Feuille d'exercices : Groupes libres

Exercice 1 Soient r et s deux entiers > 1 premiers entre eux. Quel est l'ordre du groupe de présentation $\langle a \,|\, a^r,\, a^s \rangle$?

Solution 1 L'ordre de a est un diviseur de r et s qui sont premiers entre eux donc a est d'ordre 1. Puisque G est engendré par a, le groupe G est d'ordre 1. Ainsi $\mathrm{G} = \{e_{\mathrm{G}}\}$.

Exercice 2 Soit G le groupe de présentation

$$\langle a,\, b,\, c \,|\, a^3 = b^3 = c^4 = e_{\mathrm{G}},\, ac = ca^{-1},\, aba^{-1} = bcb^{-1} \rangle.$$

Montrer que $ab^3a^{-1} = bc^3b^{-1}$ puis que $c = e_{\mathrm{G}}$; en déduire G.

Solution 2 Nous avons

$$\begin{aligned} ab^3a^{-1} &= ab(a^{-1}a)b(a^{-1}a)ba^{-1} \\ &= (aba^{-1})(aba^{-1})(aba^{-1}) \\ &= (bcb^{-1})(bcb^{-1})(bcb^{-1}) \\ &= bc(b^{-1}b)c(b^{-1}b)cb^{-1} \\ &= bc^3b^{-1} \end{aligned}$$

Puisque $b^3 = e$, nous avons $ab^3a^{-1} = aa^{-1} = e_{\mathrm{G}}$. Comme $bc^3b^{-1} = ab^3a^{-1}$ nous obtenons que $bc^3b^{-1} = e_{\mathrm{G}}$ et que $c^3 = e_{\mathrm{G}}$. Par suite $c = c^4(c^3)^{-1} = e_{\mathrm{G}}(e_{\mathrm{G}})^{-1} = e_{\mathrm{G}}$.

Puisque $c = e$, la relation $ac = ca^{-1}$ devient $a = a^{-1}$ ou encore $a^2 = e$. Comme $a^3 = e$ nous obtenons $a = e$.

Enfin puisque $a = c = e_{\mathrm{G}}$ la relation $aba^{-1} = bcb^{-1}$ se réduit à $b = e_{\mathrm{G}}$. Comme a, b et c engendrent G nous obtenons $\mathrm{G} = \{e_{\mathrm{G}}\}$.

Exercice 3 Montrer que tout élément non trivial d'un groupe libre est d'ordre infini.

Solution 3 Soit G un groupe libre. Soit g un élément non trivial de G. Raisonnons par l'absurde, *i.e.* supposons que g soit d'ordre fini n ; alors $g^n = e$. Or g^n est un mot formé avec les générateurs de G, la relation $g^n = e$ fournit donc une relation entre ces générateurs ce qui contredit le fait que G est un groupe libre.

Exercice 4 Quel est l'ordre du groupe G engendré par deux éléments x et y vérifiant les relations

$$x^3 = y^2 = (xy)^2 = 1\,?$$

Quels sont les sous-groupes de G ?

Solution 4 Supposons que G ne soit pas trivial. Ceci implique que $x \neq y$ (en effet si $x = y$ alors $x^3 = 1$ se réécrirait $y^3 = 1$ et combiné à $y^2 = 1$ on obtiendrait $x = y = 1$.

L'ordre de x est 3 ; celui de y est 2. Il en résulte que $|\mathrm{G}|$ est un multiple de $2 \times 3 = 6$. Le groupe G contient e, x, x^2, y, xy et xy^2. Montrons qu'il n'y a pas d'autres éléments dans G. Commençons à écrire la table de G en utilisant ces six éléments

	e	x	x^2	y	xy	x^2y
e	e	x	x^2	y	xy	x^2y
x	x	x^2	e	xy	x^2y	y
x^2	x^2	e	x	x^2y	y	xy
y	y	x^2y	xy	e	x^2	x
xy	xy	y	x^2y	x	e	x^2
x^2y	x^2y	xy	y	x^2	x	e

Par suite cette table est complète et le groupe G compte 6 éléments.

