Université Côte d'Azur — Groupes et géométrie
Année 2020-2021

DEVOIR n$^{\text{o}}$ 1

Exercice 1 Deux éléments de même ordre d'un groupe G sont-ils nécessairement conjugués ?

Solution 1 Deux éléments conjugués ont bien sûr le même ordre, fini ou pas. La réciproque est fausse : par exemple si $\mathrm{G} = \mathcal{S}_4$, alors les permutations $(1\ 2)$ et $(1\ 2)(3\ 4)$ sont d'ordre 2 mais ne sont pas conjuguées (la première a deux points fixes alors que la seconde n'en a pas).

Exercice 2 Soit G un groupe tel que pour tout sous-groupe $\mathrm{H} \subsetneq \mathrm{G}$ le sous-groupe H est cyclique. Le groupe G est-il cyclique ?

Solution 2 Pas nécessairement. Par exemple le groupe $\mathrm{G} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ n'est pas cyclique (il n'y a pas d'élément d'ordre 4) mais ses sous-groupes $\mathrm{H} \subsetneq \mathrm{G}$ sont d'ordre 1 ou 2 et doivent donc être cycliques.

Exercice 3 Soit G un groupe fini d'ordre pair et de neutre e. Montrer qu'il existe un élément x d'ordre 2.

Solution 3 Remarquons qu'un élément x est d'ordre 2 si et seulement si $x \neq e$ et $x^2 = e$ c'est-à-dire si et seulement si $x \neq e$ et $x = x^{-1}$. Pour tout $x \in \mathrm{G}$ on note $[x] = \{x, x^{-1}\}$. Nous avons $[e] = \{e\}$ et pour $x \neq e$ $|[x]| = 1$ si et seulement si x est d'ordre 2. Le groupe G est réunion disjointe d'ensembles de la forme $[x]$: il existe $x_0 = e$, x_1, $\ldots$, x_r tels que

$$\mathrm{G} = [x_0] \sqcup [x_1] \sqcup [x_2] \sqcup \ldots \sqcup [x_r]$$

Par conséquent $|\mathrm{G}| = |[e]| + \displaystyle\sum_{i=1}^{r} |[x_i]|$. Si tous les éléments de G différents de e étaient d'ordre différent de 2 nous aurions $|[x_i]| = 2$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$ et $|\mathrm{G}|$ serait impair : contradiction. Il en résulte que G a au moins un élément d'ordre 2.

Exercice 4 Soit G un groupe fini. Soient p le plus petit facteur premier de $|\mathrm{G}|$ et H un sous-groupe d'ordre p et distingué dans G. En faisant opérer G sur H par conjugaison montrer que H est contenu dans le centre de G.

Solution 4 Puisque H est distingué dans G l'application

$$\mathrm{G} \times \mathrm{H} \to \mathrm{H}, \qquad (g, h) \mapsto ghg^{-1}$$

définit une action du groupe G sur l'ensemble H. Puisque $|\mathrm{H}| \geqslant 2$ il existe $h \in \mathrm{H} \smallsetminus \{e\}$. Soit $\mathcal{O}_h$ l'orbite de h. D'une part $|\mathcal{O}_h|$ divise $|\mathrm{G}|$ et d'autre part H étant réunion des orbites nous avons $|\mathcal{O}_h| \leqslant |\mathrm{H}| = p$. Si $|\mathcal{O}_h| > 1$, alors p étant le plus petit diviseur de $|\mathrm{G}|$ distinct de 1, nous avons $|\mathcal{O}_h| \geqslant p$ et par suite $|\mathcal{O}_h| = |\mathrm{H}|$. Il en résulte que $\mathcal{O}_h = \mathrm{H}$. En particulier e appartient à $\mathcal{O}_h$ et donc $h = e$: contradiction. Ainsi toutes les orbites sont des singletons et donc si (g, h) appartient à $\mathrm{G} \times \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ alors $ghg^{-1} = h$, *i.e.* $gh = hg$ et $\mathrm{H} \subset Z(\mathrm{G})$.

Exercice 5 Soit G un groupe fini d'ordre impair.

1. Montrer que l'application $f \colon \mathrm{G} \to \mathrm{G}$, $x \mapsto x^2$ est une bijection.
2. En déduire que pour $x \in \mathrm{G}$ l'équation $x^2 = e$ admet une unique solution ; laquelle ?

Solution 5 Soit n tel que $|\mathrm{G}| = 2n + 1$. Pour tout $x \in \mathrm{G}$ on a $x^{2n+1} = e$.

