Université Nice Sophia Antipolis
Année 2019-2020

Groupes et géométrie
23/10/2019, durée : 1h45

Éléments de correction du premier devoir surveillé

Soit G un groupe opérant sur un ensemble E. On note pour $g \in \mathrm{G}$ et $x \in E$ l'action de g sur x par : $g \cdot x$.

1. Montrons que pour tout x dans le E le stabilisateur

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(x) = \mathrm{G}_x = \{g \in \mathrm{G} \,|\, g \cdot x = x\}$$

de x est un sous-groupe de G.
Soit x dans E. Par définition d'une action $e \cdot x = x$ ce qui conduit à $e \in \mathrm{G}_x$.
Si g et g' appartiennent à G_x nous avons

$$(gg') \cdot x = g \cdot (g' \cdot x) = g \cdot x = x$$

donc gg' appartient à G_x.
Enfin si g appartient à G_x, alors $x = g \cdot x$ et en faisant agir g^{-1} de part et d'autre de l'égalité nous obtenons

$$g^{-1} \cdot x = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = (g^{-1}g) \cdot x = e \cdot x = x$$

ce qui montre que g^{-1} appartient à G_x.
En conclusion G_x est un sous-groupe de G.
Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Notons G le groupe orthogonal $(\mathrm{O}(n, \mathbb{R}), \circ)$. Posons

$$\forall\, f \in \mathrm{G},\ \forall\, v \in \mathbb{R}^n \qquad f \cdot v = f(v).$$

Désignons par $\mathcal{C}_n = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

2. Montrons que

$$\mathrm{G} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad\qquad (f, v) \mapsto f \cdot v$$

définit une action du groupe G sur l'ensemble $\mathbb{R}^n$.
Soit v dans $\mathbb{R}^n$. Nous avons

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \cdot v = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}(v) = v$$

et si f, g appartiennent à $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$

$$(f \circ g) \cdot v = (f \circ g)(v) = f(g(v)) = f \cdot g(v) = f \cdot (g \cdot v).$$

3. Déterminons l'orbite

$$\mathcal{O}_v^{\mathrm{G}} = \{f \cdot v \,|\, f \in \mathrm{G}\}$$

d'un élément v de $\mathbb{R}^n$ sous l'action de G.
Soit v dans $\mathbb{R}^n$.
Si $v = 0$, quel que soit $f \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ $f(v) = 0$ et

$$\mathcal{O}_0^{\mathrm{G}} = \{f \cdot 0 \,|\, f \in \mathrm{G}\} = \{0\}.$$

Si $v \neq 0$, alors du fait que les éléments $f \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ conservent la norme pour le produit scalaire standard de $\mathbb{R}^n$ nous avons $||f(v)|| = ||v||$ et donc $\mathcal{O}_v^{\mathrm{G}}$ est contenue dans la sphère $S(0, ||v||)$ de centre 0 et de *rayon $||v||$. Réciproquement soit u dans $\mathbb{R}^n$ tel que $||v|| = ||u||$, soient $\mathcal{B}_u = \left(\frac{u}{||u||},\, u_2,\, u_2,\, \ldots\, u_n\right)$ et $\mathcal{B}_v = \left(\frac{v}{||v||},\, v_2,\, v_2,\, \ldots\, v_n\right)$ deux bases orthonormées de $\mathbb{R}^n$ (on peut compléter par le procédé de Gram-Schmidt un vecteur de norme 1 en une base orthonormée en dimension finie) et soit f l'application linéaire qui transforme $\mathcal{B}_v$ en $\mathcal{B}_u$. Puisque $\mathcal{B}_v$ et $\mathcal{B}_u$ sont deux bases orthonormées, f appartient à $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$. De plus $f\left(\frac{v}{||v||}\right) = \frac{u}{||u||}$ et $||u|| = ||v||$ entraînent $f(v) = u$. Finalement u appartient à $\mathcal{O}_v^{\mathrm{G}}$ et ainsi $\mathcal{O}_v^{\mathrm{G}} = S(0,||v||)$ si $v \neq 0$.*

4. Montrons que f appartient à G_{e_1} si et seulement si la matrice représentative de f dans $\mathcal{C}_n$ est du type

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$$

où P désigne un élément de $\mathrm{O}(n-1,\mathbb{R})$.

Si f appartient à G_{e_1}, alors $f(e_1) = e_1$ et donc la première colonne de la matrice M représentant f dans la base canonique est : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. D'autre part $f(e_1) = e_1$ étant orthogonal à $f(e_2)$, $f(e_3)$, $\ldots$, $f(e_n)$ puisque f préserve le produit scalaire la première ligne de M est $(1\ 0\ 0\ \ldots\ 0)$. Par suite $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$. Puisque ${}^{\mathrm{t}}MM = \mathrm{id}_n$ nécessairement ${}^{\mathrm{t}}PP = \mathrm{id}_{n-1}$; anisi P appartient à $\mathrm{O}(n-1,\mathbb{R})$.

Réciproquement si

$$M = \mathrm{mat}(f,\mathcal{C}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$$

avec P dans $\mathrm{O}(n-1,\mathbb{R})$ nous avons bien : f appartient à $\mathrm{O}(n-1,\mathbb{R})$ (car ${}^{\mathrm{t}}MM = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^{\mathrm{t}}PP \end{pmatrix} = \mathrm{id}_n$) et $f(e_1) = e_1$.