Les sous-groupes de G sont

- le sous-groupe trivial,
- le groupe G lui-même,
- un unique (théorème de Sylow) sous-groupe d'ordre 3 : $\langle x\rangle$,
- trois sous-groupes d'ordre 2 exactement (théorème de Sylow) : $\langle y\rangle$, $\langle xy\rangle$, $\langle x^2y\rangle$.

Exercice 5 Quel est l'ordre du groupe G engendré par deux éléments x et y vérifiant les relations

$$xy^2 = y^3x \qquad\qquad yx^3 = x^2y\,?$$

Solution 5 À partir de $xy^2 = y^3x$ nous obtenons

$$y^2 = x^{-1}y^3x \qquad\qquad y^3 = xy^2x^{-1}$$

et

$$y^4 = x^{-1}y^6x \qquad\qquad y^6 = xy^4x^{-1}.$$

Par suite d'une part

$$y^9 = (y^3)^3 = (xy^2x^{-1})^3 = xy^6x^{-1}$$

et d'autre part

$$xy^6x^{-1} = x(y^6)x^{-1} = x(xy^4x^{-1})x^{-1} = x^2y^4x^{-2}.$$

On en déduit que $y^9 = x^2y^4x^{-2}$. De plus

$$y^9 = y^{-1}(y^9)y = y^{-1}(x^2y^4x^{-2})y = y^{-1}(x^2y)y^4(y^{-1}x^{-2})y = y^{-1}(x^2y)y^4(x^2y)^{-1}y$$

Mais $yx^3 = x^2y$ donc

$$y^9 = y^{-1}(x^2y)y^4(x^2y)^{-1}y = y^{-1}(yx^3)y^4(yx^3)^{-1}y = x^3y^4x^{-3}$$

Puisque $y^9 = x^2y^4x^{-2}$ nous obtenons

$$x^2y^4x^{-2} = x^3y^4x^{-3}$$

soit $y^4 = xy^4x^{-1}$. Mais on a vu précédemment que $y^6 = xy^4x^{-1}$ donc $y^4 = y^6$ soit $y^2 = e$. À partir de $xy^2 = y^3x$ on a $y^3 = e$ et finalement $y = e$. De plus $yx^3 = x^2y$ se réécrit $x^3 = x^2$ d'où $x = e$. Finalement G est le groupe trivial.

Exercice 6 Le groupe de Fibonnacci [1] G est engendré par les éléments a, b, c et d vérifiant les relations

$$ab = c \qquad bc = d \qquad cd = a \qquad da = b.$$

Quel est l'ordre de G ?

Solution 6 À partir de $a = cd$ nous obtenons

$$a^2 = acd = cda = cb = ab^2$$

d'où $a = b^2$.

De même nous obtenons que $c^2 = b$, $d^2 = c$ et $a^2 = d$.

Par suite

$$d = a^2 = b^4 = c^8 = d^{16}$$

et $d^{15} = e$.

De la même façon nous obtenons que $a^{15} = b^{15} = c^{15} = e$.

A partir de $ab = c$ nous obtenons que $ab = a^4$ d'où $aa^8 = a^4$ et $a^5 = e$. De même $b^5 = c^5 = d^5 = e$. Par conséquent $d = a^2$, $b = a^3$, $c = a^4$ et $\mathrm{G} \simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

1. Les groupes de Fibonnacci ont été introduits par John Conway en 1965.

Exercice 7 Exprimer comme produit direct de sous-groupes monogènes le sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{Q}^*$ engendré par $\{-6, 6\}$.

Solution 7 Le sous-groupe $\mathrm{H} = \langle 6 \rangle$ de $\mathrm{G} = \langle 6, -6 \rangle \subset \mathbb{Q}^*$ est monogène.

Le groupe G/H est monogène engendré par $(-6)\mathrm{H}$.

Le sous-groupe H est distingué dans G : il suffit de vérifier que $(-6) \times 6 \times (-6)^{-1}$ appartient à H ce qui est vrai puisque ce nombre vaut 6

Ainsi G est produit direct de deux groupes monogènes : $\mathrm{G} \simeq \mathrm{H} \times \mathrm{G}/\mathrm{H}$.

