Feuille d'exercices n° 1 :
Groupes, généralités

Exercice 1 Soit $\mathrm{G} = \{a + b\sqrt{2} \mid a \in \mathbb{Q},\, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$.

1. Montrer que G est un groupe pour l'addition.
2. Montrer que l'ensemble des éléments non nuls de G est un groupe pour la multiplication.

Exercice 2 Soit G un groupe. Soient H et K deux sous-groupes de G.
Montrer que $\mathrm{H} \cup \mathrm{K}$ est un sous-groupe de G si et seulement si $\mathrm{H} \subset \mathrm{K}$ ou $\mathrm{K} \subset \mathrm{H}$.
En déduire qu'un groupe n'est jamais la réunion de deux de ses sous-groupes propres.

Exercice 3 On dit qu'un élément g d'un groupe G est indéfiniment divisible si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un élément h de G tel que $h^n = g$.

1. Quels sont les éléments indéfiniment divisibles de $(\mathbb{Q}, +)$? Quels sont les éléments indéfiniment divisibles de $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$?
2. Soit $\varphi \colon (\mathbb{Q}, +) \to (\mathbb{Q}_+^*, \times)$ un homomorphisme de groupes.
   Pour tout entier $n > 0$ calculer $\varphi(n)$, puis $\varphi(1/n)$ en fonction de $\varphi(1)$.
3. Montrer que φ est constant.
4. En déduire que $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$ ne sont pas isomorphes.

Remarque : par contre $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sont isomorphes ; la fonction $x \mapsto \exp x$ réalise un isomorphisme entre ces deux groupes.

Exercice 4 Soit G un groupe fini. Montrer que, pour tout g et tout h dans G

1. g et g^{-1} ont même ordre ;
2. g et hgh^{-1} ont même ordre ;
3. gh et hg ont même ordre.

Exercice 5 Soit G un groupe abélien.
Montrer que les éléments d'ordre fini de G forment un sous-groupe de G.

Exercice 6 Soit G un groupe possédant un seul élément d'ordre 2. Notons le g.
Montrer que g est dans le centre de G.

Exercice 7 Soit G un groupe abélien fini d'ordre k. Soit n un entier premier avec k. Montrer que pour tout élément g de G il existe un élément h de G tel que $g = h^n$.
(Indication : considérer l'application $\varphi \colon \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ définie par $\varphi(g) = g^n$ et montrer que φ est un isomorphisme de G).

Exercice 8 Montrer qu'un groupe d'ordre 4 est isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ou à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 9

1. Montrer qu'une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$ est dans $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ si et seulement si elle a pour déterminant 1 ou -1.
2. Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer l'ordre de A, l'ordre de B, l'ordre de AB.

Exercice 10 Montrer que $C_n = \left\{ \exp\left(\frac{2\mathrm{i}\pi k}{n}\right), | \, k \in \mathbb{Z}\right\}$ est un groupe cyclique d'ordre n pour la multiplication des nombres complexes.

Exercice 11 Soit p un nombre premier. Montrer qu'à isomorphisme près il y a un seul groupe d'ordre p.

Exercice 12 Soit G un groupe d'ordre $n > 2$. Montrer qu'il n'existe aucun sous-groupe de G d'ordre $n - 1$.

Exercice 13

1. Déterminer l'ensemble des éléments d'ordre fini de $\mathrm{G} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$).
2. Soit H′ l'ensemble des éléments d'ordre infini de G. Considérons $\mathrm{H} = \mathrm{H}' \cup \{e\}$ où e est l'élément neutre de G.
   Montrer que, même si H n'est pas vide, H n'est pas un sous-groupe de G.

Exercice 14 Montrer que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ n'est pas cyclique.

Exercice 15 Montrer que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 16

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le groupe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ contient exactement un sous-groupe cyclique d'ordre n.
2. Montrer que tout groupe est la réunion de ses sous-groupes monogènes.
3. Comparer les ordres de deux sous-groupes cycliques G et H de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ qui vérifient $\mathrm{G} \subset \mathrm{H}$.
4. Soit α un élément de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$; déterminer tous les sous-groupes cycliques qui le contiennent.
5. Déterminer les homomorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
6. Déterminer les homomorphismes de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 17 Montrer qu'un groupe est fini si et seulement si il n'a qu'un nombre fini de sous-groupes.

Exercice 18 Quels sont les éléments d'ordre 3 du groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$?

Exercice 19 Étudier le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 20 Donner un exemple de groupe et de sous-groupes dont la réunion n'est pas un sous-groupe.

Exercice 21 Dans les groupes suivants, donner un exemple d'élément d'ordre 4 s'il en existe, sinon donner un argument pour justifier qu'il n'y en a pas :

(a) le groupe linéaire $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$;
(b) le groupe alterné $\mathcal{A}_8$;
(c) le groupe $\mathrm{Isom}^+(T) \subset \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ des rotations de $\mathbb{R}^3$ préservant un tétraèdre régulier T ;
(d) un groupe d'ordre 16 quelconque (attention il s'agit de déterminer si *tout* sous-groupe d'ordre 16 admet un élément d'ordre 4).

Exercice 22 Soit G un groupe abélien infini. Montrer que l'ensemble T des éléments d'ordre fini de G est un sous-groupe de G.

Si $\mathrm{T} = \{e\}$, on dit que G est sans torsion.

Montrer que G/T est sans torsion.

Exercice 23 Soit G un groupe tel que $g^2 = e$ pour tout g dans G.

Montrer que G est abélien.

Exercice 24 Soit G un groupe fini.

a) Montrer que des éléments conjugués dans G sont de même ordre.
b) Deux éléments de même ordre dans G sont-ils toujours conjugués ?
c) Trouver tous les groupes abéliens finis G pour lesquels la question précédente a une réponse positive. Un exemple non abélien ?

Exercice 25 Soit $\varphi\colon \mathrm{G}_1 \to \mathrm{G}_2$ un morphisme de groupes. Soit g un élément de G_1 d'ordre fini.

Montrer que l'ordre de $\varphi(g)$ divise l'ordre de g.