Feuille d'exercices n° 6

Exercice 1

Déterminer la composée de deux symétries vectorielles orthogonales planes.

Déterminer l'ordre de cette composée.

Solution 1

Le déterminant d'une symétrie orthogonale est -1 ; la composée $r = s's$ de deux telles symétries s et s' est donc une isométrie directe, c'est-à-dire une rotation.

Déterminons l'angle θ de la rotation à partir des axes respectifs $\mathbb{R}\overrightarrow{u}$ et $\mathbb{R}\overrightarrow{u'}$ ($\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ unitaires) des symétries s et s'. Pour cela il suffit de déterminer l'image de $\overrightarrow{u}$ par r, ou plutôt l'angle $(\overrightarrow{u}, r(\overrightarrow{u}))$. Puisque $s(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ nous avons $r(\overrightarrow{u}) = s'(\overrightarrow{u})$ donc l'angle $(\overrightarrow{u}, r(\overrightarrow{u}))$ est aussi l'angle $(\overrightarrow{u}, s'(\overrightarrow{u}))$. Comme une symétrie renverse l'orientation nous avons

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}) = -(s'(\overrightarrow{u}), s'(\overrightarrow{u'}))$$

d'où

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}) = (s'(\overrightarrow{u'}), s'(\overrightarrow{u})).$$

Puisque $\overrightarrow{u'}$ appartient à l'axe de s' nous obtenons

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}) = (\overrightarrow{u'}, s'(\overrightarrow{u})).$$

Il en résulte que

$$\theta = (\overrightarrow{u}, s'(\overrightarrow{u})) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}) + (\overrightarrow{u'}, s'(\overrightarrow{u})) = 2(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'})$$

Notons que $\overrightarrow{u}$ peut être remplacé par $-\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{u'}$ par $-\overrightarrow{u'}$. L'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'})$ n'est donc défini qu'à π près à partir de la donnée des deux symétries (ce n'est pas étonnant : la seule donnée intrinsèque est l'angle de droites $(\mathbb{R}\overrightarrow{u}, \mathbb{R}\overrightarrow{u'})$). Mais grâce à la multiplication par 2 l'angle θ se trouve être bien défini à 2π près.

Déterminons l'ordre de cette composée. L'ordre d'une rotation est infini si l'angle de la rotation n'est pas égal à $\frac{2k\pi}{n}$ pour n et k entiers. L'ordre de la rotation d'angle $\frac{2k\pi}{n}$ pour n et k premiers entre eux est n.

Exercice 2

Montrer que toute rotation plane se décompose en le produit de deux symétries.

Que pouvons-nous dire pour les rotations de l'espace ?

Solution 2

Montrons que toute rotation plane se décompose en le produit de deux symétries.

D'après l'exercice précédent on peut décomposer toute rotation plane d'angle θ en le produit de deux symétries orthogonales : l'axe de la première est choisi au hasard, l'axe de la seconde fait un angle de $\frac{\theta}{2}$ avec la première.

Il y a un résultat analogue pour une rotation de l'espace d'axe $\mathbb{R}u$ et d'angle θ. Elle se décompose en le produit de deux symétries orthogonales par rapport à deux plans vectoriels contenant $\mathbb{R}u$ et qui font un angle égal à $\frac{\theta}{2}$ entre eux : la restriction de la rotation au plan vectoriel orthogonal à $\mathbb{R}u$ est une rotation plane.

Exercice 3 [Le groupe diédral]

Considérons un polygone régulier ayant un sommet P de coordonnées $(1, 0)$ et centré à l'origine du repère.

1. Déterminer le groupe D_6 des isométries du plan qui conservent un triangle équilatéral. Établir la table de D_6.

2. Déterminer le groupe D_8 des isométries du plan qui conservent un carré. Déterminer les ordres des éléments de D_8. Établir la table de D_8.
3. Déterminer le groupe D_{2n} des isométries du plan qui conservent un polygone régulier à n côtés.

Solution 3

Notons O l'origine de $\mathbb{R}^2$. Munissons $\mathbb{R}^2$ de l'orientation géométrique.

1. Commençons par déterminer les isométries (*i.e.* les symétries axiales et les rotations centrées en O) qui fixent un des sommets du triangle équilatéral. En dehors de l'identité il y a la symétrie d'axe la médiane issue du sommet considéré. Comme il y a trois sommets on obtient ainsi trois symétries dans D_6.
Par ailleurs il y a les deux rotations centrées en O d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$.
En ajoutant l'identité cela fait déjà 6 éléments dans D_6. Or une isométrie affine qui conserve le triangle équilatéral induit une permutation sur l'ensemble des sommets du triangle équilatéral qui sont au nombre de trois. Par suite D_6 est un sous-groupe de $\mathcal{S}_3$.
Il y a $3! = 6$ permutations de ces trois sommets donc $\mathrm{D}_6 \simeq \mathcal{S}_3$ et nous avons listé tous les éléments de D_6.
Désignons par A_1, A_2 et A_3 les sommets du triangle équilatéral. Pour $1 \leqslant i \leqslant 3$ notons s_i la symétrie qui laisse le point A_i fixe, r_1 la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et $r_2^2 = r_1$ la rotation d'angle $\frac{4\pi}{3}$.
La table de $\mathrm{D}_6 \simeq \mathcal{S}_3$ est la suivante

	id	s_1	s_2	s_3	r_1	r_2
id	id	s_1	s_2	s_3	r_1	r_2
s_1	s_1	id	r_1	r_2	s_2	s_3
s_2	s_2	r_2	id	r_1	s_3	s_1
s_3	s_3	r_1	r_2	id	s_1	s_2
r_1	r_1	s_3	s_1	s_2	r_2	id
r_2	r_2	s_2	s_3	s_1	id	r_1

2. Notons qu'une isométrie qui préserve un carré envoie chaque sommet sur un sommet, chaque côté sur un côté et chaque diagonale sur une diagonale.
Déterminons les isométries du plan qui conservent le carré $[A_1, A_2, A_3, A_4]$ et qui laissent fixe le point A_1. De telles isométries laissent donc fixe la diagonale $[A_1, A_3]$ et donc le point A_3. Il n'y en a donc qu'une non triviale : la symétrie par rapport à cette diagonale.
Cherchons les isométries du plan qui conservent le carré $[A_1, A_2, A_3, A_4]$ et qui envoient le point A_1 sur le point A_2. De telles isométries envoient donc la diagonale $[A_1, A_3]$ sur la diagonale $[A_2, A_4]$. Il en résulte que A_3 a pour image A_4. Il y a deux telles isométries
   - ◇ la symétrie par rapport à la médiatrice commune de $[A_1, A_2]$ et $[A_3, A_4]$ qui envoie A_4 sur A_3 et A_2 sur A_1 ;
   - ◇ la rotation d'angle $\frac{3\pi}{2}$ qui envoie A_4 sur A_1 et A_2 sur A_3.

   Cherchons les isométries du plan qui conservent le carré $[A_1, A_2, A_3, A_4]$ et qui envoient le point A_1 sur le point A_4. De telles isométries envoient donc la diagonale $[A_1, A_3]$ sur la diagonale $[A_2, A_4]$; le point A_3 a donc pour image le point A_2. Il y en a donc deux :
   - ◇ la symétrie par rapport à la médiatrice commune de $[A_1, A_4]$ et $[A_2, A_3]$ qui envoie A_4 sur A_1 et A_2 sur A_3 ;
   - ◇ la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui envoie A_4 sur A_3 et A_2 sur A_1.