Exercice 8 Montrer que le groupe multiplicatif engendré par les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

est abélien.

Exprimer ce groupe, de deux façons différentes, comme produit direct de sous-groupes monogènes.

Solution 8 Soit G le groupe multiplicatif engendré par les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que $AB = BA = -2\mathrm{id}$;

le groupe G est donc abélien. Le sous-groupe $\mathrm{H} = \langle A \rangle$ de G est monogène.

Le groupe G/H est monogène engendré par $B\mathrm{H}$.

Notons que $BAB^{-1} = A$; en particulier BAB^{-1} appartient à H et H est un sous-groupe distingué de G.

Il en résulte que G est isomorphe au produit direct des deux groupes monogènes H et G/H.

Exercice 9 [Présentation de $\mathcal{S}_n$] Montrer que

$$\mathcal{S}_n = \langle t_1, t_2, \ldots, t_{n-1} \,|\, t_i^2 = 1, (t_i t_{i+1})^3 = 1, [t_i, t_j] = 1 \text{ pour } 2 \leqslant |i-j| \rangle$$

(Indication : le groupe $\mathcal{S}_n$ est engendré par $(1\ 2)$, $(2\ 3)$, $\ldots$, $(n-1\ n)$).

Solution 9 Pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$ posons $t_i = (i\ i+1)$. Le groupe $\mathcal{S}_n$ est engendré par ces transpositions. Cet ensemble de transpositions vérifie les relations données car une transposition est d'ordre 2, deux transpositions disjointes commutent (et pour les transpositions considérées t_i et t_j sont disjointes si et seulement si $|i-j| > 1$), le produit $t_i t_{i+1}$ est égal au 3-cycles $(i\ i+1\ i+2)$ et est donc d'ordre 3. Par suite

$$\mathcal{S}_n = \langle t_1, t_2, \ldots, t_{n-1} \,|\, t_i^2 = \mathrm{id}, (t_i t_{i+1})^3 = \mathrm{id}, [t_i, t_j] = \mathrm{id} \text{ pour } |i-j| > 1 \rangle$$

En effet soit H le sous-groupe de $\mathcal{S}_n$ engendré par les t_i. Le groupe H est distingué dans $\mathcal{S}_n$ car

$$\sigma t_i \sigma^{-1} = (\sigma(i)\ \sigma(i+1))$$

et toute transposition est dans H : si $|i-k| > 1$,

$$(i\ k) = (k-1\ k)(i\ k)(k-1\ k).$$

Ainsi H contient $\mathcal{A}_n$ car tout sous-groupe distingué non trivial de $\mathcal{S}_n$ contient $\mathcal{A}_n$.

Mais H contient strictement $\mathcal{A}_n$ car les transpositions ne sont pas des permutations paires. L'indice de $\mathcal{A}_n$ dans $\mathcal{S}_n$ étant 2 nous obtenons que l'indice de H dans $\mathcal{S}_n$ est 1. Il s'ensuit que $\mathcal{S}_n = \mathrm{H}$.

Exercice 10 Rappelons que le groupe des quaternions $\mathbb{H}_8$ est le sous-groupe du groupe des matrices 2×2 inversibles à coefficients complexes engendré par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} -\mathbf{i} & 0 \\ 0 & \mathbf{i} \end{pmatrix}$$

Montrer que ce groupe admet les deux présentations suivantes

$$\langle A, B \,|\, A^2 = B^2 = (AB)^2 \rangle \qquad\qquad \langle R, S, T \,|\, R^2 = S^2 = T^2 = RST \rangle.$$

Solution 10 On peut vérifier que $A^2 = B^2 = (AB)^2 = -\mathrm{id}$ d'où la première présentation pour $\mathbb{H}_8$ (en effet un groupe qui a cette présentation est d'ordre 8).

