Feuille d'exercices n° 4

Exercice 1

Donner un p-Sylow de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_p)$.

Solution 1

Le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures strictes de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_p)$ est un p-Sylow de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_p)$.

Exercice 2

Montrer qu'il n'existe pas de groupe simple d'ordre 30.

Solution 2

Supposons qu'il existe un groupe simple G d'ordre 30. Considérons les p-Sylow de G. Désignons par n_p le nombre de p-Sylow de G.

Rappelons que $30 = 2\times 3\times 5$.

Les théorèmes de Sylow assurent que

$$\begin{aligned} &n_2 \equiv 1 \bmod 2, && n_2 \,|\, 3\times 5 = 15\\ &n_3 \equiv 1 \bmod 3, && n_3 \,|\, 2\times 5 = 10\\ &n_5 \equiv 1 \bmod 5, && n_5 \,|\, 2\times 3 = 6\end{aligned}$$

i.e.

$$n_2 \in \{1,\,3,\,5\,15\}, \qquad n_3\in\{1,\,10\}, \qquad n_5 \in \{1,\,6\}$$

Mais G est simple donc $n_2\neq 1$, $n_3\neq 1$ et $n_5\neq 1$; finalement

$$n_2\in\{3,\,5,\,15\}, \qquad n_3 = 10, \qquad n_5 = 6.$$

On en déduit que le groupe G contient 24 éléments d'ordre 5 (les intersections des 5-Sylow sont restreintes à l'élément neutre) et au moins 20 éléments d'ordre 3. En particulier d'une part $|\mathrm{G}| = 30$, d'autre part $|\mathrm{G}|\geqslant 44$.

Exercice 3

Montrer qu'un groupe d'ordre 200 n'est pas simple.

Solution 3

Soit G un groupe d'ordre 200. Notons que $200 = 2^3\times 5^2$. D'après les Théorèmes de Sylow le nombre de 5-Sylow de G est congru à 1 modulo 5 et divise $2^3 = 8$ donc vaut 1. L'unique 5-Sylow de G est donc nécessairement distingué dans G ; en particulier G n'est pas simple.

Exercice 4

Soit G un groupe d'ordre 15.

1. Combien G possède-t-il d'éléments d'ordre 3 ?
2. Combien G possède-t-il d'éléments d'ordre 5 ?
3. Démontrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.

Solution 4

1. Soit n_3 le nombre de 3-Sylow de G. D'après les théorèmes de Sylow, $n_3\equiv 1 \bmod 3$ et $n_3|5$, *i.e.* $n_3 = 1$. Soit H l'unique 3-Sylow de G. Tout élément d'ordre 3 engendre un sous-groupe d'ordre 3. Il y a donc exactement deux éléments d'ordre 3 : si $\mathrm{H} = \{\mathrm{id},\,g,\,h\}$, alors ces éléments sont g et h.

2. De la même façon, on montre que G possède quatre éléments d'ordre 5. Soit n_5 le nombre de 3-Sylow de G. Les théorèmes de Sylow assurent que $n_5 \equiv 1 \bmod 5$ et $n_5|3$ soit que $n_5 = 1$. Mais tout élément d'ordre 5 engendre un sous-groupe d'ordre 5. Il y a donc exactement quatre éléments d'ordre 5.
3. L'ordre d'un élément de G est un diviseur de 15, donc est égal à 1, 3, 5 ou 15. Comme il y a un élément d'ordre 1, deux éléments d'ordre 3 et quatre éléments d'ordre 5, il y a huit éléments d'ordre 15. Ainsi G possède un élément d'ordre son cardinal ; G est donc le groupe cyclique engendré par cet élément, *i.e.* G est isomorphe à $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.

Exercice 5

Soient p un nombre premier et n un entier naturel avec $p > n$. Considérons un groupe G d'ordre pn et H un sous-groupe de G d'ordre p. Montrer que H est un sous-groupe distingué de G.

Indication : compter les p-Sylow de G.

Solution 5 D'après les hypothèses, $\text{pgcd}(p, n) = 1$, donc H est un p-Sylow de G. Notons n_p le nombre de p-Sylow de G. Alors par les théorèmes de Sylow, $n_p \equiv 1 \bmod p$ et $n_p|n$. Si $n_p \neq 1$, alors $n_p \geqslant p+1$, ce qui contredit que n_p divise n puisque $n < p$. Ainsi, $n_p = 1$ et H est l'unique p-Sylow de G donc est distingué dans G.

Exercice 6

Déterminer à isomorphisme près tous les groupes d'ordre 33.

Solution 6 Soit G un groupe d'ordre 33.

