Feuille d'exercices "actions de groupes"

Exercice 1 [Action par conjugaison]
Soit G un groupe fini.

1. On définit l'application suivante
$$\mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}, \qquad (g, x) \mapsto g \cdot x = gxg^{-1}$$
Montrer qu'il s'agit d'une action du groupe G sur lui-même.
2. Lorsqu'un groupe G agit sur un ensemble X on appelle *points fixes* les éléments de X qui sont invariants sous l'action de G. Ils forment l'ensemble $\{x \in X \mid g \cdot x = x \quad \forall g \in \mathrm{G}\}$.
Décrire les points fixes de l'action par conjugaison d'un groupe G sur lui-même.
3. Dans le cas $\mathrm{G} = \mathcal{S}_4$ décrire les orbites et les stabilisateurs.
4. Combien y a-t-il d'orbites pour l'action par conjugaison de $\mathcal{S}_{10}$ sur lui-même ?

Solution 1 Soit G un groupe fini.

1. On définit l'application suivante
$$\mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}, \qquad (g, x) \mapsto g \cdot x = gxg^{-1}$$
Montrons qu'il s'agit d'une action du groupe G sur lui-même.
Le neutre agit trivialement :
$$e \cdot x = exe^{-1} = exe = x.$$
Pour tous g_1, g_2, x dans G nous avons
$$g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = g_1 \cdot (g_2 x g_2^{-1}) = g_1 g_2 x g_2^{-1} g_1^{-1} = (g_1 g_2) x (g_1 g_2)^{-1} = (g_1 g_2) \cdot x.$$
2. Lorsqu'un groupe G agit sur un ensemble X on appelle *points fixes* les éléments de X qui sont invariants sous l'action de G. Ils forment l'ensemble $\{x \in X \mid g \cdot x = x \quad \forall g \in \mathrm{G}\}$.
Un élément $x \in \mathrm{G}$ est un point fixe si et seulement si pour tout $g \in \mathrm{G}$ $g \cdot x = x$. Or $g \cdot x = x$ se réécrit $gxg^{-1} = x$ ou encore $gx = xg$. Les points fixes pour l'action par conjugaison d'un groupe sur lui-même sont donc les éléments qui commutent avec tous les autres, c'est-à-dire les éléments du centre de G.
3. Supposons $\mathrm{G} = \mathcal{S}_4$.
Rappelons que $\mathcal{S}_4$ compte $24 = 4!$ éléments qui sont

$$\mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Les différentes orbites sont
- ⋄ $\mathcal{O}_{\mathrm{id}} = \big\{g \cdot \mathrm{id} \,|\, g \in \mathrm{G}\big\} = \big\{g\mathrm{id}g^{-1} \,|\, g \in \mathrm{G}\big\} = \big\{\mathrm{id} \,|\, g \in \mathrm{G}\big\} = \{\mathrm{id}\}$;
- ⋄ $\mathcal{O}_{(1\ 2)} = \big\{g \cdot (1\ 2) \,|\, g \in \mathrm{G}\big\} = \big\{(1\ 2),\ (1\ 3),\ (1\ 4),\ (2\ 3),\ (2\ 4),\ (3\ 4)\big\}$;
- ⋄ $\mathcal{O}_{(1\ 2)(3\ 4)} = \big\{g \cdot (1\ 2)(3\ 4) \,|\, g \in \mathrm{G}\big\} = \big\{(1\ 2)(3\ 4),\ (1\ 3)(2\ 4),\ (1\ 4)(2\ 3)\big\}$;
- ⋄ $\mathcal{O}_{(1\ 2\ 3)} = \big\{g \cdot (1\ 2\ 3) \,|\, g \in \mathrm{G}\big\} = \big\{(1\ 2\ 3),\ (1\ 3\ 2),\ (1\ 3\ 4),\ (1\ 4\ 3),\ (2\ 3\ 4),\ (2\ 4\ 3),\ (1\ 2\ 4),\ (1\ 4\ 2)\big\}$;
- ⋄ $\mathcal{O}_{(1\ 2\ 3\ 4)} = \big\{g \cdot (1\ 2\ 3\ 4) \,|\, g \in \mathrm{G}\big\} = \big\{(1\ 2\ 3\ 4),\ (1\ 2\ 4\ 3),\ (1\ 3\ 2\ 4),\ (1\ 3\ 4\ 2),\ (1\ 4\ 2\ 3),\ (1\ 4\ 3\ 2)\big\}$.

