Feuille d'exercices n° 2

Exercice 1

On dit qu'un élément g d'un groupe G est indéfiniment divisible si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un élément h de G tel que $h^n = g$.

1. Quels sont les éléments indéfiniment divisibles de $(\mathbb{Q}, +)$? Quels sont les éléments indéfiniment divisibles de $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$?
2. Soit $\varphi\colon (\mathbb{Q}, +) \to (\mathbb{Q}_+^*, \times)$ un homomorphisme de groupes.
   Pour tout entier $n > 0$ calculer $\varphi(n)$, puis $\varphi(1/n)$ en fonction de $\varphi(1)$.
3. Montrer que φ est constant.
4. En déduire que $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$ ne sont pas isomorphes.

Remarque : par contre $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sont isomorphes ; la fonction $x \mapsto \exp x$ réalise un isomorphisme entre ces deux groupes.

Exercice 2

Soit G un groupe. Soient H et K deux sous-groupes de G.
Montrer que $\mathrm{H} \cup \mathrm{K}$ est un sous-groupe de G si et seulement si $\mathrm{H} \subset \mathrm{K}$ ou $\mathrm{K} \subset \mathrm{H}$.
En déduire qu'un groupe n'est jamais la réunion de deux de ses sous-groupes propres.

Exercice 3

Soit G un groupe abélien.
Montrer que les éléments d'ordre fini de G forment un sous-groupe de G.

Exercice 4

Soit G un groupe possédant un seul élément d'ordre 2. Notons le g.
Montrer que g est dans le centre de G.

Exercice 5

Soit p un nombre premier. Montrer qu'à isomorphisme près il y a un seul groupe d'ordre p.

Exercice 6

1. Déterminer l'ensemble des éléments d'ordre fini de $\mathrm{G} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$).
2. Soit H′ l'ensemble des éléments d'ordre infini de G. Considérons $\mathrm{H} = \mathrm{H}' \cup \{e\}$ où e est l'élément neutre de G.
   Montrer que, même si H n'est pas vide, H n'est pas un sous-groupe de G.

Exercice 7

Soit G un groupe abélien infini. Montrer que l'ensemble T des éléments d'ordre fini de G est un sous-groupe de G.
Si $\mathrm{T} = \{e\}$, on dit que G est sans torsion.
Montrer que G/T est sans torsion.

Exercice 8

a) Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$. Montrer que G est ou bien dense dans $\mathbb{R}$, ou bien monogène, *i.e.* de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a > 0$ (donc discret).
b) Soient α et β deux réels non nuls. Discuter de la nature du sous-groupe additif qu'ils engendrent.

c) Soit $\beta \notin \mathbb{Q}$. Montrer que $\mathbb{N}\beta + \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

d) Soit $\vartheta \notin 2\pi\mathbb{Q}$. Montrer que $\{\exp(\mathbf{i}n\vartheta) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans le cercle unité $\mathbb{S}^1$ de $\mathbb{C}$.
En déduire
   i) qu'un sous-groupe G de $\mathbb{S}^1$ est soit fini (auquel cas égal au groupe des racines $n$ièmes de l'unité où $n = |\mathrm{G}|$), soit dense dans $\mathbb{S}^1$;
   ii) les valeurs d'adhérence de la suite $(\sin(n))_{n\geqslant 0}$.

Exercice 9 Soit $p > 2$ un nombre premier. Soit G un groupe non abélien d'ordre $2p$.

(1) Montrer qu'il existe x, y dans G avec d'ordre 2, y d'ordre p et $\mathrm{G} = \langle x, y \rangle$.

(2) Montrer que $xyx = y^i$ pour un certain $2 \leqslant i \leqslant p-1$, puis montrer que $i^2 \equiv 1 \bmod p$, et en déduire que $i = p-1$.

(3) Montrer que G est isomorphe au groupe diédral D_{2p}.

Exercice 10
Notons $\mathrm{T} \subset \mathrm{GL}\left(3, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\right)$ le sous-groupe des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec a, b et c dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(1) Montrer que tout élément non trivial de T est d'ordre 3.

(2) Le groupe T est-il isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$?

(3) En quoi cet exemple est-il intéressant ?