Posons $R = A$, $S = B$ et $T = AB$; alors $R^2 = S^2 = -\mathrm{id}$ d'après ce qu'on vient de voir. Par ailleurs $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $T^2 = -\mathrm{id}$. Et $RST = ABAB = (AB)^2 = -\mathrm{id}$ d'où la deuxième présentation proposée.

Exercice 11 [Présentation de $\mathcal{A}_4$]

1. Soient $a = (2\ 3\ 4)$ et $b = (1\ 2)(3\ 4)$ deux éléments de $\mathcal{A}_4$. Montrer que
$$\langle a,\, b \,|\, a^3 = b^2 = (ab)^3 = e\rangle$$
est une présentation de $\mathcal{A}_4$.
2. Donner une seconde présentation de $\mathcal{A}_4$ en utilisant les deux 3-cycles $(2\ 3\ 4)$ et $(1\ 3\ 2)$.

Solution 11

1. Rappelons que $\mathcal{A}_4$ est d'ordre 12. Le groupe G de présentation
$$\langle a,\, b \,|\, a^3 = b^2 = (ab)^3 = e\rangle$$
est d'ordre 12 ; en effet ses éléments sont
$$e,\, a,\, a^2,\, b,\, ab,\, a^2b,\, ba,\, ba^2,\, aba,\, a^2ba,\, aba^2,\, a^2ba^2.$$
Le morphisme φ de G dans $\mathcal{A}_4$ défini par
$$\varphi(a) = (1\ 2\ 3) \qquad\qquad \varphi(b) = (1\ 2)(3\ 4)$$
réalise un isomorphisme entre G et $\mathcal{A}_4$.
2. Posons $\alpha = (2\ 3\ 4)$ et $\beta = (1\ 3\ 2)$; alors $\alpha\beta = (1\ 4\ 2)$ et
$$\alpha^3 = \mathrm{id} \qquad\qquad \beta^3 = \mathrm{id} \qquad\qquad (\alpha\beta)^3 = \mathrm{id}$$
On peut vérifier que le groupe G de présentation
$$\langle \alpha,\, \beta,\, |\, \alpha^3 = \beta^3 = (\alpha\beta)^3 = e\rangle$$
est d'ordre 12. On en déduit que G et $\mathcal{A}_4$ sont isomorphes.

Exercice 12 [Présentation de $\mathcal{S}_4$] Nous allons montrer que le groupe $\mathcal{S}_4$ est isomorphe au groupe G de présentation
$$\langle a,\, b \,|\, a^3 = b^4 = (ab)^2 = e\rangle.$$

1. En utilisant les éléments $\alpha = (2\ 3\ 4)$ et $\beta = (1\ 3\ 2\ 4)$ de $\mathcal{S}_4$ montrer qu'il existe un morphisme de G sur $\mathcal{S}_4$. Désignons par H le sous-groupe de G engendré par a et b^2.
2. Montrer que bab^{-1} est un élément de H ; en déduire que H est un sous-groupe distingué de G.
3. Montrer que ${}^{\mathrm{G}}\!/_{\mathrm{H}}$ a au plus deux éléments : les classes H et bH.
4. Montrer que $(ab^2)^3 = e$.
5. Conclure en utilisant la présentation de $\mathcal{A}_4$ obtenue précédemment.

Solution 12

1. Remarquons que les permutations α et β considérées vérifient les relations
$$\alpha^3 = \mathrm{id}, \qquad\qquad \beta^4 = \mathrm{id}, \qquad\qquad (\alpha\beta)^2 = \mathrm{id}.$$
Il existe donc un morphisme φ de G sur $\mathcal{S}_4$ qui envoie a sur α et b sur β. C'est de plus un morphisme injectif.