Les stabilisateurs correspondants sont
- ⋄ $\mathrm{G}_{\mathrm{id}} = \big\{g \in \mathrm{G} \,|\, g \cdot \mathrm{id} = \mathrm{id}\big\} = \big\{g \in \mathrm{G} \,|\, g\mathrm{id}g^{-1} = \mathrm{id}\big\} = \mathrm{G}$
- ⋄ $\mathrm{G}_{(1\ 2)} = \big\{g \in \mathrm{G} \,|\, g \cdot (1\ 2) = (1\ 2)\big\} = \big\{g \in \mathrm{G} \,|\, g(1\ 2)g^{-1} = (1\ 2)\big\} = \big\{g \in \mathrm{G} \,|\, g(1\ 2) = (1\ 2)g\big\} = \big\{\mathrm{id},\ (1\ 2),\ (3\ 4),\ (1\ 2)(3\ 4)\big\}$
- ⋄ $\mathrm{G}_{(1\ 2)(3\ 4)} = \big\{g \in \mathrm{G} \,|\, g \cdot (1\ 2)(3\ 4) = (1\ 2)(3\ 4)\big\} = \big\{g \in \mathrm{G} \,|\, g(1\ 2)(3\ 4)g^{-1} = (1\ 2)(3\ 4)\big\} = \big\{g \in \mathrm{G} \,|\, g(1\ 2)(3\ 4) = (1\ 2)(3\ 4)g\big\} = \big\{\mathrm{id},\ (12),\ (3\ 4),\ (1\ 2)(3\ 4),\ (1\ 3)(2\ 4),\ (1\ 4)(2\ 3),\ (1\ 3\ 2\ 4),\ (1\ 4\ 2\ 3)\big\}$
- ⋄ $\mathrm{G}_{(1\ 2\ 3)} = \big\{g \in \mathrm{G} \,|\, g \cdot (1\ 2\ 3) = (1\ 2\ 3)\big\} = \big\{g \in \mathrm{G} \,|\, g(1\ 2\ 3)g^{-1} = (1\ 2\ 3)\big\} = \big\{g \in \mathrm{G} \,|\, g(1\ 2\ 3) = (1\ 2\ 3)g\big\} = \big\{\mathrm{id},\ (1\ 2\ 3),\ (1\ 3\ 2)\big\}$
- ⋄ $\mathrm{G}_{(1\ 2\ 3\ 4)} = \big\{g \in \mathrm{G} \,|\, g \cdot (1\ 2\ 3\ 4) = (1\ 2\ 3\ 4)\big\} = \big\{g \in \mathrm{G} \,|\, g(1\ 2\ 3\ 4)g^{-1} = (1\ 2\ 3\ 4)\big\} = \big\{g \in \mathrm{G} \,|\, g(1\ 2\ 3\ 4) = (1\ 2\ 3\ 4)g\big\} = \big\{\mathrm{id},\ (1\ 2\ 3\ 4),\ (1\ 3)(2\ 4),\ (1\ 4\ 3\ 2)\big\}$

Notons que dans chaque cas nous avons $|\mathrm{G}| = |\mathrm{G}_x| \times |\mathcal{O}_x|$.

4. Déterminons le nombre d'orbites pour l'action par conjugaison de $\mathcal{S}_{10}$ sur lui-même.

   Toute permutation de $\mathcal{S}_n$ s'écrit de manière unique comme produit de cycles à support disjoint. Ici on compte aussi les cycles de longueur 1 et on note la liste des tailles des cycles. Par exemple à la permutation $(2\ 7)(1\ 3\ 4)(8\ 9\ 10) = (5)(6)(2\ 7)(1\ 3\ 4)(8\ 9\ 10)$ on associe le 5-uplet $(1, 1, 2, 3, 3)$. On ordonne toujours ce k-uplet par ordre croissant (les cycles à support disjoint commutent). La somme des éléments de ce k-uplet vaut n (ici 10). Un tel k-uplet est appelé une partition du nombre n. Il y a une bijection entre les partitions de 10 et les orbites de $\mathcal{S}_{10}$ sous l'action de lui-même par conjugaison. Et on a 42 partitions du nombre 10 donc 42 orbites pour l'action par conjugaison de $\mathcal{S}_{10}$ sur lui-même.

Exercice 2

Soit G un sous-groupe de $\mathcal{S}_4$ opérant sur $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ par l'action naturelle de $\mathcal{S}_4$. Pour $1 \leqslant i \leqslant 4$ on note $\mathcal{O}_i$ l'orbite de i et S_i le stabilisateur de i. Déterminer $\mathcal{O}_i$ et S_i pour les cas suivants :
- ⋄ G est le groupe engendré par le 3-cycle $(1\ 2\ 3)$.
- ⋄ G est le groupe engendré par le 4-cycle $(1\ 2\ 3\ 4)$.
- ⋄ G est le groupe engendré par les double transpositions.
- ⋄ $\mathrm{G} = \mathcal{A}_4$.