   Restent les isométries qui envoient A_1 sur A_3 en conservant le carré. La diagonale $[A_2, A_4]$ est alors préservée. Il y en a deux :
   - ◇ la symétrie par rapport à la diagonale $[A_2, A_4]$;
   - ◇ la rotation d'angle π.

   Notations :
   - ◇ r_1 la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$;
   - ◇ r_2 la rotation d'angle π ;
   - ◇ r_3 la rotation d'angle $\frac{3\pi}{2}$;
   - ◇ s_{12} la symétrie d'axe la médiatrice de $[A_1, A_2]$;
   - ◇ s_{23} la symétrie d'axe la médiatrice de $[A_2, A_3]$;
   - ◇ s_{13} la symétrie d'axe la médiatrice de $[A_1, A_3]$;
   - ◇ s_{24} la symétrie d'axe la médiatrice de $[A_2, A_4]$.

   Chacune des symétries est d'ordre 2 ; r_1 et r_3 sont d'ordre 4 et r_2 est d'ordre 2.
   La table de D_8 est

	id	r_1	r_2	r_3	s_{12}	s_{23}	s_{13}	s_{24}
id	id	r_1	r_2	r_3	s_{12}	s_{23}	s_{13}	s_{24}
r_1	r_1	r_2	r_3	id	s_{13}	s_{24}	s_{23}	s_{12}
r_2	r_2	r_3	id	r_1	s_{23}	s_{12}	s_{24}	s_{13}
r_3	r_3	id	r_1	r_2	s_{24}	s_{13}	s_{12}	s_{23}
s_{12}	s_{12}	s_{24}	s_{23}	s_{13}	id	r_2	r_3	r_1
s_{23}	s_{23}	s_{13}	s_{12}	s_{24}	r_2	id	r_1	r_3
s_{13}	s_{13}	s_{12}	s_{24}	s_{23}	r_1	r_3	id	r_2
s_{24}	s_{24}	s_{23}	s_{13}	s_{12}	r_3	r_1	r_2	id

3. Soit P un polygone régulier à n côtés. Numérotons les sommets de P_n dans le sens trigonométrique, il s'écrit $[A_1, A_2, \ldots, A_n]$.

   Pour une isométrie conservant le polygone chaque sommet va sur un sommet, chaque côté va sur un côté donc si A_1 a pour image A_k alors A_2 a pour image soit A_{k-1} soit A_{k+1}. Dans le premier cas l'isométrie est une symétrie (car ce n'est pas un élément de $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$), dans le second cas l'isométrie est une rotation d'angle $\frac{2k\pi}{n}$. Les axes de symétrie possibles sont
   - ◇ si n est pair les droites déterminées par un sommet quelconque et le centre (il y en a $\frac{n}{2}$) et les droites déterminées par les médiatrices des côté (il y en a $\frac{n}{2}$) ;
   - ◇ si n est impair, les droites déterminées par un sommet quelconque et le centre qui sont les droites déterminées par les médiatrices des côtés (il y en a n).

   Soit r la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et soit s l'une des symétries de D_{2n}. Le groupe D_{2n} est engendré par s et r.

Exercice 4

Déterminer le groupe des isométries du plan qui conservent un rectangle non carré.
Établir la table de ce groupe.

Solution 4

Considérons un rectangle $ABCD$ tel que "A est le coin en haut à gauche, B le coin en haut à droite, C le coin en bas à droite, D le coin en bas à gauche, $[AB]$ et $[CD]$ sont les longueurs et $[BC]$ et $[AD]$ les largeurs." Prenons pour origine du repère le centre du rectangle.

Une isométrie qui conserve le rectangle laisse fixe le centre du rectangle donc le groupe recherché est isomorphe à un sous-groupe du groupe des isométries vectorielles. Par ailleurs une isométrie qui conserve le rectangle envoie chaque diagonale sur une diagonale.

Une isométrie qui conserve le rectangle et laisse fixe le sommet A laisse fixe la diagonale $[AC]$ et donc le sommet C et tous les autres sommets. Ainsi la seule isométrie qui conserve le rectangle et laisse fixe le sommet A est l'identité. Il en est de même lorsque l'on remplace A par B (resp. C, resp. D). Une isométrie qui conserve le rectangle et qui n'est pas l'identité ne fixe donc aucun sommet.

- ◇ ou bien A a pour image B alors C a pour image D et cette isométrie est la symétrie s_1 d'axe la médiatrice de $[AB]$;
- ◇ ou bien A a pour image D, alors B a pour image C et cette isométrie est la symétrie s_2 d'axe la médiatrice de $[AD]$;
- ◇ ou bien A et C sont échangés et cette isométrie est la rotation r d'angle π.

On a donc un groupe d'ordre 4, abélien, dont la table est :

	id	s_1	s_2	r
id	id	s_1	s_2	r
s_1	s_1	id	r	s_2
s_2	s_2	r	id	s_1
r	r	s_2	s_1	id

Exercice 5

Soit $n \geqslant 3$; le sous-ensemble $\{g \in \mathrm{D}_{2n} \mid g^2 = \mathrm{id}\}$ de D_{2n} est-il un sous-groupe de D_{2n} ?

Solution 5

La composée de deux symétries orthogonales éléments de D_{2n} est une rotation d'angle deux fois l'angle formé par les deux axes. Par suite dès que $n \geqslant 3$ l'un de ces produits au moins est d'ordre différent de 2. Ainsi l'ensemble des éléments d'ordre 2 de D_{2n} n'est pas un sous-groupe de D_{2n}.

Exercice 6

Quelle est la matrice de la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'angle θ autour de l'axe $\mathbb{R}e_2$?

Solution 6

Le vecteur e_2 est vecteur propre pour la valeur propre 1 de la matrice, *i.e.* c'est un vecteur fixe pour la rotation considérée.

L'image de e_1 est dans le plan (e_1, e_3) et est égale à $\cos\theta e_1 - \sin\theta e_3$.

L'image de e_3 est dans le plan (e_1, e_3) et est égale à $\sin\theta e_1 + \cos\theta e_3$.

La matrice cherchée est donc

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Exercice 7

Soit $M \in \mathrm{O}(3, \mathbb{R})$ de déterminant -1.

Montrer que -1 est valeur propre de M.

Solution 7

Puisque une isométrie vectorielle conserve les normes, ses valeurs propres sont de module 1. Ceci est donc vrai pour une matrice M de $\mathrm{O}(3, \mathbb{R})$ qui est la matrice d'une isométrie vectorielle. Si de plus $\det M = -1$, alors le produit des racines du polynôme caractéristique de M est -1. Par suite

- ou bien toutes les racines du polynôme caractéristique de M sont réelles et dans ce cas l'une ou trois d'entre elles sont égales à -1 ;
- ou bien deux d'entre elles sont complexes conjuguées, leur produit étant égal à 1 la dernière est -1.

Exercice 8

Soit M une matrice orthogonale 2×2 et de déterminant -1.

Montrer que M est la matrice d'une symétrie orthogonale.

