

EPREUVE DU 15 JANVIER 2021

Les documents sont interdits,
TOUTES les réponses doivent être impérativement justifiées,
la qualité de la rédaction est prise en compte

Exercice 1

Parmi les assertions suivantes, démontrer celles qui sont vraies et donner un contre-exemple pour celles qui sont fausses (on indiquera d'abord si l'assertion est vraie ou fausse).

a) Soit G un groupe quelconque. Soient x, y dans G. Si xy est d'ordre fini p dans G, alors yx est d'ordre fini p dans G.
b) Si G est un groupe fini abélien et p est un nombre premier divisant $|\mathrm{G}|$, alors G contient un unique p-Sylow.
c) Soit p un nombre premier divisant $|\mathrm{G}|$. Soit G un groupe fini vérifiant : pour tout $x \in \mathrm{G}$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^{p^m} = e_{\mathrm{G}}$. Alors, G est un p-groupe.

Exercice 2

Soient $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2, \ldots, \mathrm{G}_n$ des groupes cycliques d'ordres respectifs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Posons $\mathrm{G} = \mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2 \times \ldots \times \mathrm{G}_n$.

a) Pour tout i, soit x_i un élément de G_i d'ordre β_i. Montrer que $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est d'ordre $\mathrm{ppcm}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ dans G.
b) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les α_i pour que le groupe G soit cyclique.

Exercice 3

Soient p et q deux nombres premiers distincts. Montrer qu'il n'existe pas de groupe simple d'ordre p^2q.

Exercice 4

Déterminer tous les morphismes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 5

1. Soit G un groupe fini qui opère sur un ensemble fini non vide E. Supposons que G soit d'ordre p^m avec p premier et $m \in \mathbb{N}^*$. Posons
$$E^{\mathrm{G}} = \{x \in E \mid \forall\, g \in \mathrm{G},\, g \cdot x = x\}.$$
Montrer que $|E^{\mathrm{G}}| = |E| \bmod p$.
2. Soit H un groupe fini d'ordre n. Soit p un diviseur premier de n. Montrer que H contient un élément d'ordre p (lemme de Cauchy). Indication : faire agir $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur l'ensemble E des $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de H^p tels que $x_1 x_2 \ldots x_p = e$.
3. Soit H un groupe fini d'ordre n. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $x \in \mathrm{H}$ on ait $x^m = e$. Montrer que n divise une puissance de m.

Exercice 6

On rappelle qu'un morphisme $(\rho, V) \to (\pi, W)$ entre deux représentations de G est un morphisme $\mathbb{C}$-linéaire $\varphi\colon V \to W$ tel que $\varphi \circ \rho(g) = \pi(g) \circ \varphi$ pour tout $g \in \mathrm{G}$. On parle aussi de G-morphisme, ou encore d'application linéaire G-équivariante.

Le but de cet exercice est de montrer que le centre du groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est le groupe des homothéties. Soit ρ l'action naturelle de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}^n$.

a) Montrer que la représentation ρ est irréductible.

b) Montrer que tout élément du centre de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est un morphisme de la représentation ρ.

c) Conclure en utilisant le Lemme de Schur.

Exercice 7

On rappelle qu'un morphisme $(\rho, V) \to (\pi, W)$ entre deux représentations de G est un morphisme $\mathbb{C}$-linéaire $\varphi\colon V \to W$ tel que $\varphi \circ \rho(g) = \pi(g) \circ \varphi$ pour tout $g \in \mathrm{G}$. On parle aussi de G-morphisme, ou encore d'application linéaire G-équivariante.

Soit G un groupe abélien.

a) Si $\rho\colon \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation de G, montrer que tout élément g de G définit un G-morphisme $V \to V$.

b) En déduire que toute représentation irréductible de G est de dimension 1.

c) Donner toutes les représentations irréductibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.