Solution 2

- ⋄ Par symétrie il suffit d'étudier les cas $i = 1$ et $i = 4$.

  Pour $i = 4$ c'est plus facile car aucun élément de G ne modifie 4. Ainsi $\mathcal{O}_4 = \{4\}$ et $S_4 = \mathrm{G}$.

  Ensuite si $s = (1\ 2\ 3)$, alors $s(1) = 2$ et $s \circ s(1) = 3$ d'où

$$\mathcal{O}_1 = \{g \cdot 1 \,|\, g \in \mathrm{G}\} = \{g(1) \,|\, g \in \mathrm{G}\} = \{\mathrm{id}(1),\ s(1),\ s \circ s(1)\} = \{1,\ 2,\ 3\}.$$

  Puisque $\mathrm{G} = \{\mathrm{id},\ s,\ s^2\}$ nous obtenons que

$$S_1 = \{g \in \mathrm{G} \,|\, g \cdot 1 = 1\} = \{g \in \mathrm{G} \,|\, g(1) = 1\} = \{\mathrm{id}\}$$

◇ Par symétrie il suffit d'étudier le cas $i = 1$. Par un raisonnement analogue au précédent nous constatons que
$$S_1 = \{g \in \mathrm{G} \,|\, g \cdot 1 = 1\} = \{g \in \mathrm{G} \,|\, g(1) = 1\} = \{\mathrm{id}\}$$
et
$$\mathcal{O}_1 = \{g \cdot 1 \,|\, g \in \mathrm{G}\} = \{g(1) \,|\, g \in \mathrm{G}\} = \{1,\, 2,\, 3,\, 4\}.$$
En effet si $s = (1\ 2\ 3\ 4)$, alors $\mathrm{G} = \{\mathrm{id},\, s,\, s^2,\, s^3\}$.

◇ Par symétrie il suffit d'étudier le cas $i = 1$.
Le produit de deux double transpositions est ou bien l'identité, ou bien une double transposition. Une double transposition ne fixe aucun élément de $\{1,\, 2,\, 3,\, 4\}$ et on peut trouver une double transposition qui envoie 1 sur n'importe quel élément de $\{2,\, 3,\, 4\}$. En résumé nous avons
$$\mathcal{O}_1 = \{1,\, 2,\, 3,\, 4\} \qquad\qquad S_1 = \{\mathrm{id}\}.$$

◇ Par symétrie il suffit d'étudier le cas $i = 1$.
Les éléments de $\mathcal{A}_4$ sont l'identité, les double transpositions et les 3-cycles. D'après la question précédente $\mathcal{O}_1 = \{1,\, 2,\, 3,\, 4\}$ puisque l'orbite de 1 par $\mathcal{A}_4$ contient au moins l'orbite de 1 par les double transpositions. Déterminons maintenant le stabilisateur de 1. Une double transposition ne peut pas être dans le stabilisateur de 1. D'après la première question les 3-cycles qui stabilisent 1 sont ceux qui n'ont pas 1 dans leur support, on a donc $S_1 = \big\{\mathrm{id},\, (2\ 3\ 4),\, (2\ 4\ 3)\big\}$.

Exercice 3

Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$. On fait agir G sur le plan affine euclidien en choisissant un point O de cet espace et en identifiant $\mathbb{R}^2$ et les vecteurs d'origine O. Décrire l'orbite d'un point A quand G est le sous-groupe engendré par

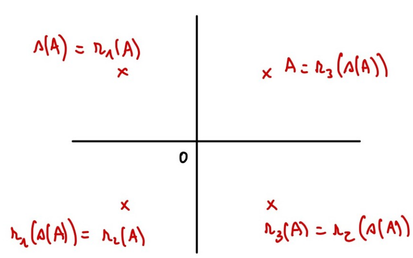
◇ une symétrie s par rapport à une droite D passant par O ;
◇ une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ de centre O ;
◇ une rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, de centre O et une symétrie s par rapport à une droite D passant par O.

Solution 3

◇ Puisque $s = s^{-1}$ nous avons $\mathrm{G} = \{\mathrm{id},\, s\}$ et l'orbite de A est constituée de A et de son image par la symétrie (ces deux points sont confondus si et seulement si $A = O$) :
$$\mathcal{O}_A = \big\{g \cdot A \,|\, g \in \mathrm{G}\big\} = \big\{g(A) \,|\, g \in \mathrm{G}\big\} = \big\{\mathrm{id}(A)\big\} \cup \big\{s(A)\big\} = \big\{A,\, s(A)\big\}.$$

◇ Le groupe engendré par cette rotation est le groupe des rotations d'angle $\frac{k\pi}{2}$ avec $0 \leqslant k \leqslant 3$. Ainsi l'orbite du point A est constituée des sommets du carré de centre O et dont un des sommets est A :
$$\mathcal{O}_A = \big\{g \cdot A \,|\, g \in \mathrm{G}\big\} = \big\{g(A) \,|\, g \in \mathrm{G}\big\} = \big\{A,\, r_{\pi/2}(A),\, r_{\pi}(A),\, r_{3\pi/2}(A)\big\}$$
où r_α désigne la rotation de centre O et d'angle α.

