Université Côte d'Azur
Année 2020-2021

Fiche thématique :
Représentations de groupes

Table des matières

1. Rappels

Aux confins de la théorie des groupes et de la géométrie (linéaire) trône la théorie des représentations. Une représentation n'est rien d'autre qu'une action linéaire d'un groupe sur un espace V. Il s'agit donc de plonger un groupe (ou un quotient du groupe) dans un groupe de matrices. Ici, nous allons nous intéresser aux représentations d'un groupe fini sur le corps des complexes (pour plusieurs raisons : le corps est algébriquement clos, de caractéristique nulle, et on a une notion de positivité via les formes hermitiennes).

Le but de la théorie est de comprendre toutes les représentations possibles d'un groupe fini fixé G, à isomorphisme près, c'est-à-dire à changement de base près. La première idée est d'utiliser la finitude du groupe, elle se résume en un autre mot : moyenner. Prendre la moyenne sur le groupe va permettre de montrer une propriété de semi-simplicité : tout sous-espace G-stable possède un supplémentaire G-stable, c'est le théorème de Maschke. Une représentation est alors somme directe de sous-représentations "minimales" dites irréductibles. Elles se caractérisent par le lemme de Schur qui assure qu'un morphisme entre deux sous-représentations irréductibles qui commute à l'action de G est soit nul, soit un isomorphisme. La classification à isomorphisme près des G-représentations (à isomorphisme près !) devient abordable : il suffit de classer celles qui sont irréductibles. C'est ici qu'intervient la théorie des caractères, introduite par Frobenius et Schur. Le caractère d'une représentation est une fonction de G dans $\mathbb{C}$, associée à la représentation, qui se définit par la trace de la matrice associée à g dans G, il ne dépend que de sa classe d'isomorphisme. Il s'agit d'un objet simple et concret, un outil de calcul qui va caractériser la représentation à isomorphisme près. On dote l'espace des fonctions de G vers $\mathbb{C}$ d'une forme hermitienne G-invariante sur l'espace des fonctions, et là, miracle, le lemme de Schur implique que les caractères des sous-représentations irréductibles forment une famille orthonormée ; il s'agit même d'une base orthonormée de l'espace des fonctions constantes sur les classes de conjugaison de G. On illustre la théorie avec des exemples de "groupes de petits cardinaux" où l'on sait calculer tous les caractères irréductibles donc, tous les caractères. On prend l'habitude de résumer les résultats obtenus dans une table de caractères, c'est-à-dire un tableau à double entrée dont les colonnes sont associées aux classes de conjugaison du groupe, et dont les lignes sont associées aux caractères irréductibles. Cette table donne de précieux renseignements sur le groupe qu'il faut pouvoir décoder, même si l'on sait qu'elle ne permet pas de retrouver le groupe à isomorphisme près. Pour finir, si on doit associer la théorie des représentations à une idée fondamentale des mathématiques, ce serait encore une fois l'idée de dualité. En effet, si un espace E de dimension finie sur $\Bbbk$ peut se voir à travers ses morphismes de E vers $\Bbbk$, on peut tenter de comprendre un groupe G à travers ses morphismes de G dans $\mathbb{C}^*$. Pour ce qui est des groupes abéliens finis, on obtient une dualité parfaite, mais pour les groupes finis en général, la théorie s'effondre : par exemple, pour l'énorme groupe $\mathcal{S}_n$, on ne récupère que le morphisme trivial et la signature. Il faut alors remplacer $\mathbb{C}^* = \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$ par $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ pour retrouver les propriétés (mais pas toutes !) du groupe G.