Les éléments de G sont d'ordre 1, 3, 11 ou 33. Une application directe des théorèmes de Sylow montre que G contient un unique 3-Sylow et un unique 11-Sylow. En effet soit n_p le nombre de p-Sylow de G ; d'une part $n_3 \equiv 1 \bmod 3$ et $n_3|11$, d'autre part $n_{11} \equiv 1 \bmod 11$ et $n_{11}|3$, *i.e.* $n_{11} = 1$. Les éléments d'ordre 3 et 11 sont contenus dans ces deux groupes. On a au plus $1 + (3-1) + (11-1) = 1 + 2 + 10 = 13$ éléments d'ordre 1, 3 ou 11. Il existe donc un élément d'ordre 33 dans G qui est donc cyclique isomorphe à $\mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$.

Exercice 7

1. Quels sont les sous-groupes de Sylow de $\mathcal{A}_4$?
2. Déterminer l'ordre de tous les éléments de $\mathcal{A}_4$.
   Le groupe $\mathcal{A}_4$ possède-t-il un sous-groupe cyclique d'ordre 6 ?
3. Soit H un sous-groupe de $\mathcal{A}_4$ engendré par un élément d'ordre 2 et un élément d'ordre 3.
   Montrer que H contient au moins trois éléments d'ordre 3.
   Peut-il être isomorphe à $\mathcal{S}_3$?
   En déduire qu'il n'y a pas de sous-groupe d'ordre 6 dans $\mathcal{A}_4$.
4. Donner la liste des sous-groupes de $\mathcal{A}_4$.

Solution 7

1. Déterminons les sous-groupes de Sylow de $\mathcal{A}_4$.
   L'ordre de $\mathcal{A}_4$ est $12 = 2^2 \times 3$. Soient n_2 le nombre de sous-groupes de Sylow d'ordre $2^2 = 4$ et n_3 le nombre de sous-groupes de Sylow d'ordre 3. Les théorèmes de Sylow assurent que

   $$n_2 \equiv 1 \bmod 2 \qquad\qquad n_2|3$$

   $$n_3 \equiv 1 \bmod 3 \qquad\qquad n_3|2^2 = 4$$

   autrement dit que $n_2 \in \{1, 3\}$ et $n_3 \in \{1, 4\}$.
   Le groupe $\mathcal{A}_4$ ne contient pas de cycle de longueur 4 donc les seuls éléments d'ordre pair sont les doubles transpositions. Il y en a trois donc $\mathcal{A}_4$ contient un seul sous-groupe d'ordre 4 isomorphe au groupe de Klein, *i.e.* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (en effet d'après le théorème de Lagrange un sous-groupe K de $\mathcal{A}_4$ d'ordre 4 contient des éléments d'ordre 1, 2 ou 4 ; mais $\mathcal{A}_4$ ne contient pas d'élément d'ordre 2 donc K contient des éléments d'ordre 1 ou 4. Comme $\mathcal{A}_4$ contient un seul élément d'ordre 1 et trois éléments d'ordre 4 il contient un seul sous-groupe d'ordre 4).
   Le groupe $\mathcal{A}_4$ contient les cycles de longueur 3. Il y en a plus de deux donc $n_3 = 4$.

2. Déterminons l'ordre de tous les éléments de $\mathcal{A}_4$. Le groupe $\mathcal{A}_4$ possède-t-il un sous-groupe cyclique d'ordre 6 ?

   Le groupe $\mathcal{A}_4$ contient trois éléments d'ordre 2, huit éléments d'ordre 3 et un élément d'ordre 1. Le groupe $\mathcal{A}_4$ ne contient donc aucun élément d'ordre 6 et ne contient donc pas de sous-groupe cyclique d'ordre 6.
3. Soit H un sous-groupe de $\mathcal{A}_4$ engendré par un élément d'ordre 2 et un élément d'ordre 3. On peut supposer que H est engendré par $(a\ b)(c\ d)$ et $(a\ b\ c)$.