◇ Notons r_k la rotation d'angle $\frac{2k\pi}{n}$. Alors le groupe G est constitué des éléments r_k et $r_k \circ s$. L'orbite de A est donc constituée des n sommets du polygone régulier de centre O dont un des sommets est A et par leurs symétriques par rapport à la droite D.
Notons que ces $2n$ points ne sont plus que n points quand la droite passe par un des sommets ou est la médiatrice d'un des côtés du polygone. C'est en effet par exemple le cas dans la situation suivante :



n = 4 et s symétrie par rapport à l'axe des ordonnées

Exercice 4

Soit $n \geqslant 3$ un entier. Considérons les matrices suivantes de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix}$$

Notons G le sous-groupe de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ engendré par σ et τ ; désignons par H le sous-groupe de G engendré par σ et K le sous-groupe de G engendré par τ :

$$\mathrm{G} = \langle \sigma, \tau \rangle, \qquad \mathrm{H} = \langle \sigma \rangle, \qquad \mathrm{K} = \langle \tau \rangle.$$

Posons $\mathrm{K}' = \{ g \in \mathrm{G} \mid \det g = 1 \}$ et définissons les vecteurs X_0 et Y_0 de $\mathbb{R}^2$ par

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad Y_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Donner l'ordre de σ.
2. Donner une interprétation géométrique pour τ et donner son ordre.
3. Si G est d'ordre fini, que peut-on dire sur son ordre ?
4. Montrer que $\sigma\tau = \tau^{n-1}\sigma$.
5. Donner tous les éléments de G, H et K.
6. Combien y a-t-il de classes à gauche de G modulo H ?
7. Décrire G/H.
8. A-t-on $\mathrm{H} \lhd \mathrm{G}$? Si oui décrire le groupe quotient G/H.
9. A-t-on $\mathrm{K} \lhd \mathrm{G}$? Si oui décrire le groupe quotient G/K.
10. Le sous-ensemble K′ de G est-il un sous-groupe de G ? Si oui, a-t-on $\mathrm{K}' \lhd \mathrm{G}$?
11. Comparer K et K′.
12. Existe-t-il un sous-groupe de G isomorphe à G/K ?
13. Calculer $D(\mathrm{G})$. À quel groupe est isomorphe $\mathrm{G}/D(\mathrm{G})$?
14. Montrer que la multiplication des matrices définit une action
$$\mathrm{G} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (M, X) \mapsto M \cdot X = MX$$
15. L'action est-elle transitive ?
16. L'action est-elle fidèle ?
17. Quels sont les points fixes de l'action ?
18. Quel est le stabilisateur G_{X_0} du vecteur X_0 ?
19. Décrire l'orbite du vecteur X_0.
20. Quel est le stabilisateur G_S du segment $S = [X_0, Y_0]$?

Solution 4

1. Donnons l'ordre de σ.
Nous avons $\sigma \neq \mathrm{id}$ mais $\sigma^2 = \mathrm{id}$ donc σ est d'ordre 2.
2. Donnons une interprétation géométrique pour τ et donnons son ordre.
On voit que τ est la rotation de centre $O = (0,0)$ et d'angle $\frac{2\pi}{n}$. En particulier τ est d'ordre n. On peut de plus déterminer τ^k :
$$\tau^k = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \end{pmatrix}$$
3. Si G est d'ordre fini, alors son ordre est divisible d'une part par 2 et d'autre part par n, donc par $\mathrm{ppcm}(2, n)$.

4. Montrons que $\sigma\tau = \tau^{n-1}\sigma$. Un calcul direct assure que $\sigma\tau\sigma^{-1} = \tau^{-1}$:

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = \sigma\tau\sigma = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{2\pi}{n}\right) & -\sin\left(-\frac{2\pi}{n}\right) \\ \sin\left(-\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(-\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix} = \tau^{-1}$$

On en déduit que $\sigma\tau\sigma^{-1} = \tau^{n-1}$ puis que $\sigma\tau = \tau^{n-1}\sigma$.