Solution 8

Les racines du polynôme caractéristique de M sont de module 1. Si elles sont complexes conjuguées mais dans ce cas le déterminant de M est 1 : contradiction. Elles sont donc toutes les deux réelles, l'une valant 1 et l'autre -1.

Il s'en suit que M est la matrice de la symétrie orthogonale d'axe la droite vectorielle propre associée à la valeur propre 1.

Exercice 9

Soit $M \in \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ la rotation d'angle θ. Montrer que

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{Tr}\, M - 1\Big).$$

Solution 9

Si M est la matrice d'une rotation d'angle θ, alors M est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par suite $\mathrm{Tr}\, M = 2\cos\theta + 1$ et $\cos\theta = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{Tr}\, M - 1\Big)$.

Exercice 10

Soit s une symétrie plane d'axe $\mathcal{D}$.

1. Soit t une translation de vecteur $\overrightarrow{v}$. Montrer que la composée $t \circ s$ (resp. $s \circ t$) est une symétrie si et seulement si $\overrightarrow{v}$ est normal à $\mathcal{D}$.
2. Soit r une rotation de centre C. Montrer que la composée $r \circ s$ (resp. $s \circ r$) est une symétrie si et seulement si C appartient à $\mathcal{D}$.

3. Soient s' et s'' deux symétries axiales. Montrer que $s \circ s' \circ s''$ est une symétrie si et seulement si les axes de s' et s'' sont parallèles à $\mathcal{D}$ ou se rencontrent en un point de $\mathcal{D}$.

Solution 10

1. Soit t une translation de vecteur $\overrightarrow{v}$. Montrons que la composée $t \circ s$ (resp. $s \circ t$) est une symétrie si et seulement si $\overrightarrow{v}$ est normal à $\mathcal{D}$.

   Supposons $\overrightarrow{v}$ normal à $\mathcal{D}$. Soit $t'(\mathcal{D}') = \mathcal{D}'$ où t' est la translation de vecteur $\overrightarrow{v}/2$. La droite $\mathcal{D}'$ est une droite de points fixes par ts qui est donc la symétrie orthogonale d'axe $\mathcal{D}'$.

   Soit t'' la translation de vecteur $-\overrightarrow{v}/2$. Posons $\mathcal{D}'' = t''(\mathcal{D})$. La droite $\mathcal{D}''$ est une droite de points fixes par st qui est donc la symétrie orthogonale d'axe $\mathcal{D}''$.

   Si ts est une symétrie orthogonale s' et si A est un point de l'axe de symétrie, nous avons $ts(A) = A$ donc $\overrightarrow{s(A)A} = \overrightarrow{v}$. Par suite $\overrightarrow{v}$ est normal à la droite $\mathcal{D}$ et d'après ce qui précède st est une symétrie orthogonale.

   Si st est une symétrie, nous arrivons à la même conclusion.

2. Soit r une rotation de centre C. Montrons que la composée $r \circ s$ (resp. $s \circ r$) est une symétrie si et seulement si C appartient à $\mathcal{D}$.

   Supposons que C appartienne à $\mathcal{D}$. Soit θ l'angle de la rotation r. Considérons la rotation r' de centre C et d'angle $-\frac{\theta}{2}$. Alors $\mathcal{D}' = r'(\mathcal{D})$ est une droite de points fixes de $s \circ r$ qui est une symétrie d'axe $\mathcal{D}'$.

   Soit r'' la rotation de centre C et d'angle $\frac{\theta}{2}$. Alors $\mathcal{D}'' = r''(\mathcal{D})$ est une droite de points fixes de $r \circ s$ qui est une symétrie d'axe $\mathcal{D}''$.

   Réciproquement supposons que $r \circ s$ soit une symétrie orthogonale d'axe $\mathcal{D}'$. Soit C' l'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Nous avons $rs(C') = C'$ ainsi que $s(C') = C'$. Par conséquent $C' = r(C')$ et C' est le centre de la rotation r, c'est-à-dire C qui est donc sur $\mathcal{D}$. Dans ce cas $s \circ r$ est aussi une symétrie orthogonale.

   La conclusion est identique en supposant a priori que $s \circ r$ est une symétrie.

3. Soient s' et s'' deux symétries axiales. Montrons que $s \circ s' \circ s''$ est une symétrie si et seulement si les axes de s' et s'' sont parallèles à $\mathcal{D}$ ou se rencontrent en un point de $\mathcal{D}$.

   Supposons que les axes de s' et s'' soient sécants en un point C. Alors $s' \circ s''$ est une rotation de centre C et d'après 2. $ss's''$ est une symétrie si et seulement si C appartient à $\mathcal{D}$.

   Supposons que les axes de s' et s'' soient parallèles alors $s' \circ s''$ est une translation de vecteur orthogonal à la direction commune et d'après 1. $ss's''$ est une symétrie si et seulement si cette direction commune est celle de $\mathcal{D}$.

Exercice 11

Montrer que pour une translation t de vecteur $\overrightarrow{u}$ et une symétrie s d'axe $\mathcal{D}$ nous avons $t \circ s = s \circ t$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ est dans la direction de $\mathcal{D}$.

Solution 11

Si $st = ts$, alors pour tout point M de $\mathcal{D}$ nous avons $st(M) = ts(M) = t(M)$ donc $t(M)$ appartient à $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{Mt(M)}$ est parallèle à $\mathcal{D}$.

Réciproquement supposons que $\overrightarrow{u}$ soit parallèle à $\mathcal{D}$. Posons $M' = ts(M)$ et $M'' = st(M)$. Nous avons $\overrightarrow{Ms(M)} = \overrightarrow{t(M)s(t(M))} = \overrightarrow{t(M)M''}$. Par conséquent $\overrightarrow{s(M)M''} = \overrightarrow{Mt(M)} = \overrightarrow{u}$ et donc $\overrightarrow{s(M)M''} = \overrightarrow{s(M)t(s(M))} = \overrightarrow{s(M)M'}$ $M'' = M'$. Il s'en suit que $st = ts$.

Exercice 12

Soit $\mathcal{R}$ le réseau plan des points à coordonnées entières dans un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Quelles sont les isométries affines qui conservent $\mathcal{R}$?

Quelles sont les centres des rotations affines qui conservent $\mathcal{R}$?

Solution 12

Si une isométrie affine qui conserve le réseau $\mathcal{R}$ a exactement un point fixe, c'est une rotation autour de l'un des points du réseau d'angle $\frac{k\pi}{2}$, ou une rotation d'angle $\frac{k\pi}{2}$ autour de l'un des centres des carrés du type $[O, A, B, C]$ où O est le centre du repère, A a pour coordonnées $(1, 0)$, B a pour coordonnées $(1, 1)$, C a pour coordonnées $(0, 1)$. Enfin il y a aussi les symétries centrales autour des milieux des segments du type OA, AB, BC et CO.

Si une isométrie affine qui conserve le réseau $\mathcal{R}$ a une droite de points fixes, alors c'est une symétrie orthogonale par rapport aux droites du type OA, AB, BC et CO (côtés des carrés du type $[O, A, B, C]$) ainsi que AC et OC (diagonales des carrés du type $[O, A, B, C]$) et des médiatrices des segments OA et AB.