5. Montrons que $\mathrm{G}_{e_1} \simeq \mathrm{O}(n-1,\mathbb{R})$ en explicitant un isomorphisme entre $\mathrm{O}(n-1,\mathbb{R})$ et G_{e_1}.

D'après 4. l'application $\Psi\colon \mathrm{O}(n-1,\mathbb{R}) \to \mathrm{G}_{e_1}$ définie par $\Psi(g) = f$ où $\mathrm{mat}(f,\mathcal{C}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$ et $\mathrm{mat}(g,\mathcal{C}_{n-1}) = P$ est bien à valeurs dans G_{e_1}. L'application Ψ est bien un morphisme de groupes : à la composition des applications correspond le produit des matrices. De plus g appartient à $\ker\Psi$ si et seulement si $\mathrm{mat}(g,\mathcal{C}_{n-1}) = \mathrm{id}_{n-1}$ si et seulement si $g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n-1}}$ ce qui prouve que Ψ est injective. La surjectivité de Ψ résulte directement de 4.

6. Soit $x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$. Donnons un isomorphisme de groupes $\phi_x\colon \mathrm{G}_x \xrightarrow{\simeq} \mathrm{G}_{e_1}$.

Soit x dans $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$. Soit h dans $\mathrm{O}(n-1,\mathbb{R})$ tel que $f(e_1) = \frac{x}{||x||}$ (une telle application existe d'après 3.) Considérons

$$\phi_x\colon \mathrm{G}_x \to \mathrm{G}_{e_1} \qquad\qquad f \mapsto h \circ f \circ h^{-1}.$$

Notons que $\phi_x(f)$ appartient à $\mathrm{O}(n-1,\mathbb{R})$ puisque f et h appartiennent à $\mathrm{O}(n-1,\mathbb{R})$. D'autre part

$$\phi_x(f)(e_1) = h(f(h^{-1}(e_1))) = h\left(f\left(\frac{x}{||x||}\right)\right) = h\left(\frac{x}{||x||}\right) = e_1$$

ainsi ϕ_x est bien à valeurs dans G_{e_1}. Le fait que ϕ_x est un isomorphisme de groupes se vérifie directement.

7. Déterminons les $x \in \mathbb{R}^n$ pour lesquels on a $\mathrm{G}_x \lhd \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$.

Soit x dans $\mathbb{R}^n$.

Si $x = 0$, alors $\mathrm{G}_0 = \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ et $\mathrm{G}_0 \lhd \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$.

Supposons $x \neq 0$. Soit f dans $\mathrm{G}_x \smallsetminus \{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\}$ (rappelons que d'après 3. G_x n'est pas réduit à $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$). Il existe y dans $\mathbb{R}^n$ tel que $||y|| = ||x||$ et $f(y) = y$. D'après 3. on peut alors construire h dans $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ tel que $h(y) = x$. Alors $h(f(h^{-1}(x))) \neq x$ (en effet $h^{-1}(x) = y$ donc $f(h^{-1}(x)) = f(y) \neq y$). Ainsi G_x n'est pas distingué dans $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$.

Finalement $\mathrm{G}_x \lhd \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ si et seulement si $x = 0$.

8. Soit $x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$. Nous restreignons l'action de G sur $\mathbb{R}^n$ à celle de G_x. Donnons l'orbite

$$\mathcal{O}_v^{\mathrm{G}_x} = \left\{ f \cdot v \mid f \in \mathrm{G}_x \right\}$$

d'un élément v de $\mathbb{R}^n$ sous cette action.

D'après 4. un élément f de G_x s'identifie à une application orthogonale de $\mathrm{O}(n-1,\mathbb{R})$ qui agit sur $x^\perp$ (en identifiant $\mathbb{R}^{n-1}$ et $x^\perp$) en laissant fixe la direction x. Écrivons v dans une base orthonormée commençant par $\frac{x}{||x||}$; on voit que l'image par f de v appartient à $S(0, ||v||)$ (car f conserve la norme) et aussi à l'hyperplan affine $\mathcal{H}$ de $\mathbb{R}^n$ orthogonal à x et passant par la projection orthogonale π de v sur la droite x (car f préserve la coordonnée suivant $\frac{x}{||x||}$). L'intersection de $S(0, ||v||)$ et de $\mathcal{H}$ est la sphère $S_{\mathcal{H}}$ de $\mathcal{H}$ centrée en $\pi(v)$ et de rayon $dist(v, \mathrm{vect}(x))$. Réciproquement si u appartient à $S_{\mathcal{H}}$ la projection orthogonale $p(u)$ de u sur $x^\perp$ est de même norme que la projection orthogonale $p(v)$ de v sur $x^\perp$. Il existe donc une application orthogonale f de $\mathrm{O}(n-1,\mathbb{R})$ qui envoie $p(u)$ sur $p(v)$ (nous avons identifié $\mathbb{R}^{n-1}$ et $x^\perp$). Nous étendons alors f à $\widetilde{f}$ sur $\mathbb{R}^n$ tout entier en imposant que $\widetilde{f}$ laisse fixe la direction x. L'application $\widetilde{f}$ appartient à G_x et envoie u sur v. Il s'en suit que $\mathcal{O}_v^{\mathrm{G}_x} = S_{\mathcal{H}}$.