5. Donnons tous les éléments de G, H et K.
Puisque σ est d'ordre 2, nous avons $\mathrm{H} = \{\mathrm{id},\, \sigma\}$.
Comme τ est d'ordre n, nous avons $\mathrm{K} = \{\mathrm{id},\, \tau,\, \tau^2,\, \dots,\, \tau^{n-1}\}$.
Nous avons $\mathrm{G} = \{\mathrm{id},\, \tau,\, \tau^2,\, \dots,\, \tau^{n-1},\, \sigma,\, \tau\sigma,\, \tau^2\sigma,\, \dots,\, \tau^{n-1}\sigma\}$. En effet d'une part un élément de G s'écrit

$$(\sigma)\tau^{i_1}\sigma\tau^{i_2}\sigma\dots\sigma\tau^{i_k}(\sigma)$$

d'autre part $\sigma\tau\sigma^{-1} = \tau^{n-1}$ implique $\sigma\tau^\ell\sigma^{-1} = \tau^{\ell(n-1)}$ et $\sigma\tau^\ell = \tau^{\ell(n-1)}\sigma$. En effet montrons par exemple par récurrence qu'un élément de la forme $(\sigma)\tau^{i_1}\sigma\tau^{i_2}\sigma\dots\sigma\tau^{i_k}(\sigma)$ avec k pair est de la forme τ^ℓ ou $\tau^\ell\sigma$:
   - ◇ commençons par considérer un élément de la forme $\sigma\tau^{i_1}\sigma\tau^{i_2}\sigma\dots\sigma\tau^{i_k}$ avec k pair. Montrons par récurrence sur k qu'il s'écrit aussi τ^κ pour un certain κ. C'est vrai pour $k=2$, en effet

$$\underbrace{\sigma\tau^{i_1}}_{\tau^{i_1(n-1)}\sigma}\sigma\tau^{i_2} = \tau^{i_1(n-1)}\sigma\sigma\tau^{i_2} = \tau^{i_1(n-1)}\tau^{i_2} = \tau^{i_1(n-1)+i_2}$$

     Soit k un entier pair. Supposons que la propriéé soit vraie pour tout $j \leqslant k$ pair et montrons qu'alors c'est vrai pour $k+2$

$$\underbrace{\sigma\tau^{i_1}\sigma\tau^{i_2}\sigma\dots\sigma\tau^{i_k}}_{\tau^{\kappa_1}}\underbrace{\sigma\tau^{i_{k+1}}\sigma\tau^{i_{k+2}}}_{\tau^{\kappa_2}} = \tau^{\kappa_1}\tau^{\kappa_2} = \tau^{\kappa_1+\kappa_2}$$

   - ◇ considérons un élément de la forme $\tau^{i_1}\sigma\tau^{i_2}\sigma\dots\sigma\tau^{i_k}$ avec k pair, alors

$$\tau^{i_1}\sigma\tau^{i_2}\sigma\dots\sigma\tau^{i_k} = \sigma\underbrace{\sigma\tau^{i_1}\sigma\tau^{i_2}\sigma\dots\sigma\tau^{i_k}}_{\tau^\kappa} = \sigma\tau^\kappa = \tau^{\kappa(n-1)}\sigma$$

   - ◇ finalement considérons un élément de la forme $\tau^{i_1}\sigma\tau^{i_2}\sigma\dots\sigma\tau^{i_k}\sigma$ avec k pair ; d'après le premier point il s'écrit $\tau^\kappa\sigma$.

   Un raisonnement analogue permet de conclure lorsque k est impair.

6. Déterminons le nombre de classes à gauche de G modulo H.
L'ensemble des classes à gauche de G modulo H est l'ensemble G/H. Son cardinal est $\left|\mathrm{G}/\mathrm{H}\right| = [\mathrm{G}:\mathrm{H}] = \frac{|\mathrm{G}|}{|\mathrm{H}|}$.
D'après la question précédente nous avons $|\mathrm{G}| = 2n$, $|\mathrm{H}| = 2$ et donc $\left|\mathrm{G}/\mathrm{H}\right| = \frac{|\mathrm{G}|}{|\mathrm{H}|} = n$.

7. Décrivons G/H.
La description de G nous permet d'affirmer que

$$\mathrm{G}/\mathrm{H} = \left\{\overline{\mathrm{id}},\, \overline{\tau},\, \dots,\, \overline{\tau^{n-1}}\right\}.$$

8. Le sous-groupe H de G n'est pas distingué dans G ; en effet

$$\tau^{-1}\sigma\tau = \tau^{-1}\tau^{n-1}\sigma = \tau^{n-2}\sigma \not\in \mathrm{H}.$$

9. Nous avons $[\mathrm{G}:\mathrm{K}] = \frac{|\mathrm{G}|}{|\mathrm{K}|} = \frac{2n}{2} = 2$. Ainsi K est un sous-groupe d'indice 2 de G ; il est donc distingué dans G.
Le groupe quotient G/K est d'ordre 2 donc isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Nous avons $\mathrm{G}/\mathrm{K} = \left\{\overline{\mathrm{id}},\, \overline{\sigma}\right\}$.