Si une isométrie affine qui conserve le réseau $\mathcal{R}$ n'a pas de point fixe, alors soit c'est une translation de vecteur $\in \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2$ (où (e_1, e_2) est la base canonique de $\mathbb{R}^2$), soit c'est un produit d'une translation de ce type avec les autres isométries affines déjà trouvées.

Exercice 13

Soit $\mathfrak{S}$ la représentation graphique dans un repère orthonormal de la fonction sinus.

Quelles sont les isométries affines qui conservent la figure $\mathfrak{S}$?

Solution 13

La figure $\mathfrak{S}$ est conservée par la rotation de centre l'origine du repère et d'angle π, par les translations de vecteurs $2k\pi e_1$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et par les composées de telles applications.

Exercice 14

Déterminer les isométries affines qui conservent l'ensemble $\mathfrak{F}$ des points de coordonnées $(n, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$, dans un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan affine euclidien.

Solution 14

La figure $\mathfrak{F}$ est l'ensemble des points à coordonnées entières de l'axe des abscisses. Elle est conservée par

- les rotations de centre les points de $\mathfrak{F}$ ou les milieux des segments joignant deux points de $\mathfrak{G}$ et d'angle π,
- la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des x,
- la symétrie orthogonale par rapport à n'importe quelle droite verticale qui passe par des points de $\mathfrak{F}$ ou par le milieu du segment joignant deux points de $\mathfrak{F}$,
- toutes les translations de vecteur $\in \mathbb{Z}e_1$,
- les composées de telles applications.

Exercice 15

Notons $\mathrm{OA}(2, \mathbb{R})$ le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^2$. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{OA}(2, \mathbb{R})$ qui contient les rotations centrées en deux points distincts.

Montrer que G contient une translation.

Solution 15

Toute rotation se décompose en une composée de deux symétries orthogonales. Soient A et B les deux points qui sont centres des rotations que G contient. Soit s la symétrie orthogonale d'axe (AB). Soit s_1 la symétrie orthogonale d'axe une droite quelconque $\mathcal{D}_1$ passant par A différente de (AB). Soit s_2 la symétrie orthogonale d'axe la droite $\mathcal{D}_2$ passant par B parallèle à $\mathcal{D}_1$.

Les rotations $s_1 s$ et $s s_2$ appartiennent à G ; par suite $(s_1 s)(s s_2)$ appartient à G, *i.e.* $s_1 s_2$ est dans G. Or la composée $s_1 s_2$ est une translation donc G contient une translation.

Exercice 16

Les actions considérées ci-après sont les actions naturelles.

1. Montrer que l'action de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$ n'est pas transitive mais qu'elle définit sur l'ensemble des bases de $\mathbb{R}^n$ une action transitive.
2. Montrer que $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$ agit transitivement sur le cercle unité de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ agit transitivement sur la sphère unitée de $\mathbb{R}^3$.

Solution 16

1. Deux vecteurs quelconques de $\mathbb{R}^n$ sont dans la même orbite pour l'action de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$ à condition qu'aucun des deux ne soit nul : l'orbite du vecteur nul est réduite à ce vecteur nul. L'action considérée n'est donc pas transitive.

   Par contre deux bases quelconques de $\mathbb{R}^n$ sont images l'une de l'autre par une unique application linéaire bijective. L'action de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ sur l'ensemble des bases de $\mathbb{R}^n$ est donc transitive.

2. Deux vecteurs quelconques de $\mathbb{R}^2$ sont dans la même orbite pour l'action de $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^2$ à condition qu'ils aient même norme ; les éléments du cercle unité ont norme 1, par suite l'action de $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ est transitive sur le cercle unité.
3. Même chose qu'à la question précédente.

Exercice 17

Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$. Déterminer l'orbite d'un point A de $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{O\}$ quand G est le sous-groupe engendré par :

1. une symétrie par rapport à une droite ;
2. une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$;
3. une rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ ($n > 0$ entier) ;
4. une rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ ($n > 0$ entier) et une symétrie par rapport à une droite D (penser à distinguer deux cas).

Solution 17

Notons que comme on considère l'action naturelle de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^2$ les rotations dont on parle sont les rotations centrées en l'origine O du repère, les symétries dont on parle sont les symétries d'axes les droites qui passent par l'origine O du repère.

1. Si A est sur l'axe de la symétrie s considérée, alors son orbite est réduite à $\{A\}$; si A n'est pas sur cet axe, alors l'orbite de A est $\{A,\, s(A)\}$.
2. L'orbite de A est formée des quatre sommets du carré centré à l'origine (dont A).
3. L'orbite de A est formée des n sommets du polygone P régulier à n côtés centré à l'origine (dont A).
4. Soit P le polygone régulier à n côtés centré à l'origine. Si l'axe de la symétrie s est l'un des axes de symétrie de P l'orbite de A est l'ensemble des sommets de P ; sinon l'orbite de A est la réunion de l'ensemble des sommets de P et ceux de P' où P' est l'image de P par s.

Exercice 18

Rappelons que $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ désigne le groupe des applications linéaires de déterminant 1 de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même.

Rappelons aussi que $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ désigne le groupe des applications linéaires orthogonales directes de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même.

Notons $x \cdot y$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$.

1. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Soit $g \in \mathrm{G}$. Soit $\varphi_g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par
$$\varphi_g(x,y) = g(x) \cdot g(y).$$
Montrer que $\psi = \displaystyle\sum_{g \in \mathrm{G}} \varphi_g$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que pour $g \in \mathrm{G}$ nous avons $\psi(g(x), g(y)) = \psi(x,y)$.
Montrer que la matrice d'un élément de G dans la base $\{e_1,\, e_2\}$ orthonormée pour ψ est de la forme
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
En déduire que G est un sous-groupe fini de $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$.
3. Quel est l'ordre d'un élément g de G ? En déduire que g est une rotation d'angle $\frac{2k\pi}{n}$ avec k et n convenables.
4. Montrer que G est cyclique.

Solution 18

1. Remarquons que pour tout $g \in \mathrm{G}$ nous avons $\varphi_g(x,y) = \varphi_g(y,x)$. De plus
$$\begin{aligned} \varphi_g(x+x',y) &= g(x+x')g(y) \\ &= (g(x)+g(x'))g(y) \\ &= g(x)g(y)+g(x')g(y) \\ &= \varphi_g(x,y)+\varphi_g(x',y') \end{aligned}$$

et
$$\varphi_g(\lambda x, y) = g(\lambda x)g(y) = (\lambda g(x))g(y) = \lambda g(x)g(y) = \lambda \varphi_g(x, y).$$
Il en résulte que ψ est une forme bilinéaire symétrique.
Si $\psi(x, x) = 0$, alors
$$\sum_{g \in \mathrm{G}} \varphi_g(x, x) = \sum_{g \in \mathrm{G}} g(x)^2 = 0.$$
Or dans $\mathbb{R}^2$ une somme de carrés ne peut être nulle que si chacun des carrés est nul donc $g(x) = 0$ pour tout $g \in \mathrm{G}$. Toutes les applications linéaires $g \in \mathrm{G}$ sont de déterminant 1 donc inversibles ; il s'en suit que $x = 0$ et ψ est définie. C'est une forme définie positive puisque pour tout x, $\psi(x, x)$ est une somme de carrés.