1.1. **Mises en garde.**

- ◇ Il y a souvent confusion entre caractère et représentation. Il ne faut jamais oublier que le but est de comprendre comment représenter un groupe à l'aide de matrices. La représentation est le but, et le caractère est l'outil.
- ◇ Il y a aussi une confusion qui provient du vocabulaire même. On appelle représentation un morphisme de G dans $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ mais aussi l'espace V sur lequel le groupe G agit linéairement. En fait, on préfère appeler V un "G-module", ce qui signifie en gros qu'il possède une structure linéaire et une action linéaire de G, le défaut de cette notation est de ne pas préciser sur quel corps on le considère, on pourrait dire "G-module sur le corps $\Bbbk$" si la précision est utile.
- ◇ Le mieux pour éviter toute confusion est de savoir interpréter toutes les définitions de base de façon matricielle. Il faut savoir comment interpréter une sous-représentation (matrice triangulaire par blocs), une somme directe de représentations (matrice diagonale par blocs), un morphisme de représentation (commutation de matrices). Voir par exemple [CG15, p. 255].
- ◇ Attention, on met sur un G-module V deux formes hermitiennes : une classique notée (,), indépendante de G, et l'autre G-invariante donnée par
$$(v, w)_{\mathrm{G}} = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{g\in \mathrm{G}} (g\cdot v, g\cdot w).$$
Il ne faut pas les confondre. C'est la seconde qui fournit un supplémentaire G-stable à toute sous-représentation.
- ◇ Ne passons pas à côté des choses simples ! Il serait ridicule de faire défiler la théorie sans comprendre ce qu'est la théorie des représentations pour le groupe trivial et pour $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Pour le groupe trivial, un G-module est tout simplement un espace vectoriel. Pour $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$, les représentations correspondent aux matrices telles que $A^2 = \mathrm{id}$ (ici $A = \rho(\overline{1})$), c'est-à-dire les matrices de symétries. Un endomorphisme de représentation correspond à une matrice qui commute avec A. Deux représentations ρ et ρ_0 sont isomorphes

(toujours pour le groupe $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$) si les deux matrices A et A_0 correspondantes sont conjuguées. Une matrice symétrique (en caractéristique différente de 2) est diagonalisable, ce qui correspond au théorème de Maschke, et les valeurs propres sont 1 et -1, ce qui correspond au fait que l'on a deux sous-représentations irréductibles : $\overline{1} \mapsto 1$ et $\overline{1} \mapsto -1$. Les sous-espaces propres $\ker(A - \mathrm{id})$ et $\ker(A + \mathrm{id})$ sont les composantes isotypiques de la représentation pour les deux irréductibles de $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$. Que se passe-t-il pour $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$? Voir exemple [CG15].

- ◇ De la même manière, trouver une représentation en degré d du groupe diédral D_{2n} signifie trouver, dans $\mathrm{M}_d(\mathbb{C})$ deux matrices C et S telles que $C^n = \mathrm{id}$, $S^2 = \mathrm{id}$ et $SCS^{-1} = C^{-1}$. Cela vient du fait que D_{2n} est engendré par deux éléments vérifiant les relations correspondantes, voir [CG15, Remarque XIII-B.2.2].
- ◇ Quand on applique le théorème de Maschke (ou théorème de semi-simplicité) on obtient $V = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{m} V_i$ où les V_i sont des sous-représentations irréductibles. On regroupe ensuite la somme directe en représentations isomorphes : $V \simeq \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{k} m_i V_i$, attention, c'est un isomorphisme et non pas une égalité (même si par abus de notation on arrive parfois à noter des égalités). Les $m_i V_i$ sont les composantes isotypiques. La composante isotypique associée à une représentation irréductible est unique, elle est entièrement déterminée par V. La première composante isotypique à connaître est le sous-espace V^{G} des éléments invariants par tout G ; c'est la composante isotypique de la représentation triviale. Comme elle est de degré 1, la multiplicité est donc $m = \dim V^{\mathrm{G}}$. Pour revenir à l'exemple de $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$, m est la dimension du sous-espace propre de A pour la valeur propre 1.
- ◇ Quand G est un groupe fini, le théorème de Lagrange assure qu'une représentation vérifie $\rho(g)^n = \mathrm{id}$ pour $n = |\mathrm{G}|$. C'est ceci qui implique que $\rho(g)$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, mais si G est infini, la diagonalisabilité n'est pas acquise ! Penser à la représentation de $(\mathbb{Z}, +)$ telle que $n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- ◇ Attention, quand on dit que le caractère caractérise, il ne caractérise la représentation qu'à isomorphisme près. On ne peut pas récupérer une représentation à partir de son caractère.

1.2. **Les fondamentaux.** Il est fondamental de savoir construire des représentations d'un groupe G donné. Les outils de base sont les suivants :

- ◇ On peut construire à partir d'un groupe un certain nombre de représentations : les représentations classiques (la triviale, la régulière [CG15, XIII-1.1.10]), les représentations par permutations à partir d'actions de groupe sur des ensembles finis. En effet, toute action du groupe G sur un ensemble fini X fournit une représentation par matrices de permutations, [CG15, XIII-3.11]. Le caractère de cette représentation est l'application qui envoie g sur le nombre d'invariants de g sur X. La représentation régulière a l'avantage d'être fidèle (injective) ; cela provient des permutations de l'action du groupe G à gauche sur lui-même.