10. L'application $\det\colon \mathrm{G} \to \mathbb{R}^*$ est un morphisme de groupes et K' est son noyau. Ainsi K' est un sous-groupe distingué de G.

11. Comparons K et K'.
Remarquons que $\det\tau = \cos^2\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 1$ donc τ appartient à K'. Ainsi $\mathrm{K} = \langle\tau\rangle \subset \mathrm{K}'$.
De plus $\det\sigma = -1$, par conséquent $\det(\tau^k\sigma) = -1$ et $\mathrm{K} = \mathrm{K}'$.

12. Les groupes H et G/K sont d'ordre 2, donc sont isomorphes. Il en résulte qu'il existe un sous-groupe de G (le sous-groupe H) isomorphe à G/K.

13. Calculons $D(\mathrm{G})$.
Le groupe G n'est pas abélien : $\sigma\tau = \tau^{n-1}\sigma \neq \tau\sigma$ car $n \neq 2$. Par conséquent $D(\mathrm{G}) \neq \{\mathrm{id}\}$.
De plus G/K est abélien ; $\mathrm{G}/D(\mathrm{G})$ étant le plus grand quotient abélien $D(\mathrm{G}) \subset \mathrm{K}$.
Calculons $[\sigma, \tau]$:
$$[\sigma,\tau] = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1} = \tau^{-1}\tau^{-1} = \tau^{-2}$$
ainsi τ^{-2} appartient à $D(\mathrm{G})$ et τ^2 appartient à $D(\mathrm{G})$. Finalement $\langle\tau^2\rangle \subset D(\mathrm{G})$.
Si n est impair, alors n est premier avec 2 et l'ordre de τ^2 est $\frac{n}{\mathrm{pgcd}(2,n)} = n$ donc $\langle\tau^2\rangle = \langle\tau\rangle$ et $\mathrm{K} = \langle\tau\rangle \subset D(\mathrm{G})$. Finalement $D(\mathrm{G}) = \mathrm{K} = \langle\tau\rangle = \langle\tau^2\rangle$. Dans ce cas nous avons $\mathrm{G}/D(\mathrm{G}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
Si $n = 2m$ est pair, montrons que
$$D(\mathrm{G}) = \langle\tau^2\rangle = \{\mathrm{id},\, \tau^2,\, \tau^4,\, \dots,\, \tau^{n-2}\} = \{\mathrm{id},\, \tau^2,\, \tau^4,\, \dots,\, \tau^{2(m-1)}\}.$$
Nous avons vu que $\langle\tau^2\rangle \subset D(\mathrm{G})$. Montrons que $\langle\tau^2\rangle \triangleleft \mathrm{G}$. Soit $y = \tau^{2a} \in \langle\tau^2\rangle$ et $x \in \mathrm{G}$; nous avons $x = \tau^k$ ou $x = \tau^k\sigma$. Dans le premier cas nous obtenons
$$xyx^{-1} = \tau^k\tau^{2a}\tau^{-k} = \tau k + 2a - k = \tau 2a = y \in \langle\tau^2\rangle.$$
Dans le second cas nous obtenons
$$xyx^{-1} = \tau^k\sigma\tau^{2a}(\tau^k\sigma)^{-1} = \tau^k \underbrace{\sigma\tau^{2a}}_{\tau^{2a(n-1)}\sigma} \sigma^{-1}\tau^{-k} = \tau^k\tau^{2a(n-1)}\sigma\sigma^{-1}\tau^{-k} = \tau^k\tau^{2a(n-1)}\tau^{-k} = \tau^{k+2a(n-1)-k} = \tau^{2a(n-1)} \in \langle\tau^2\rangle$$
Ainsi $\langle\tau^2\rangle \triangleleft \mathrm{G}$.
De plus τ^2 est d'ordre $\frac{n}{\mathrm{pgcd}(2,n)} = \frac{n}{2} = m$ donc $|\langle\tau^2\rangle| = m$. Ainsi le quotient $\mathrm{G}/\langle\tau^2\rangle$ est d'ordre $\frac{2n}{m} = 4$. Mais un groupe d'ordre 4 a ou bien un élément d'ordre 4 et est alors isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, ou bien n'a que des éléments d'ordre 2 et est isomorphe à un groupe de Klein. En particulier un groupe d'ordre 4 est abélien donc $\mathrm{G}/\langle\tau^2\rangle$ est abélien et $D(\mathrm{G}) \subset \langle\tau^2\rangle$. On obtient $D(\mathrm{G}) = \langle\tau^2\rangle$.
Il reste à déterminer $\mathrm{G}/D(\mathrm{G}) = \mathrm{G}/\langle\tau^2\rangle$ qui est d'ordre 4. On peut décrire $\mathrm{G}/D(\mathrm{G})$:
$$\mathrm{G}/D(\mathrm{G}) = \{\overline{\mathrm{id}},\, \overline{\sigma},\, \overline{\tau},\, \overline{\tau\sigma}\}.$$
Mais $\overline{\tau}^2 = \overline{\tau^2} = \mathrm{id}$ (car on quotiente par τ^2), $\overline{\sigma}^2 = \overline{\sigma^2} = \overline{\mathrm{id}}$ (car σ est d'ordre 2) et $\overline{\tau\sigma}^2 = \overline{\tau}^2\overline{\sigma}^2 = \overline{\mathrm{id}}$ (car le groupe est abélien). Ainsi tous les éléments de $\mathrm{G}/D(\mathrm{G})$ sont d'ordre 2 et $\mathrm{G}/D(\mathrm{G}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est un groupe de Klein.

