Premier devoir surveillé
23 octobre 2019, durée : 1h45

Soit G un groupe opérant sur un ensemble E. On note pour $g \in \mathrm{G}$ et $x \in E$ l'action de g sur x par : $g \cdot x$.

1. Montrer que pour tout x dans le E le stabilisateur
$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(x) = \mathrm{G}_x = \{g \in \mathrm{G} \mid g \cdot x = x\}$$
de x est un sous-groupe de G.
Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Notons G le groupe orthogonal $(\mathrm{O}(n, \mathbb{R}), \circ)$. Posons
$$\forall\, f \in \mathrm{G},\ \forall\, v \in \mathbb{R}^n \qquad f \cdot v = f(v).$$
Désignons par $\mathcal{C} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que
$$\mathrm{G} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad\qquad (f, v) \mapsto f \cdot v$$
définit une action du groupe G sur l'ensemble $\mathbb{R}^n$.
3. Déterminer l'orbite
$$\mathcal{O}_v^{\mathrm{G}} = \{f \cdot v \mid f \in \mathrm{G}\}$$
d'un élément v de $\mathbb{R}^n$ sous l'action de G.
4. Montrer que f appartient à G_{e_1} si et seulement si la matrice représentative de f dans $\mathcal{C}$ est du type
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$$
où P désigne un élément de $\mathrm{O}(n-1, \mathbb{R})$.
5. En déduire que $\mathrm{G}_{e_1} \simeq \mathrm{O}(n-1, \mathbb{R})$ en explicitant un isomorphisme entre $\mathrm{O}(n-1, \mathbb{R})$ et G_{e_1}.
6. Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Donner un isomorphisme de groupes $\phi_x \colon \mathrm{G}_x \xrightarrow{\simeq} \mathrm{G}_{e_1}$.
7. Pour quels $x \in \mathbb{R}^n$ a-t-on $\mathrm{G}_x \triangleleft \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$?
8. Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Nous restreignons l'action de G sur $\mathbb{R}^n$ à celle de G_x. Donner l'orbite
$$\mathcal{O}_v^{\mathrm{G}_x} = \{f \cdot v \mid f \in \mathrm{G}_x\}$$
d'un élément v de $\mathbb{R}^n$ sous cette action (peut-être s'aider d'un dessin).