2. Nous avons
$$\psi(g(x), g(y)) = \sum_{h \in \mathrm{G}} h(g(x))h(g(y)).$$
Puisque G est un groupe le morphisme $h \mapsto hg$ de G dans lui-même est injectif donc un isomorphisme car G est fini. Il s'en suit que
$$\sum_{h \in \mathrm{G}} h(g(x))h(g(y)) = \sum_{h \in \mathrm{G}} h'(x)h'(y)$$
autrement dit $\psi(g(x), g(y)) = \psi(x, y)$.
Les éléments de G préservent le produit scalaire associé à ψ donc G est un sous-groupe (fini) du groupe orthogonal associé à ce produit scalaire (qui est le groupe orthogonal classique) et la matrice d'un élément $g \in \mathrm{G}$ est donc de la forme
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
3. L'ordre d'un élément de G est fini et divise l'ordre de G. Le groupe G est fini d'ordre n donc si $g \in \mathrm{G}$ est d'ordre k_0, alors g est la rotation d'angle $\frac{2k\pi}{n}$ avec $kk_0 = n$.
4. Tout élément de $\langle g \rangle \subset \mathrm{G}$, où g est la rotation d'angle $\frac{2k\pi}{n}$ s'écrit g_0^k où g_0 est la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$. Par suite $\mathrm{G} \subset \langle g_0 \rangle$; or $|\mathrm{G}| = |\langle g_0 \rangle|$ donc $\mathrm{G} = \langle g_0 \rangle$ et le groupe G est cyclique.

Exercice 19 [Quelques propriétés de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$]Désignons par $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ le groupe des matrices carrées de taille 2×2 à coefficients réels et de déterminant 1.

Pour $u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ notons $t_u = a + d$.

1. Quel est le polynôme caractéristique P_u de u ? Quelles sont ses valeurs propres ?
2. Montrer que $P_u(u) = 0$.
3. Si P_u admet une racine double, montrer qu'alors
   — ou bien $u = \mathrm{Id}$, ou bien $u = -\mathrm{Id}$;
   — ou bien il existe $v \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ tel que
$$vuv^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad vuv^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   — ou bien il existe $w \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ tel que
$$wuw^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad wuw^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
4. Si P_u admet deux racines distinctes réelles, montrer qu'il existe $v \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}^*$ tels que $vuv^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$. Y a-t-il une réciproque ?
5. Si P_u admet deux racines complexes non réelles distinctes montrer qu'il existe $v \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ et a, $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, tels que $a^2 + b^2 = 1$ et $vuv^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.
6. En déduire pour tout $u \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ l'équivalence, si $n \notin \{1, 2\}$, entre les deux assertions suivantes :
   — u est d'ordre n ;

— il existe $k \in \mathbb{N}$ premier avec n tel que $t_u = 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$.

7. Soit $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ le sous-groupe de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ formé des matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Montrer que dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ il y a :
   — un élément d'ordre 2 ;
   — une infinité d'éléments d'ordre 4, explicitez-les ;
   — une infinité d'éléments d'ordre 3, explicitez-les ;
   — une infinité d'éléments d'ordre 6, explicitez-les ;
   — aucun élément d'ordre n si $n \notin \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

Solution 19

1. Soit P_u le polynôme caractéristique de u. Le produit des racines de P_u est égal à $\det u$ qui vaut 1 (puisque $u \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$). La somme des racines de P_u est égale à $\mathrm{trace}(u) = t_u = a + d$. Par conséquent $P_u = X^2 - t_u X + 1$.
2. L'endomorphisme associé à u annule son polynôme caractéristique (théorème de Cayley-Hamilton) donc $P_u(u) = 0$.
3. Supposons que P_u admette une racine double. Alors $t_u^2 = 4$ et ou bien $P_u = (X-1)^2$, ou bien $P_u = (X+1)^2$. Nous avons l'alternative suivante :
   ◇ ou bien u est diagonalisable et u est semblable à id ou $-$id, *i.e.* u est égal à id ou $-$id ;
   ◇ ou bien u n'est pas diagonalisable et est semblable à sa forme de Jordan ; nous allons distinguer le cas $P_u = (X-1)^2$ du cas $P_u = (X+1)^2$.

   i) si $P_u = (X-1)^2$, alors u est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Par suite il existe $v_0 \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ tel que $u = v_0^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v_0$.

   Si $\det v_0 > 0$ et $\lambda^2 = \frac{1}{\det v_0}$, alors $v = \lambda v_0$ appartient à $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ et $u = v^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v$.

   Si $\det v_0 < 0$, $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $v_0' = \sigma v_0$, alors $\det v_0' > 0$ et
   $$u = v_0^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v_0 = v_0^{-1}\sigma\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\sigma v_0 = v_0'^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v_0'$$
   Soit alors $v = \lambda v_0'$ avec $\lambda^2 = \frac{1}{\det v_0'}$. D'une part $v \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ d'autre part
   $$u = v^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v$$

   ii) Supposons que $P_u = (X+1)^2$ alors u est semblable à $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Il existe donc $v_0 \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ tel que $u = v_0^{-1}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v_0$. Soit $v = \lambda v_0$. Nous avons $\det v = \lambda^2 \det v_0$.

   Si $\det v_0 > 0$ et $\lambda^2 = \frac{1}{\det v_0}$ alors v appartient à $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ et $u = v^{-1}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v$.

   Si $\det v_0 < 0$ et $v_0' = \sigma v_0$, alors $\det v_0' > 0$ et
   $$u = v_0^{-1}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v_0 = v_0^{-1}\sigma\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\sigma v_0 = v_0'^{-1}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} v_0'$$
   Soit alors $v = \lambda v_0'$ avec $\lambda^2 = \frac{1}{\det v_0'}$. Ainsi v appartient à $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ et
   $$u = v^{-1}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} v.$$
4. Supposons que P_u admette deux racines réelles distinctes. Leur produit étant 1, elles sont inverses l'une de l'autre. La matrice u est donc semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$. Il existe donc $v_0 \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ tel que $u = v_0^{-1}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} v_0$.

Si $\det v_0 > 0$ et si $\lambda^2 = \frac{1}{\det v_0}$ alors $v = \lambda v_0$ appartient à $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ et

$$u = v^{-1} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} v$$

Si $\det v_0 < 0$ et si $\lambda^2 = -\frac{1}{\det v_0}$ alors $v = \lambda\sigma v_0$ appartient à $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ et

$$u = v^{-1} \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} v.$$

La réciproque est vraie pour $\alpha \neq \pm 1$.

5. Supposons que P_u admette deux racines complexes distinctes. Elles sont conjuguées et de module 1. Comme $u \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est de déterminant 1, c'est la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, d'une application orthogonale directe g, donc ici (puisque g n'a pas de valeur propre réelle) la matrice d'une rotation d'angle ϑ. Par conséquent u est semblable à $\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$. Ainsi u est semblable à une matrice du type $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ où $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Il existe donc $v_0 \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ tel que $u = v_0^{-1} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} v_0$.
   Si $\det v_0 > 0$ et si $\lambda^2 = \frac{1}{\det v_0}$, alors $v = \lambda v_0$ appartient à $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ et

   $$u = v^{-1} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} v.$$

   Si $\det v_0 < 0$ et si λ est tel que $\lambda^2 = -\frac{1}{\det v_0}$ alors $v = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v_0$ et

   $$u = v^{-1} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} v.$$

6. Supposons que $n > 2$.
   - ◇ Si $u = \pm\mathrm{id}$, alors l'ordre de u est 1 ou 2.
   - ◇ Si $u = v^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v$, si $u = v^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v$, si $u = v^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v$, si $u = v^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} v$, si $u = v^{-1} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} v$, alors l'ordre de u est infini.
   - ◇ Reste le cas où $u = v^{-1} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} v$ avec $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, alors u est la matrice d'une rotation d'angle φ.