14. Montrons que la multiplication des matrices définit une action
$$\mathrm{G} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (M, X) \mapsto M \cdot X = MX$$
D'une part $\mathrm{id} \cdot X = X$; d'autre part pour M, M' dans G nous avons
$$(MM') \cdot X = MM'X = M \cdot (M' \cdot X)$$
par l'associativité du produit matriciel. Nous avons donc bien une action de G sur $\mathbb{R}^2$.

15. L'action n'est pas transitive. L'orbite d'un vecteur $X \in \mathbb{R}^2$ est l'ensemble
$$\mathcal{O}_X = \{g \cdot X \mid g \in \mathrm{G}\} = \{gX \mid g \in \mathrm{G}\};$$
en particulier $\mathcal{O}_X$ compte au plus $2n$ éléments alors que $\mathbb{R}^2$ est infini. Il s'en suit qu'aucune orbite ne peut être égale à $\mathbb{R}^2$ tout entier.

16. L'action est fidèle : soit $g \in \mathrm{G}$ tel que $g \cdot X = X$ pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, *i.e.* tel que $gX = X$ pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, alors $g = \mathrm{Id}$.

17. Déterminons les points fixes de l'action, *i.e.* déterminons
$$\{X \in \mathbb{R}^2 \mid g \cdot X = X \quad \forall\, g \in \mathrm{G}\}.$$

Autrement dit nous cherchons les $X \in \mathbb{R}^2$ tels que $g \cdot X = X$ pour tout $g \in \mathrm{G}$. Remarquons que $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un point fixe. Montrons que c'est le seul. En effet si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un point fixe, alors en particulier $\sigma \cdot X = X$, c'est-à-dire $(x, -y) = (x, y)$ d'où $y = 0$. De plus nous avons $\tau \cdot X = X$ soit $\tau \cdot \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ qui se réécrit $\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) x \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$. En particulier $\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) x = 0$; mais pour $n \geqslant 3$, nous avons $\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \neq 0$ donc $x = 0$ et $X = (0, 0)$. Finalement $(0, 0)$ est l'unique point fixe de l'action.

18. Déterminons le stabilisateur

$$\mathrm{G}_{X_0} = \{g \in \mathrm{G} \mid g \cdot X_0 = X_0\} = \{g \in \mathrm{G} \mid gX_0 = X_0\}$$

du vecteur $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Remarquons que $\sigma \cdot X_0 = \sigma X_0 = X_0$, *i.e.* σ appartient à G_{X_0}.

Par ailleurs $\tau^k \cdot X_0 = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \end{pmatrix}$; ainsi $\tau^k \cdot X_0 = X_0$ si et seulement si $\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 1$ et $\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\frac{2k\pi}{n} \equiv 0 \pmod{2\pi}$, *i.e.* si et seulement si k est un multiple de n donc si et seulement si $\tau^k = \mathrm{id}$.

De même nous avons $\tau^k\sigma \cdot X_0 = X_0$ si et seulement si $\tau^k \cdot X_0 = X_0$ si et seulement si $\tau^k = \mathrm{id}$ si et seulement si $\tau^k\sigma = \sigma$.

Il en résulte que $\mathrm{G}_{X_0} = \{\mathrm{id}, \sigma\} = \mathrm{H}$.

19. Décrivons l'orbite du vecteur X_0.

Puisque $\mathcal{O}_{X_0}$ et ${}^{\mathrm{G}}\!/_{\mathrm{G}_{X_0}}$ sont en bijection nous avons

$$|\mathcal{O}_{X_0}| = \left|{}^{\mathrm{G}}\!/_{\mathrm{G}_{X_0}}\right|.$$

Or

$$\left|{}^{\mathrm{G}}\!/_{\mathrm{G}_{X_0}}\right| = [\mathrm{G} : \mathrm{G}_{X_0}] = [\mathrm{G} : \mathrm{H}] = \frac{|\mathrm{G}|}{|\mathrm{H}|} = \frac{2n}{2} = n.$$

Ainsi l'orbite du vecteur X_0 compte n éléments.

