Feuille d'exercices :
Produits semi-direct

Exercice 1 Soient N et H des groupes et soit $\phi\colon \mathrm{H} \to \mathrm{Aut}(\mathrm{N})$ un morphisme de groupes. Notons $\mathrm{N} \rtimes_\phi \mathrm{H}$ l'ensemble $\mathrm{N} \times \mathrm{H}$ muni de la loi de composition définie par

$$(n_1, h_1) \rtimes_\phi (n_2, h_2) = \big(n_1\phi(h_1)(n_2), h_1h_2\big).$$

1. Montrer que $\mathrm{N} \rtimes_\phi \mathrm{H}$ est un groupe appelé produit semi-direct de H par N relativement à ϕ.
2. Montrer que $\mathrm{N} \times \{e_\mathrm{H}\} \lhd \mathrm{N} \rtimes_\phi \mathrm{H}$ et $\{e_\mathrm{N}\} \times \mathrm{H} \subset \mathrm{N} \rtimes_\phi \mathrm{H}$.
3. Identifier le quotient de $\mathrm{N} \rtimes_\phi \mathrm{H}$ par $\mathrm{N} \times \{e_\mathrm{H}\}$.

Exercice 2
Soit G un groupe. Soient N et H deux sous-groupes de G tels que $\mathrm{N} \cap \mathrm{H} = \{e\}$, $\mathrm{G} = \mathrm{NH}$ et $\mathrm{N} \lhd \mathrm{G}$.

1. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} i\colon \mathrm{H} & \to & \mathrm{Aut}(\mathrm{N}) \\ h & \mapsto & i_h\colon \mathrm{N} \to \mathrm{N} \\ & & \qquad n \mapsto hnh^{-1} \end{array}$$

   est un morphisme de groupes.
2. Montrer que

$$f\colon \mathrm{N} \rtimes_i \mathrm{H} \to \mathrm{G} \qquad\qquad (n,h) \mapsto nh$$

   est un isomorphisme de groupes.

On dit alors que G est le produit semi-direct de H par N.

Exercice 3 Montrer que le produit semi-direct $\mathrm{N} \rtimes_\phi \mathrm{H}$ est direct si et seulement si ϕ est le morphisme trivial si et seulement si $\{e_\mathrm{N}\} \times \mathrm{H} \lhd \mathrm{N} \rtimes_\phi \mathrm{H}$.

Exercice 4 Soit

$$1 \longrightarrow \mathrm{N} \xrightarrow{i} \mathrm{G} \xrightarrow{p} \mathrm{H} \longrightarrow 1$$

une suite exacte (courte).

1. Montrer que si G est le produit direct de H et N ou bien un produit semi-direct de H par N, alors on a une telle suite exacte.
2. Réciproquement soit une telle suite exacte. Si p possède une section, c'est-à-dire s'il existe un morphisme de groupes $s\colon \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ tel que $p \circ s = \mathrm{id}_\mathrm{H}$, montrer que G est le produit semi-direct de H par N pour l'opération $h \cdot n = s(h)ns(h)^{-1}$.
3. Donner un exemple de suite exacte courte qui n'est pas un produit semi-direct.

Exercice 5 Nous avons vu en cours que

$$\mathcal{S}_n \simeq \mathcal{A}_n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \qquad \mathrm{D}_{2n} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \qquad \mathrm{GL}(n, \Bbbk) \simeq \mathrm{SL}(n, \Bbbk) \rtimes \Bbbk^*.$$

Ces produits semi-directs sont-ils directs ?

Exercice 6 Soit $\mathrm{G} = \mathrm{N} \rtimes \mathrm{H}$. Soit K un sous-groupe de G contenant N. Montrer que $\mathrm{K} = \mathrm{N} \rtimes (\mathrm{K} \cap \mathrm{H})$.

Exercice 7 Soient H et N des groupes. Soient φ, $\psi\colon \mathrm{H} \to \mathrm{Aut}(\mathrm{N})$ des morphismes. On veut trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour que $\mathrm{N} \rtimes_\varphi \mathrm{H}$ et $\mathrm{N} \rtimes_\psi \mathrm{H}$ soient isomorphes.

1. S'il existe un automorphisme α de H tel que $\psi = \varphi \circ \alpha$ montrer que $\mathrm{N} \rtimes_\varphi \mathrm{H}$ et $\mathrm{N} \rtimes_\psi \mathrm{H}$ sont isomorphes.
2. S'il existe un automorphisme u de N tel que

$$\forall\, h \in \mathrm{H} \qquad \phi(h) = u\psi(h)u^{-1}$$

   montrer que $\mathrm{N} \rtimes_\varphi \mathrm{H}$ et $\mathrm{N} \rtimes_\psi \mathrm{H}$ sont isomorphes.
3. Si H est cyclique et si $\varphi(\mathrm{H}) = \psi(\mathrm{H})$ montrer que $\mathrm{N} \rtimes_\varphi \mathrm{H}$ et $\mathrm{N} \rtimes_\psi \mathrm{H}$ sont isomorphes.

Exercice 8 Montrer que tout groupe d'ordre 255 est cyclique.

Exercice 9 Soit p un nombre premier impair.

1. Déterminer les p-Sylow de $\mathrm{GL}\left(2, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)$.
2. Soient ϕ et ψ des morphismes non triviaux de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans $\mathrm{GL}\left(2, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)$. Pour tout entier k notons ϕ_k le morphisme ϕ_k défini par $\phi_k(x) = \phi(kx)$. Montrer qu'il existe un entier k et une matrice $P \in \mathrm{GL}\left(2, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)$ tels que $\psi = P\phi_k P^{-1}$.
3. Montrer qu'il existe un produit semi-direct non trivial $\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^2 \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
4. Montrer que le centre de ce dernier groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. (On rappelle que si G est un groupe tel que $\mathrm{G}/Z(\mathrm{G})$ est monogène, alors G est abélien.)
5. Supposons que G est un groupe fini. Notons p le plus petit nombre premier divisant le cardinal de G. Montrer que tout sous-groupe de G d'indice p est distingué (indication : commencer par montrer que tout sous-groupe H de G d'indice p agit trivialement sur G/H, en déduire que H est distingué dans G).
6. Soit G un groupe d'ordre p^3 non cyclique contenant un élément g d'ordre p^2. Montrer que $\langle g \rangle$ est distingué dans G et que G est un produit semi-direct de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ par $\langle g \rangle \simeq \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.