   Notons que
$$\underbrace{(a\ b)(c\ d)}_{\text{élt d'ordre 2 dans } \mathcal{A}_4}\quad\underbrace{(a\ b\ c)}_{\text{élt d'ordre 3 dans } \mathcal{A}_4} = (b\ d\ c)$$
   Le groupe H contient les 3-cycles : $(a\ b\ c)$ et $(b\ d\ c)$ donc les deux sous-groupes distincts d'ordre 3
$$\langle (a\ b\ c)\rangle, \qquad \langle (b\ d\ c)\rangle.$$
   Un groupe d'ordre 6 ne contient qu'un sous-groupe d'ordre 3 (en effet soit K un sous-groupe d'ordre $6 = 2\times 3$. Désignons par n_3' le nombre de 3-Sylow de K ; d'une part $n_3' \equiv 1 \bmod 3$ d'autre part $n_3'|2$ donc $n_3' = 1$). Par conséquent le groupe H n'est pas d'ordre 6. En particulier H ne peut pas être isomorphe à $\mathcal{S}_3$ qui est d'ordre 6.
4. Le groupe $\mathcal{A}_4$ contient :
   — un sous-groupe d'ordre 1 : $\{\mathrm{id}\}$;
   — trois sous-groupes d'ordre 2 :
$$\langle (1\ 2)(3\ 4)\rangle \qquad \langle (1\ 3)(2\ 4)\rangle \qquad \langle (1\ 4)(2\ 3)\rangle;$$
   — quatre sous-groupes d'ordre 3 :
$$\langle (1\ 2\ 3)\rangle \qquad \langle (1\ 2\ 4)\rangle \qquad \langle (1\ 3\ 4)\rangle \qquad \langle (2\ 3\ 4)\rangle;$$
   — un sous-groupe d'ordre 4 :
$$\{\mathrm{id},\ (1\ 2)(3\ 4),\ (1\ 3)(2\ 4),\ (1\ 4)(2\ 3)\}.$$
   — un sous-groupe d'ordre 12 : $\mathcal{A}_4$.

Exercice 8

Soit G un groupe. Soit p un nombre premier divisant $|\mathrm{G}|$.

Montrer que si H est un p-sous-groupe de G distingué dans G, alors H est contenu dans tout p-sous-groupe de Sylow de G.

Solution 8

Si H est un p-sous-groupe de G, il existe un p-Sylow de G qui contient H. Puisque $\mathrm{H}\triangleleft\mathrm{G}$ et que les p-Sylow sont conjugués entre eux, H se trouve dans tous les p-Sylow de G.

Exercice 9

Montrer qu'un groupe d'ordre 56 n'est pas simple.

Solution 9

Soit G un groupe d'ordre $56 = 2^3\times 7$. Soit n_2 le nombre de 2-Sylow et n_7 le nombre de 7-Sylow.

D'après les théorèmes de Sylow
$$n_2 \equiv 1 \pmod 2 \qquad n_2|7$$
$$n_7 \equiv 1 \pmod 7 \qquad n_7|8$$
Par conséquent $n_2 \in \{1,\ 7\}$ et $n_7 \in \{1,\ 8\}$.

Si $n_7 = 1$, alors d'après les théorèmes de Sylow G possède un sous-groupe distingué propre donc G n'est pas simple.

Supposons que $n_7 \neq 1$, alors $n_7 = 8$ et G compte huit sous-groupes d'ordre 7, c'est-à-dire déjà $8(7-1) = 48$ éléments d'ordre 7 (remarque : $7-1$ = nombre d'éléments non triviaux d'un sous-groupe d'ordre 7). En ajoutant l'élément neutre nous avons donc "listé" 49 éléments du groupe G. Nous allons les noter $g_1 = e$, g_2, ..., g_{49}. Supposons que $n_2 = 7$. Soit S un 2-Sylow de G ; il est d'ordre 8. Notons e, h_2, ..., h_8 ses éléments. Pour des raisons d'ordre les h_i n'appartiennent pas $\{g_1, g_2, \dots, g_{49}\}$. Donc G contient les éléments distincts g_1, g_2, ..., g_{49}, h_2, h_3, ..., h_8 ; en particulier $|\mathrm{G}| \geqslant 49 + 7 = 56$. Par hypothèse $n_2 = 7$ donc G contient un 2-Sylow T distinct de S. Soit k dans $\mathrm{T} \smallsetminus \mathrm{S}$. Pour des raisons d'ordre k n'appartient pas $\{g_1, g_2, \dots, g_{49}\}$. Par suite G contient les éléments distincts g_1, g_2, ..., g_{49}, h_2, h_3, ..., h_8, k. En particulier $|\mathrm{G}| \geqslant 49 + 7 + 1 = 57$: contradiction. Par conséquent $n_2 \neq 7$ et $n_2 = 1$; d'après les théorèmes de Sylow G possède un sous-groupe distingué propre donc G n'est pas simple.

Exercice 10

Montrer qu'un groupe d'ordre pq, où p et q sont premiers et distincts, ne peut être simple.

Solution 10

Soit G un groupe d'ordre pq. Quitte à renommer p et q nous pouvons supposer que $p > q$. Soit n_p le nombre de p-Sylow de G.

Les théorèmes de Sylow assurent que $n_p \equiv 1 \pmod p$ et n_p divise q, autrement dit que $n_p \equiv 1 \pmod p$ et $n_p \in \{1, q\}$. Mais comme $p > q$, $q \not\equiv 1 \pmod p$. Par suite $n_p = 1$, *i.e.* il y a un seul p-Sylow dans G qui est un sous-groupe d'ordre p distingué dans G et propre. Il s'en suit que G n'est pas simple.