1. Montrons que f est surjective, elle sera alors bijective. Soit $y \in \mathrm{G}$; nous cherchons $x \in \mathrm{G}$ tel que $f(x) = y$. Posons $x = y^{n+1}$, alors
$$f(x) = x^2 = (y^{n+1})^2 = y^{2n+2} = y^{2n+1}y = y$$
ce qui démontre le résultat.

2. D'après ce qui précède l'application f est bijective et il existe un unique $x \in \mathrm{G}$ tel que $x^2 = e$, c'est $x = e$.

Exercice 6 Soit $\mathbb{H} \subset \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ le sous-ensemble suivant

$$\mathbb{H} = \{\mathbf{1},\, -\mathbf{1},\, I,\, -I,\, J,\, -J,\, K,\, -K\}$$

avec

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\mathbb{H}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$.
2. Le groupe $\mathbb{H}$ est-il abélien ?
3. Déterminer tous les sous-groupes de $\mathbb{H}$.

Solution 6

1. On vérifie les formules suivantes : $I^2 = J^2 = K^2 = -\mathbf{1}$. En particulier $I^{-1} = -I$, $J^{-1} = -J$ et $K^{-1} = -K$ sont dans $\mathbb{H}$. De même $(-I)^{-1} = I$, $(-J)^{-1} = J$ et $(-K)^{-1} = K$ sont dans $\mathbb{H}$. Ainsi les inverses des éléments de $\mathbb{H}$ sont dans $\mathbb{H}$.
   On vérifie les formules $IJ = K$, $JI = -K$, $IK = -J$, $KI = J$, $JK = I$ et $KJ = -I$. Ainsi le produit de deux éléments de $\mathbb{H}$ est encore dans $\mathbb{H}$ et $\mathbb{H}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$.
2. Non car $IJ = -JI$.
3. Le groupe $\mathbb{H}$ est d'ordre 8. Ces sous-groupes sont donc d'ordre 1, 2, 4 ou 8.
   Le seul sous-groupe d'ordre 1 est $\{\mathbf{1}\}$.
   Comme $I^2 = J^2 = K^2 = -\mathbf{1}$ les éléments I, J et K sont d'ordre 4. Il en est de même pour $-I$, $-J$ et $-K$. Ainsi le seul élément d'ordre 2 de $\mathbb{H}$ est $-\mathbf{1}$. Le seul sous-groupe d'ordre 2 est donc $\{\pm\mathbf{1}\}$.
   Un sous-groupe d'ordre 4 doit donc contenir au moins un élément d'ordre 4 et est donc engendré par cet élément. Les possibilités sont
   $$\langle I \rangle = \{\pm\mathbf{1},\, \pm I\}, \qquad \langle J \rangle = \{\pm\mathbf{1},\, \pm J\}, \qquad \langle K \rangle = \{\pm\mathbf{1},\, \pm K\},$$
   Enfin il y a un sous-groupe d'ordre 8 : $\mathbb{H}$.
   Finalement les sous-groupes de $\mathbb{H}$ sont
   $$\{\mathbf{1}\}, \qquad \{\pm\mathbf{1}\}, \qquad \langle I \rangle \qquad \langle J \rangle \qquad \langle K \rangle \qquad \mathbb{H}$$

Exercice 7 Soit $B \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices triangulaires supérieures. Soit $T \subset B$ le sous-ensemble des matrices diagonales et soit $U \subset B$ le sous-ensemble des matrices triangulaires supérieures ayant un 1 sur la diagonale.

1. Montrer que B, T et U sont des sous-groupes de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.
2. Montrer que l'application $\varphi\colon B \to T$ qui à une matrice supérieure associe sa partie diagonale est un morphisme de groupes.
3. Montrer que $U = \ker \varphi$ et en déduire que $U \triangleleft B$.
4. Montrer que le groupe quotient ${}^{B}\!/_{U}$ est isomorphe à T.

Solution 7

1. Soit $(e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrons que nous avons
   $$B = \big\{g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \,|\, g(\langle e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_i \rangle) = \langle e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_i \rangle \text{ pour tout } 1 \leqslant i \leqslant n\big\}.$$
   Si g appartient à B, alors $g(e_i)$ appartient à $\langle e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_i \rangle$ d'où l'inclusion $g(\langle e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_i \rangle) \subset \langle e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_i \rangle$. Puisque g est bijective nous avons l'égalité. Réciproquement si $g(\langle e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_i \rangle) = \langle e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_i \rangle$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, alors $g(e_i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{i} g_{ji} e_j$ donc g est triangulaire supérieure et g appartient à B.

