Séances de révisions 7 et 8 janvier 2020

Exercice 1 Montrer qu'un groupe d'ordre 200 n'est pas simple.

Exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un morphisme injectif de $\mathcal{S}_n$ dans $\mathcal{A}_{n+2}$.

Exercice 3 Soit G un groupe de type fini.

Un sous-groupe H de G est-il nécessairement de type fini ? Justifiez votre réponse.

Exercice 4 Soit G un groupe abélien d'ordre pq où p et q sont deux nombres premiers distincts. Montrer que G est cyclique.

Exercice 5

- (1) Soit H un sous-groupe distingué de $\mathcal{S}_4$ qui contient un 4-cycle. Montrer que $H = \mathcal{S}_4$.
- (2) Soient P_1 et P_2 deux sous-groupes d'ordre 8 de $\mathcal{S}_4$. Supposons que $P_1 \cap P_2$ contienne un 4-cycle. Montrer que $P_1 = P_2$ (indication : on montre que le normalisateur de $P_1 \cap P_2$ dans $\mathcal{S}_4$ contient $P_1 \cup P_2$, on considère le sous-groupe engendré par $P_1 \cup P_2$ et on utilise 1.)
- (3) D'après ce qui précède un 4-cycle est dans un unique sous-groupe d'ordre 8 de $\mathcal{S}_4$. En déduire le nombre de sous-groupes d'ordre 8 de $\mathcal{S}_4$ en comptant le nombre de 4-cycles.

Exercice 6 Soit G un groupe d'ordre 15.

- (1) Combien G possède-t-il d'éléments d'ordre 3 ?
- (2) Combien G possède-t-il d'éléments d'ordre 5 ?
- (3) Démontrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.

Exercice 7 Soient p un nombre premier et n un entier naturel avec $p > n$. Considérons un groupe G d'ordre pn et H un sous-groupe de G d'ordre p . Montrer que H est un sous-groupe distingué de G .

Indication : compter les p -SYLOW de G .

Exercice 8 Déterminer à isomorphisme près tous les groupes d'ordre 33.

Exercice 9

- (1) Soit G un groupe fini de cardinal p^m avec p premier et $m \in \mathbb{N}^*$ qui opère sur un ensemble fini non vide E . Posons

$$E^G = \{x \in E \mid \forall g \in G, g \cdot x = x\}.$$

Montrer que $|E^G| = |E| \pmod{p}$.

- (2) Soit H un groupe fini d'ordre n . Soit p un diviseur premier de n . Montrer que H contient un élément d'ordre p (lemme de CAUCHY). Indication : faire agir $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur l'ensemble E des $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ de H^p tels que $x_1 x_2 \dots x_p = e$.

- (3) Soit H un groupe fini d'ordre n . Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $x \in H$ on ait $x^m = e$.
Montrer que n divise une puissance de m .

Exercice 10 Soit G un groupe d'ordre 2009.

- (1) Montrer que $G \simeq P \times Q$ où P est un groupe d'ordre 41 et Q est un groupe d'ordre 49. En déduire que chaque groupe d'ordre 2009 est abélien.
- (2) Classifier à isomorphisme près tous les groupes d'ordre 2009.
- (3) Soient P est un groupe d'ordre 41 et Q est un groupe d'ordre 49. Montrer que $\text{Aut}(G) \simeq \text{Aut}(P) \times \text{Aut}(Q)$.
- (4) Montrer que
- si Q est cyclique, alors $\text{Aut}(Q)$ est cyclique aussi. Quel est l'ordre de $\text{Aut}(Q)$ quand Q est cyclique ?
 - si Q n'est pas cyclique, alors $\text{Aut}(Q)$ est isomorphe à $\text{GL}(2, \mathbb{F}_7)$ où $\mathbb{F}_7$ est le corps à 7 éléments. Quel est l'ordre de $\text{GL}(2, \mathbb{F}_7)$?