   Ainsi $u \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est d'ordre n si et seulement si u est la matrice d'une rotation d'angle φ et d'ordre n. Une rotation r d'angle φ est d'ordre n si et seulement si $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$ avec k et n premiers entre eux (sinon r serait d'ordre strictement inférieur à n). La trace de l'endomorphisme r est égale à $2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ et à t_u. Par suite $u \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est d'ordre n si et seulement si $t_u = 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ avec k et n premiers entre eux.
7. Les éléments d'ordre n de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ sont des éléments d'ordre n de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. D'après les questions qui précèdent
   - ◇ il y a un seul élément d'ordre 2 dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, c'est $-\mathrm{id}$;
   - ◇ il y a une infinité d'éléments d'ordre 4 : ce sont les matrices u de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ telles que $t_u = 0$;
   - ◇ il y a une infinité d'éléments d'ordre 3 ; ce sont les matrices u de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ telles que $t_u = -1$;
   - ◇ il y a une infinité d'éléments d'ordre 6 ; ce sont les matrices u de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ telles que $t_u = 1$;
   - ◇ pour qu'un élément u de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ soit d'ordre $n > 2$ il faut et il suffit que $t_u = 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ avec k et n premiers entre eux et que t_u appartienne à $\mathbb{Z}$. Or $2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ est entier seulement lorsque $n = 3$, 4 et 6. Il s'en suit qu'il n'y a pas d'éléments d'ordre $n \neq 1$, 2, 3, 4, 6 dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$.

Exercice 20

Faire la liste de tous les sous-groupes de D_8.

Solution 20

Rappelons que

$$\mathrm{D}_8 = \langle r,\, s \,|\, r^4 = s^2 = \mathrm{id},\, rs = sr^{-1}\rangle = \big\{\mathrm{id},\, r,\, r^2,\, r^3,\, s,\, rs,\, r^2s,\, r^3s\big\}.$$

Bien entendu $\{\mathrm{id}\}$ et D_8 sont des sous-groupes de D_8.

Le groupe D_8 ne possède que deux éléments d'ordre 4, à savoir r et r^3 Chacun d'eux engendre le groupe $\langle r\rangle$ qui est cyclique d'ordre 4.

Le groupe D_8 possède cinq éléments d'ordre 2 qui sont r^2 et r^is avec $0 \leqslant i \leqslant 3$. Il y a donc cinq sous-groupes cycliques d'ordre 2 :

$$\langle r^2\rangle, \qquad \langle s\rangle \qquad \langle rs\rangle \qquad \langle r^2s\rangle \qquad \langle r^{-1}s\rangle.$$

Le groupe D_8 possède un sous-groupe d'ordre 4 non cyclique : $\langle r^2,\, s\rangle$ qui est abélien et isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ via

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \langle r^2,\, s\rangle \qquad\qquad (i,j) \mapsto r^{2i}s^j.$$

En effet les groupes $\mathrm{G}_1 = \langle r^2\rangle$ et $\mathrm{G}_2 = \langle s\rangle$ satisfont les propriétés suivantes :

- $\mathrm{G}_1 \cap \mathrm{G}_2 = \{\mathrm{id}\}$;
- G_1 et G_2 commutent ;
- $\mathrm{G}_1\mathrm{G}_2 = \langle r^2,\, s\rangle$

donc $\langle r,\, s^2\rangle$ est isomorphe au produit direct de G_1 et G_2, et G_1 et G_2 sont cycliques d'ordre 2.

Le groupe D_8 ne contient pas d'autre sous-groupe ; en effet rappelons que si G est un sous-groupe de D_8, alors $|\mathrm{G}|$ divise $|\mathrm{D}_8| = 8$, *i.e.* $|\mathrm{G}| \in \{1,\, 2,\, 4,\, 8\}$. Nous pouvons récapituler ce qui précède comme suit

$\lvert\mathrm{G}\rvert = 1$	$\{\mathrm{id}\}$
$\lvert\mathrm{G}\rvert = 2$	$\langle r^2\rangle,\, \langle s\rangle,\, \langle r,\, s\rangle,\, \langle r^2,\, s\rangle,\, \langle r^{-1},\, s\rangle,$
$\lvert\mathrm{G}\rvert = 4$	$\langle r\rangle,\, \langle r^2,\, s\rangle,$
$\lvert\mathrm{G}\rvert = 8$	D_8

À isomorphisme près il y a cinq sous-groupes de D_8 : $\{\mathrm{id}\}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et D_8.

Exercice 21

Caractériser géométriquement l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Solution 21

Les vecteurs colonnes de la matrice sont des vecteurs unitaires deux à deux orthogonaux. La matrice est donc orthogonale. De plus son déterminant est 1. Par suite A appartient à $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$. La matrice A est donc une matrice de rotation. En réduisant nous obtenons que la trace de A vaut $1+2\cos\theta$ où θ est l'angle de la rotation (bien défini au signe près). Comme la trace de A vaut 2 nous avons $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$. L'axe correspond à la droite propre pour la valeur propre 1. Nous avons

$$3(A - \mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Cet axe est donc la droite engendrée par le vecteur $(1,1,1)$.

Exercice 22

Soient A et B deux éléments de $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$. Donner une condition géométrique nécessaire et suffisante pour que A et B commutent (cette conditions fait intervenir des droites particulières de $\mathbb{R}^3$ associées à A et B).

Solution 22

Si A ou B est l'identité, alors A et B commutent.

Supposons que ni A, ni B ne soit l'identité. Ce sont alors deux rotations d'angle non nul. Si A et B commutent, alors l'axe de B est laissé invariant par A et l'axe de A est laissé invariant par B. Notons $\mathcal{D}_A$ l'axe de A et $\mathcal{P}_A$ son orthogonal (qui est donc dans le plan de rotation de A). Soit $\mathcal{D}$ une droite invariante par A, il s'agit donc d'une droite propre pour A. Si A n'est pas un demi-tour, la seule droite invariante pour A est son axe (car A n'a que 1 comme valeur propre) ; si A est un demi-tour, il y a en plus le sous-espace propre associé à -1 qui est $\mathcal{P}_A$. Un raisonnement analogue s'applique à B. Il s'en suit que si A et B commutent, alors A et B ont même axe ou alors ce sont des demi-tours et leurs axes sont orthogonaux.

Réciproquement supposons que A et B aient même axe $\mathcal{D}$. Choisisons une base orthonormale telle que le premier vecteur soit un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Dans cette base A et B s'écrivent

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ 0 & \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

où α et β sont les angles respectifs de A et B. Un calcul matriciel montre alors que A et B commutent.