- ◇ La construction de représentations, voir [CG15, XIII-1.3] : on utilise la somme directe, la dualité, les homomorphismes de représentations pour construire à partir de quelques représentations classiques beaucoup d'autres représentations.
- ◇ Si G est un groupe abélien, alors les matrices de représentations commutent et sont diagonalisables : elles sont codiagonalisables et donc, les sous-représentations irréductibles sont de dimension 1. On a ainsi n sous-représentations irréductibles et elles forment même un groupe pour la multiplication des fonctions, noté $\widehat{\mathrm{G}}$. C'est le début d'une belle dualité ! Par exemple, le groupe G va s'identifier au bidual, voir [CG15, Annexe XIII-A, 1.2.3] et la théorie de Fourier peut s'appliquer.
- ◇ Le théorème de Maschke : toute sous-représentation possède un supplémentaire stable. La version avec l'orthogonal pour la forme G-invariante est valable uniquement sur $\mathbb{C}$. La version avec les noyaux d'un projecteur G-invariant a l'avantage d'être valable sur tout corps de caractéristique ne divisant pas $|\mathrm{G}|$, voir [CG15, XIII-1.7].
- ◇ La théorie des caractères : le caractère associé à une représentation ρ est la fonction qui envoie g dans G sur la trace $\mathrm{tr}(\rho(g))$. Le lemme de Schur, [CG15, XIII-2.1], en est le point de départ. Il dit qu'un morphisme de sous-représentations irréductibles est soit un isomorphisme soit nul, et (sur $\mathbb{C}$) s'il est un isomorphisme, c'est une homothétie. C'est ce résultat fondamental qui implique que les caractères des sous-représentations irréductibles forment un système orthonormé pour la norme hermitienne G-invariante des fonctions de G vers $\mathbb{C}$, [CG15, XIII-2.5.6]. Mieux ! Si on se restreint aux fonctions constantes sur les classes de conjugaison de G, on montre avec un peu plus d'effort que l'ensemble des caractères irréductibles en forme une base, [CG15, XIII-2.6.1]. Comme corollaire, [CG15, XIII-2.7], le nombre de sous-représentations irréductibles (à isomorphisme près) est égal au nombre de classes de conjugaison : la table de caractères est une matrice carrée !
- ◇ La déconstruction de représentations : la base unitaire des caractères permet alors de comprendre comment une représentation complexe se décompose en représentations irréductibles, à isomorphisme près. En effet, $V \simeq \sum_i m_i V_i$ implique au niveau des caractères $\chi_V = \sum_i m_i \chi_{V_i}$ et $m_i = \langle \chi_V, \chi_{V_i} \rangle$ car la base des χ_{V_i} est unitaire. Comme corollaire, on obtient que si deux représentations possèdent un même caractère, elles sont isomorphes : le caractère caractérise, [CG15, XIII-2.5.7].
- ◇ Savoir construire une table de caractères, utiliser pour cela la somme des carrés des degrés, l'orthogonalité des lignes, la pseudo-orthogonalité des colonnes, voir les annexes de [CG15, XIII]. La connaissance botanique des petits groupes : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (où la table de caractères est une matrice de Vandermonde), D_n, $\mathcal{S}_n$, et $\mathcal{A}_n$, pour $n = 3$, 4, voire 5. Certaines représentations proviennent d'actions de groupe sur l'espace affine (avec des dessins, même s'ils sont moches, c'est pas grave) sur le triangle, le carré, le n-gone, le tétraèdre, voire l'icosaèdre.