2. Nous avons
$$bab^{-1} = bab^3 = (bab)b^2, \qquad bab = a^{-1} = a^2.$$
Donc $bab^{-1} = a^2b^2$ appartient à H. Puisque G est engendré par a et b, cette relation implique que H est distingué dans G.
3. Puisque G est engendré par a et b, G/H est engendré par aH et bH, donc par bH car $a\mathrm{H} = \mathrm{H}$. Or $b^2\mathrm{H} = \mathrm{H}$ donc G/H contient au plus les deux éléments H et bH.
4. Nous avons $abba = b^3a^2a^2b^3 = b^3ab^3$ car $ab = b^{-1}a^{-1} = b^3a^2$ et $ba = a^{-1}b^{-1} = a^2b^3$. Il en résulte que
$$(ab^2)^3 = abbabbabb = b^3ab^3b^2ab^2 = b^3abab^2 = b^3(abab)b = b^4 = e.$$
5. Le sous-groupe H de G a pour présentation
$$\langle a,\, c \,|\, a^3 = c^2 = (ac)^3\rangle$$
(poser $c = b^2$). Les groupes H et $\mathcal{A}_4$ ont même présentation et $\varphi(\mathrm{H}) \subset \mathcal{A}_4$ donc $\varphi(\mathrm{H}) = \mathcal{A}_4$; en particulier H et $\mathcal{A}_4$ sont isomorphes. Le sous-groupe H est d'indice 2 dans G et $\mathcal{A}_4$ est d'indice 2 dans $\mathcal{S}_4$. Ainsi $|\mathrm{G}| = |\mathcal{S}_4|$. Finalement φ est un morphisme injectif de G dans $\mathcal{S}_4$ et $|\mathrm{G}| = |\mathcal{S}_4|$ donc φ réalise un isomorphisme entre G et $\mathcal{S}_4$.

Exercice 13 [Présentation d'un produit semi-direct de groupes cycliques]

Notation : $[a]_m$ désigne un élément de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ représenté par $a \in \mathbb{Z}$, avec $0 \leqslant a \leqslant m-1$. De même $[a]_n$ désigne un élément de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ représenté par $a \in \mathbb{Z}$, avec $0 \leqslant a \leqslant n-1$.

Soient m, n des entiers $\geqslant 2$ et
$$\tau\colon \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)$$
un morphisme. Désignons par G le produit semi-direct $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_\tau \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ défini par τ.

Posons
$$[i]_n = \tau([1]_m)([1]_n) \qquad h = ([1]_n, [0]_m) \qquad k = ([0]_n, [1]_m).$$

Vérifions que
$$i^m \equiv 1(\text{mod n}) \qquad h^n = k^m = ([0]_n, [0]_m) \qquad khk^{-1} = h^i.$$

En déduire que G admet pour présentation
$$\langle a,\, b \,|\, a^n = b^m = e,\, ab = ba^i\rangle.$$

Solution 13 Un morphisme $\tau\colon \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)$ est entièrement déterminé par l'image $\tau([1]_m)$ de $[1]_m$ dans $\mathrm{Aut}\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)$. Cette image est elle-même déterminée par l'image de $[1]_n$ par $\tau([1]_m)$. Par suite un morphisme $\tau\colon \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)$ est entièrement déterminé par $[i]_n = \tau([1]_m)([1]_n)$. Comme $[1]_m$ est d'ordre m, on a $\tau([1]_m)^m = \mathrm{id}$. Ainsi $i^m \equiv 1 \pmod{n}$.

Clairement $h^n = k^m = ([0]_n, [0]_m)$. L'inverse de k dans G est $k^{-1} = ([0]_n, [m-1]_m)$. Il en résulte que
$$\begin{aligned} hk^{-1} &= ([1]_n, [0]_m)([0]_n, [m-1]_m) \\ &= ([1]_n + \tau([0]_m)([0]_n), [m-1]_m) \\ &= ([1]_n, [m-1]_m) \end{aligned}$$
et donc que
$$\begin{aligned} khk^{-1} &= ([0]_n, [1]_m)([1]_n, [m-1]_m) \\ &= ([0]_n + \tau([1]_m)([1]_n), [0]_m) \\ &= ([i]_n, [0]_m) \end{aligned}$$
En particulier $khk^{-1} = h^i$.

Le groupe G est engendré par $a = h$ et $b = k^{-1}$ qui vérifient $a^n = b^ba^i$. Une présentation de G est la suivante
$$\mathrm{G} = \langle a,\, b \,|\, a^n = b^m = e,\, ab = ba^i\rangle.$$