Les éléments $\tau^k \cdot X_0 = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \end{pmatrix}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, sont 2 à 2 distincts. Ils forment donc l'orbite de X_0.

20. Quel est le stabilisateur G_S du segment $S = [X_0, Y_0]$?

Comme $Y_0 = -X_0$ nous voyons que

$$\sigma \cdot Y_0 = \sigma \cdot (-X_0) = \sigma(-X_0) = -\sigma(X_0) = -X_0 = Y_0$$

donc $\sigma[X_0, Y_0] = [X_0, Y_0]$ et σ appartient à G_S.

Si g appartient à G_S, alors comme g est linéaire, g doit envoyer X_0 sur un élément de la droite $\langle X_0 \rangle = (X_0, Y_0)$. Cherchons de tels $g \in \mathrm{G}$. On a ou bien $g = \tau^k$, ou bien $g = \tau^k\sigma$ avec dans les deux cas $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Dans les deux éventualités

$$g \cdot X_0 = \tau^k X_0 = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \end{pmatrix}$$

Mais $\langle X_0 \rangle = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ donc on veut que $\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \equiv 0 \pmod{\pi}$ c'est-à-dire $\frac{2k\pi}{n} \equiv 0 \pmod{\pi}$.

Si n est impair, alors la seule possibilité est $k = 0$ et $\mathrm{G}_S = \{\mathrm{id}, \sigma\} = \mathrm{H}$.

Si $n = 2m$ est pair, alors nous avons deux possibilités : $k = 0$ et $k = m$. Pour $k = m$ nous avons

$$\tau^m = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2m\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2m\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2m\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2m\pi}{n}\right) \end{pmatrix}$$

Ainsi $\tau^m \cdot X_0 = Y_0$ et $\tau^m \cdot Y_0 = X_0$. Par suite $\tau^m \cdot S = S$. Finalement $\mathrm{G}_S = \{\mathrm{id}, \sigma, \tau^m, \tau^m\sigma\}$.

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

1. Montrer que le groupe $\mathrm{GL}(E)$ agit naturellement sur l'ensemble X des sous-espaces vectoriels de E.
2. Déterminer l'orbite de $F \in X$. Combien existe-t-il d'orbites ?
3. Déterminer le stabilisateur de $F \in X$.

Solution 5

1. Le groupe $\mathrm{GL}(E)$ est un sous-groupe du groupe $\mathcal{S}_E$ des bijections de E. Il agit à gauche sur E et donc sur $\mathcal{P}(E)$
$$\forall g \in \mathrm{G} \quad \forall X \in \mathcal{P}(E) \quad g \cdot X = \big\{g \cdot x \,|\, x \in X\big\}.$$
Soient $g \in \mathrm{GL}(E)$ et $F \in X$. Alors $g(F)$ est un sous-espace vectoriel de E. Donc X est une partie stable $\mathcal{P}(E)$ et $(g, F) \mapsto g(F)$ est une action de $\mathrm{GL}(E)$ sur X.
2. Soit $F \in X$ de dimension k. Pour tout $g \in \mathrm{GL}(E)$ nous avons $\dim g(F) = k$.
Réciproquement soit $F' \in X$ tel que $\dim F' = k$. Choisissons des bases $(e_1, e_2, \dots, e_k)$ de F et $(e'_1, e'_2, \dots, e'_k)$ de F'. On peut compléter ces familles libres de E et obtenir des bases $(e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_n)$ et $(e'_1, e'_2, \dots, e'_k, e'_{k+1}, e'_{k+2}, \dots, e'_n)$ de E. Il existe g une unique forme linéaire de E dans E telle que $g(e_i) = e'_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Puisque le rang de g est n et puisque $g(F) = F'$ nous avons : $g \in \mathrm{GL}(E)$. Ainsi F' appartient l'orbite de F. L'orbite de F est donc l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de même dimension que F. Il existe donc $n + 1$ orbites pour cette action.
3. Le stabilisateur de F est l'ensemble des $g \in \mathrm{GL}(E)$ qui laissent F invariant. C'est l'ensemble des $g \in \mathcal{L}(E)$ qui ont, dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_n)$ précédente, une matrice de la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathrm{M}_{k,k}$, $B \in \mathrm{M}_{k,n-k}$, $C \in \mathrm{M}_{n-k,n-k}$ et avec A et C inversibles car $\det A \det C = \det M \neq 0$.