

Feuille d'exercices : Groupes libres

Exercice 1 Soient r et s deux entiers > 1 premiers entre eux. Quel est l'ordre du groupe de présentation $\langle a \mid a^r, a^s \rangle$?

Exercice 2 Soit G le groupe de présentation

$$\langle a, b, c \mid a^3 = b^3 = c^4 = e, ac = ca^{-1}, aba^{-1} = bcb^{-1} \rangle$$

Montrer que $ab^3a^{-1} = bc^3b^{-1}$ puis que $c = e$; en déduire G .

Exercice 3 Montrer que tout élément non trivial d'un groupe libre est d'ordre infini.

Exercice 4 Quel est l'ordre du groupe G engendré par deux éléments x et y vérifiant les relations

$$x^3 = y^2 = (xy)^2 = 1 ?$$

Quels sont les sous-groupes de G ?

Exercice 5 Quel est l'ordre du groupe G engendré par deux éléments x et y vérifiant les relations

$$xy^2 = y^3x \qquad yx^3 = x^2y ?$$

Exercice 6 Le groupe de Fibonacci¹ G est engendré par les éléments a, b, c et d vérifiant les relations

$$ab = c \qquad bc = d \qquad cd = a \qquad da = b.$$

Quel est l'ordre de G ?

Exercice 7 Exprimer comme produit direct de sous-groupes monogènes le sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{Q}^*$ engendré par $\{-6, 6\}$.

Exercice 8 Montrer que le groupe multiplicatif engendré par les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

est abélien.

Exprimer ce groupe, de deux façons différentes, comme produit direct de sous-groupes cycliques.

Exercice 9 [Présentation de $\mathcal{S}_n$] Montrer que

$$\mathcal{S}_n = \langle t_1, t_2, \dots, t_{n-1} \mid t_i^2 = 1, (t_i t_{i+1})^3 = 1, [t_i, t_j] = 1 \text{ pour } 2 \leq |i - j| \rangle$$

(Indication : le groupe $\mathcal{S}_n$ est engendré par $(1 \ 2), (2 \ 3), \dots, (n-1 \ n)$).

1. Les groupes de Fibonacci ont été introduits par John Conway en 1965.

Exercice 10 Rappelons que le groupe des quaternions est le sous-groupe du groupe des matrices 2×2 inversibles à coefficients complexes engendré par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -\mathbf{i} & 0 \\ 0 & \mathbf{i} \end{pmatrix}$$

Montrer que ce groupe admet les deux présentations suivantes

$$\langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^2 \rangle \quad \langle r, s, t \mid r^2 = s^2 = t^2 = rst \rangle.$$

Exercice 11 [Présentation de $\mathcal{A}_4$]

1. Soient $a = (2 \ 3 \ 4)$ et $b = (1 \ 2)(3 \ 4)$ deux éléments de $\mathcal{A}_4$. Montrer que

$$\langle a, b \mid a^3 = b^2 = (ab)^3 = e \rangle$$

est une présentation de $\mathcal{A}_4$.

2. Donner une seconde présentation de $\mathcal{A}_4$ en utilisant les deux 3-cycles $(2 \ 3 \ 4)$ et $(1 \ 3 \ 2)$.

Exercice 12 [Présentation de $\mathcal{S}_4$] Nous allons montrer que le groupe $\mathcal{S}_4$ est isomorphe au groupe G de présentation

$$\langle a, b \mid a^3 = b^4 = (ab)^2 = e \rangle.$$

1. En utilisant les éléments $\alpha = (2 \ 3 \ 4)$ et $\beta = (1 \ 3 \ 2 \ 4)$ de $\mathcal{S}_4$ montrer qu'il existe un morphisme de G sur $\mathcal{S}_4$. Désignons par H le sous-groupe de G engendré par a et b^2 .
2. Montrer que bab^{-1} est un élément de H ; en déduire que H est un sous-groupe distingué de G .
3. Montrer que G/H a au plus deux éléments : les classes H et bH .
4. Montrer que $(ab^2)^3 = e$.
5. Conclure en utilisant la présentation de $\mathcal{A}_4$ obtenue précédemment.

Exercice 13 [Présentation d'un produit semi-direct de groupes cycliques]

Notation : $[a]_m$ désigne un élément de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ représenté par $a \in \mathbb{Z}$, avec $0 \leq a \leq m-1$. De même $[a]_n$ désigne un élément de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ représenté par $a \in \mathbb{Z}$, avec $0 \leq a \leq n-1$.

Soient m, n des entiers ≥ 2 et

$$\tau : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

un morphisme. Désignons par G le produit semi-direct $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_{\tau} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ défini par τ .

Posons

$$[i]_n = \tau([1]_m)([1]_n) \quad h = ([1]_n, [0]_m) \quad k = ([0]_n, [1]_m).$$

Vérifions que

$$i^m \equiv 1 \pmod{n} \quad h^n = k^m = ([0]_n, [0]_m) \quad khk^{-1} = h^i.$$

En déduire que G admet pour présentation

$$\langle a, b \mid a^n = b^m = e, ab = ba^i \rangle.$$