De même si A et B sont des demi-tour d'axes orthogonaux alors dans une base orthonormale où les deux premiers vecteurs sont des vecteurs directeurs des axes de A et B nous avons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et par conséquent A et B commutent.

Exercice 23

Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 et S sa sphère unité. Si D est une droite vectorielle de E, on note σ_D la rotation d'angle π autour de D (appelée aussi demi-tour). Par conséquent σ_D appartient au groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(E)$ dont on rappelle qu'il est engendré par les demi-tours.

1. Soit D une droite vectoriel, soit g un élément de $\mathrm{SO}(E)$. Reconnaître l'endomorphisme $g \circ \sigma_D \circ g^{-1}$.
2. Soit $g \in \mathrm{SO}(E)$. Montrer que g est un demi-tour si et seulement s'il existe $x \in S$ tel que $g(x) = -x$.
   Dans les deux questions suivantes, nous nous donnons un sous-groupe G de $\mathrm{SO}(E)$ agissant transitivement sur S.
3. Montrer que G contient un demi-tour.
4. En déduire que $\mathrm{G} = \mathrm{SO}(E)$.

Solution 23

1. Les deux endomorphismes g et $g \circ \sigma_D \circ g^{-1}$ sont des rotations et ont même trace. Ces deux rotations ont même angle, ce sont toutes les deux des demi-tours. D est la droite propre pour la valeur propre 1, par suite $g(D)$ est la droite propre de $g \circ \sigma_D \circ g^{-1}$ pour la valeur propre 1. Il s'en suit que $g \circ \sigma_D \circ g^{-1} = \sigma_{g(D)}$.
2. Soit g un élément de $\mathrm{SO}(E)$. Si g est un demi-tour σ_D, alors g a pour matrice dans une base orthonormale adaptée (e_1, e_2, e_3)
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   Nous avons e_2 appartient à S et $g(e_2) = -e_2$.
3. Si G agit transitivement sur S, alors pour un $x \in S$ fixé il existe g tel que $g(x) = -x$ et donc par la question précédente g est un demi-tour dans G.
4. Comme G est un groupe et comme $\mathrm{SO}(E)$ est engendré par les demi-tours il suffit de montrer que G contient tous les demi-tours. D'après la question précédente il existe une droite D telle que σ_D appartient à G. Soit D' une autre droite. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur unitaire de D et $\overrightarrow{u'}$ un vecteur directeur unitaire de D'. Puisque G agit transitivement sur S il existe g dans G tel que $g(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u'}$. Ainsi $g(D) = D'$. D'après 1. nous avons
   $$g \circ \sigma_D \circ g^{-1} = \sigma_{g(D)} = \sigma_{D'} \in \mathrm{G}.$$

Exercice 24

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit G le sous-ensemble de $M(n+1,\mathbb{R})$ donné par les matrices de la forme

$$M = \left(\begin{array}{c|c} & x_1 \\ A & \vdots \\ & x_n \\ \hline 0\dots0 & 1 \end{array}\right)$$

où $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ et $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que G est un groupe.
2. Expliciter de quelle manière le groupe affine $\mathrm{GA}(\mathbb{R}^n)$ de R^n est isomorphe au groupe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$. En particulier explique comment effectuer la composée de $\varphi, \varphi' \in \mathrm{GA}(\mathbb{R}^n)$ où φ (resp. φ') pour partie linéaire $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ (resp. $A' \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$) et vecteur de translation $v \in \mathbb{R}^n$ (resp. $v' \in \mathbb{R}^n$).
3. Montrer que G est isomorphe à $\mathrm{GA}(\mathbb{R}^n)$.

Solution 24

1. Montrons qu'il s'agit d'un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{R})$.
   L'inverse de $\left(\begin{array}{c|c} & x_1 \\ A & \vdots \\ & x_n \\ \hline 0\dots0 & 1 \end{array}\right)$ est la matrice $\left(\begin{array}{c|c} & z_1 \\ A^{-1} & \vdots \\ & z_n \\ \hline 0\dots0 & 1 \end{array}\right)$ où $(z_1, z_2, \dots, z_n) = A^{-1}(-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$.
   La composée de $\left(\begin{array}{c|c} & x_1 \\ A & \vdots \\ & x_n \\ \hline 0\dots0 & 1 \end{array}\right)$ avec $\left(\begin{array}{c|c} & y_1 \\ B & \vdots \\ & y_n \\ \hline 0\dots0 & 1 \end{array}\right)$ est $\left(\begin{array}{c|c} & x_1+z_1 \\ AB & \vdots \\ & x_n+z_n \\ \hline 0\dots0 & 1 \end{array}\right)$ où $(z_1, z_2, \dots, z_n) = A(y_1, y_2, \dots, y_n)$. Il s'agit donc bien d'un sous-groupe.
2. Identifions les éléments de $\mathrm{GA}(\mathbb{R}^n)$ qui fixent 0 avec $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$. Les translations sont le morphisme du noyau $\mathrm{GA}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$. Les translations forment un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{R}^n$ par l'application $v \in \mathbb{R}^n \mapsto \tau_v$ où τ_v est la translation de vecteur v.
   Si φ, φ' s'écrivent $\varphi = \tau_v \circ A$ et $\varphi' = \tau_{v'} \circ A'$, alors
   $$\varphi \circ \varphi'(x) = A(A'x + v') + v = AA'x + (Av' + v).$$
   La composée $\varphi\circ\varphi'$ a pour partie linéaire AA' et a pour partie translation, la translation de vecteur $Av'+v$.
3. Montrons que G est isomorphe à $\mathrm{GA}(\mathbb{R}^n)$. L'isomorphisme est donné par
   $$\psi \colon \mathrm{GA}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{G} \qquad \varphi = \tau_v \circ A \mapsto \left(\begin{array}{c|c} & v_1 \\ A & \vdots \\ & v_n \\ \hline 0\dots0 & 1 \end{array}\right)$$
   Il s'agit d'une bijection qui est, d'après 1. et 2., un morphisme de groupes :
   $$\begin{aligned}\psi(\varphi\circ\varphi') &= \left(\begin{array}{c|c} & v_1+w_1 \\ AA' & \vdots \\ & v_n+w_n \\ \hline 0\dots0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} & v_1 \\ A & \vdots \\ & v_n \\ \hline 0\dots0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} & v'_1 \\ A' & \vdots \\ & v'_n \\ \hline 0\dots0 & 1 \end{array}\right) \\ &= \psi(\varphi) + \psi(\varphi')\end{aligned}$$
   où $w = Av'$.

Exercice 25

Soit E un espace affine euclidien de dimension n. On appelle similitude de E toute transformation affine bijective de E dans lui-même dont la partie linéaire est la composée d'une homothétie et d'une isométrie linéaire.

1. Montrer que les similitudes forment un groupe.
2. Soit φ une similitude. Démontrer que si L est la partie linéaire de φ, alors L s'écrit de matrice unique sous la forme $L = HR$ où H est une homothétie linéaire et R un élément de $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ et que de plus H et R commutent.

   Soit φ une bijection de E. On dit que φ préserve les angles (non-orientés) si pour tous points $A \neq B, C \in E$, $\widehat{\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)} = \widehat{ABC}$. Nous allons montrer que les similitudes sont extactement les transformations qui préservent les angles.
3. Montrer que les similitudes préservent les angles.