Montrons maintenant que B est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Si g et h appartiennent à B, nous avons

$$g(\langle e_1, e_2, \ldots, e_i\rangle) = \langle e_1, e_2, \ldots, e_i\rangle \qquad h(\langle e_1, e_2, \ldots, e_i\rangle) = \langle e_1, e_2, \ldots, e_i\rangle$$

donc

$$h^{-1}(\langle e_1, e_2, \ldots, e_i\rangle) = \langle e_1, e_2, \ldots, e_i\rangle$$

et

$$gh^{-1}(\langle e_1, e_2, \ldots, e_i\rangle) = g(\langle e_1, e_2, \ldots, e_i\rangle) = \langle e_1, e_2, \ldots, e_i\rangle$$

dont gh^{-1} appartient à B qui est bien un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

De la même manière montrons que nous avons

$$T = \big\{g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \,|\, g(\langle e_i\rangle) = \langle e_i\rangle \text{ pour tout } 1 \leqslant i \leqslant n\big\}.$$

Si g appartient à T, alors g envoie e_i dans $\langle e_i\rangle$ d'où l'inclusion $g(\langle e_i\rangle) \subset \langle e_i\rangle$. Comme g est bijective, on a égalité. Réciproquement si $g(\langle e_i\rangle) = \langle e_i\rangle$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, alors $g(e_i) = g_{ii}e_i$ donc g est diagonale et g appartient à T.
Montrons maintenant que T est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Si g et h appartiennent à T, nous avons $g(\langle e_i\rangle) = \langle e_i\rangle$ et $h(\langle e_i\rangle) = \langle e_i\rangle$ donc $h^{-1}(\langle e_i\rangle) = \langle e_i\rangle$ et $gh^{-1}(\langle e_i\rangle) = g(\langle e_i\rangle) = \langle e_i\rangle$ donc gh^{-1} appartient à T qui est bien un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

Nous montrons que U est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ un peu après.

2. Montrons que φ est un morphisme de groupes. Si g, h appartiennent à B, alors en écrivant $g = (g_{ij})$ et $h = (h_{ij})$ nous avons $gh = (a_{ij})$ avec $a_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} g_{ik}h_{kj}$. Nous nous intéressons à la partie diagonale donc à a_{ii}. Nous avons $g_{ij} = 0 = h_{ij}$ pour $i > j$; nous obtenons

$$a_{ii} = \sum_{k=1}^{n} g_{ik}h_{ki} = \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}h_{ki} + g_{ii}h_{ii} + g_{ii}h_{ii} + \sum_{k=i+1}^{n} g_{ik}h_{ki}$$

donc

$$a_{ii} = \sum_{k=1}^{i-1} 0 \times h_{ki} + g_{ii}h_{ii} + \sum_{k=i+1}^{n} g_{ik} \times 0 = g_{ii}h_{ii}.$$

Il en résulte que φ est un morphisme de groupes.

3. Par définition de U, nous avons $U = \ker\varphi$. Ainsi U est un sous-groupe de B et donc de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ et il est distingué dans B.
4. Le morphisme de groupes $\varphi\colon B \to T$ est surjectif ; en effet pour $g \in T \subset B$, on a $\varphi(g) = g$. Ainsi on a un isomorphisme

$$B/U = B/\ker\varphi \simeq \mathrm{im}\,\varphi = T.$$

Exercice 8 Notons D_8 le groupe des isométries qui préservent un carré. Montrer que les groupes

$$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \qquad \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \qquad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \qquad \mathrm{D}_8, \qquad \mathbb{H}$$

sont 2 à 2 non isomorphes.

Lesquels sont abéliens ?

Solution 8 On regarde les ordres des éléments.

Le seul groupe ayant un élément d'ordre 8 est $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$; il n'est donc isomorphe à aucun autre. Il est abélien.

Le seul groupe ayant uniquement des éléments d'ordre 2 est $\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^3$, il n'est isomorphe à aucun autre. Il est abélien.

Le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{R}$ est abélien alors que D_8 et $\mathbb{H}$ ne le sont pas, il n'est donc isomorphe à aucun autre. Il est abélien.

Le groupe D_8 des isométries d'un carré $ABCD$ de centre O contient la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui est d'ordre 4. De plus il contient la symétrie s_{AB} par rapport à la médiatrice de $[AB]$. De plus nous avons $rs_{AB}r^{-1} = s_{CB}$ la symétrie par rapport à la médiatrice de $[BC]$. Par conséquent D_8 n'est pas abélien. Enfin le groupe D_8 contient s_{AB} et s_{BC} qui sont d'ordre 2 donc il contient 2 éléments d'ordre 2. Ce n'est pas le cas du groupe $\mathbb{H}$ donc D_8 n'est isomorphe à aucun autre. Il n'est pas abélien.

D'après ce qui précède le groupe $\mathbb{H}$ n'est isomorphe à aucun autre. Il n'est pas abélien.