DEVOIR n° 1

Exercice 1 Deux éléments de même ordre d'un groupe G sont-ils nécessairement conjugués ?

Exercice 2 Soit G un groupe tel que pour tout sous-groupe $\mathrm{H} \subsetneq \mathrm{G}$ le sous-groupe H est cyclique. Le groupe G est-il cyclique ?

Exercice 3 Soit G un groupe fini d'ordre pair et de neutre e. Montrer qu'il existe un élément x d'ordre 2.

Exercice 4 Soit G un groupe fini. Soient p le plus petit facteur premier de $|\mathrm{G}|$ et H un sous-groupe d'ordre p et distingué dans G. En faisant opérer G sur H par conjugaison montrer que H est contenu dans le centre de G.

Exercice 5 Soit G un groupe fini d'ordre impair.

1. Montrer que l'application $f\colon \mathrm{G} \to \mathrm{G}$, $x \mapsto x^2$ est une bijection.
2. En déduire que pour $x \in \mathrm{G}$ l'équation $x^2 = e$ admet une unique solution ; laquelle ?

Exercice 6 Soit $\mathbb{H} \subset \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ le sous-ensemble suivant

$$\mathbb{H} = \{\mathbf{1},\ -\mathbf{1},\ I,\ -I,\ J,\ -J,\ K,\ -K\}$$

avec

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\mathbb{H}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$.
2. Le groupe $\mathbb{H}$ est-il abélien ?
3. Déterminer tous les sous-groupes de $\mathbb{H}$.

Exercice 7 Soit $B \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices triangulaires supérieures. Soit $T \subset B$ le sous-ensemble des matrices diagonales et soit $U \subset B$ le sous-ensemble des matrices triangulaires supérieures ayant un 1 sur la diagonale.

1. Montrer que B, T et U sont des sous-groupes de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.
2. Montrer que l'application $\varphi\colon B \to T$ qui à une matrice supérieure associe sa partie diagonale est un morphisme de groupes.
3. Montrer que $U = \ker \varphi$ et en déduire que $U \triangleleft B$.
4. Montrer que le groupe quotient B/U est isomorphe à T.

Exercice 8 Notons D_8 le groupe des isométries qui préservent un carré. Montrer que les groupes

$$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \qquad \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \qquad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \qquad \mathrm{D}_8, \qquad \mathbb{H}$$

sont 2 à 2 non isomorphes.

Lesquels sont abéliens ?