   Soit φ une bijection de E qui préservent les angles.
4. Montrer que φ préserve l'alignement.
5. Montrer que φ est affine.
6. Choisissons une origine O dans E. Trouver une translation τ tells que $(\tau^{-1} \circ \varphi)(O) = O$. Posons $\varphi' = \tau^{-1} \circ \varphi$.
7. Soit $A \neq O$. Posons $\lambda = \frac{||\overrightarrow{O\varphi'(A)}||}{||\overrightarrow{OA}||}$. Si h_λ est l'homothétie de rapport λ et de centre O, montrer que $\psi = h_\lambda^{-1} \circ \varphi'$ préserve le produit scalaire et la norme. On pourra utiliser des triangles isométriques.
8. En déduire que ψ est une isométrie et conclure.

Solution 25

Désignons par h_λ l'homothétie de rapport λ.

1. Rappelons que les similitudes linéaires sont les composées d'homothéties linéaires de rapport positif et d'isométries linéaires.

   Les similitudes linéaires forment un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$. En effet soient R, S dans $\mathrm{O}(E)$. Comme $(h_\lambda R)^{-1} = R^{-1} h_\lambda^{-1} = R^{-1} h_{\lambda^{-1}} = h_{\lambda^{-1}} R^{-1}$, $(h_\lambda R)^{-1}$ est une similitude linéaire. De même $(h_\lambda R)(h_\mu S) = h_{\lambda+\mu} T$ où T est l'isométrie linéaire RS donc $(h_\lambda R)(h_\mu S)$ est une similitude linéaire.

   Les similitudes affines sont l'image réciproque des similitudes linéaires par le morphisme $\mathrm{GA}(E) \to \mathrm{GL}(E)$; il s'agit donc d'un sous-groupe du groupe affine $\mathrm{GA}(E)$.
2. Dans l'écriture $L = HR$, HR commutent car H est une homothétie et donc commute avec tous les éléments de $\mathrm{GL}(E)$. Supposons qu'il existe deux écritures $L = h_\lambda R = h_\mu S$ avec R, S isométries linéaires et λ, $\mu > 0$ alors $|\det L| = \lambda = \mu$ et donc $h_\lambda = h_\mu$ et $R = h_{\lambda^{-1}} L = h_{\mu^{-1}} L = S$. Il y a donc bien unicité.
3. Rappelons que l'angle $\widehat{ABC}$ est l'unique réel $\alpha \in [0, \pi]$ tel que

   $$\cos\alpha = \frac{\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \rangle}{||\overrightarrow{BA}||\,||\overrightarrow{BC}||}.$$

   Soit φ une similitude dont la partie linéaire L s'écrit $h_\lambda R$ avec $R \in \mathrm{O}(E)$. Nous avons

   $$\begin{aligned} \cos(\widehat{\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)}) &= \frac{\langle \overrightarrow{\varphi(B)\varphi(A)}, \overrightarrow{\varphi(B)\varphi(C)} \rangle}{||\overrightarrow{\varphi(B)\varphi(A)}||\,||\overrightarrow{\varphi(B)\varphi(C)}||} \\ &= \frac{\langle L(\overrightarrow{BA}), L(\overrightarrow{BC}) \rangle}{||L(\overrightarrow{BA})||\,||L(\overrightarrow{BC})||} \\ &= \frac{\langle h_\lambda R(\overrightarrow{BA}), h_\lambda R(\overrightarrow{BC}) \rangle}{||h_\lambda R(\overrightarrow{BA})||\,||h_\lambda R(\overrightarrow{BC})||} \\ &= \frac{\lambda^2 \langle R(\overrightarrow{BA}), R(\overrightarrow{BC}) \rangle}{\lambda^2 ||R(\overrightarrow{BA})||\,||R(\overrightarrow{BC})||} \\ &= \frac{\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \rangle}{||\overrightarrow{BA}||\,||\overrightarrow{BC}||} \\ &= \cos(\widehat{ABC}) \end{aligned}$$

   Il en résulte que les similitudes préservent les angles.
4. Trois points A, B et C sont alignés si l'angle $\widehat{ABC}$ vaut 0 ou π. Si une transformation préserve les angles, elle préserve donc aussi l'alignement.

5. Puisque E est un espace vectoriel réel de dimension $\geqslant 2$ une application bijective qui préserve l'alignement est affine. C'est le théorème fondamental de la géométrie affine.
6. La translation τ de vecteur $\overrightarrow{O\varphi(O)}$ convient et c'est la seule.
7. Soit $B \in E$. Les triangles OAB et $\psi(O)\psi(A)\psi(B)$ sont isométriques ; en effet ils ont trois angles égaux, $\psi(O) = O$ et $||\overrightarrow{O\psi(A)}|| = ||\overrightarrow{OA}||$. Par conséquent $||\overrightarrow{O\psi(B)}|| = ||\overrightarrow{OB}||$ et ψ est une application linéaire qui préserve la norme. Ensuite pour B, $C \neq O$ puisque ψ préserve les angles et $||\overrightarrow{OB}|| = ||\overrightarrow{OC}||$, on a $\langle\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\rangle = \langle\overrightarrow{O\psi(B)}, \overrightarrow{O\psi(C)}\rangle$. Il s'en suit que ψ est une application linéaire orthogonale qui préserve aussi la norme.
8. Nous avons donc montré que $\varphi = \tau \circ h_\lambda \circ \psi$, *i.e.* la composée d'une translation et d'une similitude linéaire.

Exercice 26 Groupes et propriétés géométrique de l'orbite.

Soit E un espace affine euclidien. Soit f un élément du groupe $\mathrm{Isom}(E)$ des isométries de E. Soit G le sous-groupe de $\mathrm{Isom}(E)$ engendré par f. Soit p un point de E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) L'orbite de p sous G est bornée ;

(2) Toute orbite sous G d'un point de E est bornée ;

(3) f a un point fixe.

Solution 26

Montrons que (3) implique (1).

Par hypothèse il existe $m \in E$ tel que $f(m) = m$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ nous avons

$$d(m, f^k(p)) = d(f^k(m), f^k(p)) = d(m, p)$$

ainsi l'orbite de p sous G est bornée.

Montrons que (1) implique (2).

Il existe $r > 0$ tel que $d(p, f^k(p)) \leqslant r$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soit m un point de E alors $d(f^k(p), f^k(m)) = d(p, m)$. Par conséquent

$$d(p, f^k(m)) \leqslant d(p, f^k(p)) + d(f^k(p), f^k(m)) \leqslant r + d(p, m).$$

Montrons que (2) implique (3).

Le théorème de la forme réduite des isométries de E implique l'existence de $g \in \mathrm{Isom}(E)$ avec un point fixe p et $\overrightarrow{v} \in \ker(f - \mathrm{id}_E)$ tel que $f = t_{\overrightarrow{v}} \circ g = g \circ t_{\overrightarrow{v}}$. Ainsi $f^k(A) = A + k\overrightarrow{v}$ et donc $d(A, f^k(A)) = k||\overrightarrow{v}|| \to +\infty$ si $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$. Puisque la suite $(f^k(A))_k$ est bornée nous obtenons que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ ainsi $f = g$ a un point fixe.