Déterminons une équation de \mathcal{P} . Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors (x, y, z) appartient à \mathcal{P} si et seulement si $\overrightarrow{A(x, y, z)} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ appartient à $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ si et seulement si $((x - x_0, y - y_0, z - z_0), \vec{u}, \vec{v})$ est liée si et seulement

si
$$\begin{vmatrix} x - x_0 & a_1 & a_2 \\ y - y_0 & b_1 & b_2 \\ z - z_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$
 En développant ce déterminant par rapport à la première colonne nous obtenons que

$$(x - x_0)(b_1c_2 - b_2c_1) + (y - y_0)(a_2c_1 - a_1c_2) + (z - z_0)(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$$

est une équation de \mathcal{P} . Quitte à définir (a, b, c) comme le produit vectoriel de \vec{u}_1 et \vec{u}_2 c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

nous obtenons que $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ est une équation de \mathcal{P} .

Lien avec les équations paramétriques. Rappelons que $\mathcal{P} = A + \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$. Or $A = (x_0, y_0, z_0)$ et

$$\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = \{\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \{\lambda(a_1, b_1, c_1) + \mu(a_2, b_2, c_2)\vec{v} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

donc

$$\mathcal{P} = \{(x_0 + \lambda a_1 + \mu a_2, y_0 + \lambda b_1 + \mu b_2, z_0 + \lambda c_1 + \mu c_2) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Autrement dit $\begin{cases} x = x_0 + \lambda a_1 + \mu a_2 \\ y = y_0 + \lambda b_1 + \mu b_2 \\ z = z_0 + \lambda c_1 + \mu c_2 \end{cases}$ est un système d'équations paramétriques de \mathcal{P} .

Exemple 26. Soit \mathcal{P} le plan défini par le système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 2 + 3\lambda + \mu \\ y = 1 - 4\lambda + \mu \\ z = -1 + \lambda - \mu \end{cases} \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Donnons une équation cartésienne de \mathcal{P} . Une équation cartésienne de \mathcal{P} est $a(x - 2) + b(y - 1) + c(z + 1) = 0$ où

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix};$$

après simplification nous obtenons qu'une équation cartésienne de \mathcal{P} est $3x + 4y + 7z - 3 = 0$.

Équation d'un plan passant par trois points non alignés. Soient $A = (x_0, y_0, z_0)$, $B = (x_1, y_1, z_1)$ et $C = (x_2, y_2, z_2)$ trois points non alignés de \mathbb{R}^3 . Dire que A , B et C sont non alignés équivaut à dire que \vec{AB} et \vec{AC} sont linéairement indépendants. Soit \mathcal{P} le plan passant par A , B et C . Alors $\mathcal{P} = A + \text{Vect}(\vec{AB}, \vec{AC})$. Ainsi (x, y, z) appartient à \mathcal{P} si et seulement si $\overrightarrow{A(x, y, z)}$ appartient à $\text{Vect}(\vec{AB}, \vec{AC})$

si et seulement si $\det(\overrightarrow{A(x, y, z)}, \vec{AB}, \vec{AC}) = 0$ si et seulement si $\begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \\ z - z_0 & z_1 - z_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$ si

et seulement si $\begin{vmatrix} x & x_0 & x_1 & x_2 \\ y & y_0 & y_1 & y_2 \\ z & z_0 & z_1 & z_2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Exemple 27. L'équation du plan passant par les trois points non alignés $(1, 2, 3)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$

est $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ y & 2 & 1 & 0 \\ z & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, soit $-4x + y + z - 1 = 0$.

Intersection d'un plan et d'une droite

Soit \mathcal{P} le plan d'équation $ax + by + cz = 0$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Soit \mathcal{D} la droite de \mathbb{R}^3 de direction $\mathcal{D}_0 = \text{Vect}(\vec{u})$ où $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ désigne un élément de $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Nous nous intéressons à $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}$. Soient v et w deux vecteurs non colinéaires tels que $\text{Vect}(v, w)$ dirige \mathcal{P} ; cela signifie que $\text{Vect}(v, w) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$. Alors

◇ \mathcal{D} est faiblement parallèle à \mathcal{P} si et seulement si $\text{Vect}(\vec{u}) \subset \text{Vect}(\vec{v}, \vec{w})$ si et seulement si $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$. Ou bien $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \{\emptyset\}$, ou bien $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$.

- ◇ Dans le cas contraire \vec{u} n'appartient pas à $\text{Vect}(\vec{v}, \vec{w}) \subset \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$; par suite la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est libre ou de manière équivalente $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de \mathbb{R}^3 . Il en résulte que

$$\underbrace{\text{Vect}(\vec{u})}_{\text{direction de } \mathcal{P}} \oplus \underbrace{\text{Vect}(\vec{v}, \vec{w})}_{\text{direction de } \mathcal{P}} = \mathbb{R}^3$$

Le Théorème 1.2 assure que $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}$ est un singleton.

Un cas particulier est le suivant : si \mathcal{D} est dirigée par (a, b, c) alors \mathcal{D} est orthogonale à \mathcal{P} . En effet

$$\begin{aligned} \text{Vect}(a, b, c)^\perp &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) \perp \lambda(a, b, c) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) \perp (a, b, c)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \langle (x, y, z), (a, b, c) \rangle = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\} \\ &= \text{Vect}(\vec{v}, \vec{w}) \\ &= \text{« direction de } \mathcal{P} \text{ »} \end{aligned}$$