Feuille d'exercices n° 5

Exercice 1
Soit G un groupe de type fini.
Un sous-groupe H de G est-il nécessairement de type fini ? Justifiez votre réponse.

Exercice 2
Soit G un groupe abélien.
Montrer que $T(\mathrm{G}) = \{g \in \mathrm{G} \mid o(g) < \infty\}$ est un sous-groupe de G (appelé le sous-groupe de torsion de G).
Donner un exemple explicite pour lequel $T(\mathrm{G})$ n'est pas un sous-groupe de G si G n'est pas abélien.

Exercice 3
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Trouver le sous-groupe de torsion de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Montrer que l'ensemble des éléments d'ordre infini et l'élément neutre ne forment pas un sous-groupe de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 4

a) Donner un exemple de groupe abélien qui n'est pas de type fini.
b) Si p est un nombre premier, quel est le groupe sous-jacent au corps $\mathbb{F}_{p^n}$?
c) Soient n, $m \geqslant 1$ deux entiers. Posons $\delta := \mathrm{pgcd}(n, m)$ et $\mu := \mathrm{ppcm}(n, m)$.
Montrer que les groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/\delta\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\mu\mathbb{Z}$ sont isomorphes.
d) Montrer qu'un groupe abélien de type fini et de torsion est fini (ceci n'est plus vrai pour les groupes non-abéliens : voir par exemple [Calais, p. 294]).
e) Montrer qu'un groupe abélien fini est le produit de ses sous-groupes de Sylow.

Exercice 5
Soit G un groupe abélien fini. Montrer qu'il existe dans G un élément dont l'ordre est égal à l'exposant de G.

Exercice 6

a) Donner la décomposition primaire du groupe $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$. En déduire ses facteurs invariants.
b) Donner la décomposition primaire du groupe $\mathbb{Z}/54\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/26\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$. En déduire ses facteurs invariants.

Exercice 7

a) Le nombre de classes de conjugaison dans $\mathcal{S}_5$ est le même que le nombre de groupes abéliens de cardinal 32 à isomorphisme près. Pourquoi ?
b) Généraliser au nombre de classes de conjugaison dans $\mathcal{S}_n$.

Exercice 8
Déterminer la structure des groupes abéliens de type fini suivants :

$$\mathbb{Z}^2/\langle(1,3),(2,0)\rangle \qquad\qquad \mathbb{Z}^2/\langle(1,1),(1,-1)\rangle.$$

Exercice 9
Soit H le sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$ engendré par $(2,5)$, $(5,-1)$ et $(1,-2)$. Déterminer une base de H et décrire le quotient $\mathbb{Z}^2/\mathrm{H}$.

Exercice 10

Trouver une base du groupe suivant :

$$\mathrm{G} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \;\middle|\; \begin{cases} 2x + 3y + 5z = 0 \\ 3x - 6y + 2z = 0 \end{cases} \right\}$$

Exercice 11

Soit G un groupe abélien fini.

Supposons que pour tout diviseur d de l'ordre n de G, il existe un et un seul sous-groupe d'ordre d dans G. Montrer que G est cyclique.

Exercice 12

1. Les groupes $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/48\mathbb{Z}$ sont-ils isomorphes ?
2. Les groupes $\mathbb{Z}/72\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/84\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/168\mathbb{Z}$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 13

Soit $\mathrm{G} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. Considérons les deux sous-groupes suivants de G :

$$\mathrm{H} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \{0\} \qquad\qquad \mathrm{K} = \{0\} \times \{0,\, 6\}.$$

Remarquons que $\mathrm{G} \simeq \mathrm{K} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mais avons-nous $\mathrm{G}/\mathrm{H} \simeq \mathrm{G}/\mathrm{K}$?

Exercice 14

Soient G, H et K des groupes abéliens finis.

1. Montrer que si $\mathrm{G} \times \mathrm{G} \simeq \mathrm{H} \times \mathrm{H}$, alors $\mathrm{G} \simeq \mathrm{H}$.
2. Montrer que si $\mathrm{G} \times \mathrm{K} \simeq \mathrm{H} \times \mathrm{K}$, alors $\mathrm{G} \simeq \mathrm{H}$.

Exercice 15

1. Exprimer tous les groupes abéliens d'ordre 99 comme sommes directes de sous-groupes cycliques.
2. Exprimer tous les groupes abéliens d'ordre 100 comme sommes directes de sous-groupes cycliques.

Exercice 16

Combien existe-t-il, à isomorphisme près, de groupes abéliens d'ordre 10^6 ?

Exercice 17

a) Déterminer à isomorphisme près tous les groupes abéliens d'ordre 12 et 72.

b) Déterminer à isomorphisme près tous les groupes abéliens d'ordre 10^6.

Exercice 18

Montrer que les groupes $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/90\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ sont isomorphes.

Exercice 19

Montrer qu'un groupe abélien fini non cyclique possède un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour un certain nombre premier p.

Exercice 20

a) Combien y a-t-il de groupes abéliens de cardinal 360 ? Faire la liste complète de ces groupes.

b) Plus généralement, pour tout entier n, combien y a-t-il de groupes abéliens de cardinal n ?

Exercice 21

a) On considère $\mathrm{H} = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a - b \text{ est divisible par } 10\}$. Montrer que H est un sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$. Calculer le rang de H. Donner une base de H. Décrire le quotient $\mathbb{Z}^2/\mathrm{H}$.

b) On note H le quotient de $\mathbb{Z}^3$ par le sous-groupe engendré par les vecteurs $(4, 8, 10)$ et $(6, 2, 0)$. Déterminer la structure du groupe H.

Exercice 22

Déterminer les facteurs invariants des matrices suivantes à coefficients dans $\mathbb{Z}$:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 69 & -153 \\ 12 & -27 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 12 & -6 & 2 \\ 75 & -41 & 13 \\ 19 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 23

Soit $\mathbb{k}$ un corps commutatif. Soit G un sous-groupe fini du groupe multiplicatif $\mathbb{k}^\times = \mathbb{k} \smallsetminus \{0\}$ de $\mathbb{k}$. Montrer que G est cyclique.