1.3. Quelques questions classiques.

- ◇ Un groupe abélien fini a toutes ses sous-représentations irréductibles de degré 1. Et réciproquement ? Oui, voir par exemple [CG15, Exercice XIII-E1].
- ◇ Deux groupes ayant la même table de caractères sont isomorphes. Vrai ou faux ? Faux, on a des contre-exemples. Le premier exemple est que la table de caractères de $\mathbb{H}_8$ et de D_4 sont les mêmes alors qu'ils sont non isomorphes, voir [CG15, Exercice XIII-21].
- ◇ Peut-on trouver la table de caractères d'un sous-groupe H à partir de la table des caractères d'un groupe G donné ? En théorie oui : toutes les représentations de G sont dans la représentation régulière de G et comme $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$, la représentation régulière de H est une sous-représentation de la représentation régulière de G, vue comme restriction d'une représentation de G. On a donc toutes les représentations de H dans les représentations de G. Du coup, en pratique, on prend une à une les représentations de G et on regarde leur décomposition en caractères de H, quand l'indice de H est petit, on s'en sort, voir [CG15, Annexe XIII-D].
- ◇ Le lemme de Schur assure que l'ensemble des endomorphismes d'une représentation irréductible est un corps. Est-il nécessairement commutatif ? Oui pour $\mathbb{C}$, puisqu'on obtient les homothéties, et donc le corps $\mathbb{C}$ lui-même. Mais non pour $\mathbb{R}$, voir par exemple [CG15, Exercice XIII-E.13], où l'on trouve le corps des quaternions.
- ◇ Il est indispensable de savoir répondre à la question "Que peut-on lire dans la table de caractères d'un groupe fini G ?" Citons en vrac : le treillis des sous-groupes distingués [CG15, Exercice XIII-E.25], donc en particulier, la simplicité de G (à savoir illustrer sur le groupe simple $\mathcal{A}_5$), le groupe dérivé, [CG15, Exercice XIII-E.26], le centre de G, [CG15, Exercice XIII-E.28], la cyclicité du centre, [CG15, Exercice XIII-E.29], le nombre de racines carrées d'un élément g de G, [CG15, Exercice XIV-A.9].

1.4. **Théorie des représentations sous forme matricielle.** Comprendre la théorie sous forme matricielle permet de percevoir les vrais problèmes de façon tangible. Ici, le groupe G est supposé fini, et l'espace vectoriel V sur lequel G agit linéairement est de dimension finie notée n sur le corps de complexes.

- ◇ Qu'est-ce qu'une représentation d'un groupe fini G ?

  Il s'agit finalement de trouver une famille de matrices $A(g) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ pour tout g dans G*, telles que si $g = hk$, alors $A(g) = A(h)A(k)$.*
- ◇ Qu'est-ce qu'un morphisme de représentations ? Qu'est-ce qu'un automorphisme de représentations ?

  Si V, resp. W, est une représentation de G *de degré n, resp. m, dont le système de matrices associées est $A(g)$, resp. $B(g)$, $g \in \mathrm{G}$, alors un morphisme de représentations entre V et W est une matrice $M \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ telle que pour tout g dans* G*, $MA(g) = B(g)M$. Un automorphisme de la représentation V est une matrice P de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $PA(g)P^{-1} = A(g)$ pour tout g de* G.
- ◇ Qu'est-ce qu'une forme hermitienne G-invariante sur le $\mathbb{C}$-espace V ?

  Il s'agit d'une matrice H dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, à symétrie hermitienne, c'est-à-dire $H^* = H$, telle que $A(g)^*HA(g) = H$ pour tout g de G.
- ◇ Comment voit-on matriciellement une sous-représentation ? Et formuler matriciellement le théorème de Maschke.

  On voit que l'on a une sous-représentation s'il existe une matrice de passage $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $g \in \mathrm{G}$, $PA(g)P^{-1}$ a une structure *triangulaire par blocs :*

$$\begin{pmatrix} B(g) & X(g) \\ 0 & C(g) \end{pmatrix}.$$

Le théorème de Maschke dit qu'il existe une matrice Q de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $QA(g)Q^{-1}$ est diagonale par blocs pour tout g (avec les mêmes tailles de blocs que ci-dessus).

◇ Que signifie matriciellement la décomposition de V en irréductibles ?

Cela signifie qu'il existe P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $PA(g)P^{-1}$ est diagonalisable par blocs pour tout g, avec des blocs les plus petits possibles.

◇ Que dit le théorème de Frobenius-Schur ?

Si V est irréductible et si $\frac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{g\in\mathrm{G}}\chi_V(g^2)=1$, alors il existe P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $PA(g)P^{-1}$ est une matrice réelle pour tout g.

2. Exercices

Exercice 1

Montrer que tout groupe fini G admet une représentation fidèle sur tout corps $\Bbbk$.

Éléments de réponse 1

Première réponse possible : la représentation régulière de G sur $\Bbbk$ répond à la question.

Deuxième réponse possible : le théorème de Cauchy assure que G se plonge dans le groupe des permutations de G et ce dernier groupe se plonge dans un groupe linéaire via les matrices de permutations.

Exercice 2

Soit G un groupe fini. Soit H un sous-groupe distingué de G. Notons $\pi\colon \mathrm{G}\to \mathrm{G}/\mathrm{H}$ la projection canonique. Soit ρ une représentation complexe de G/H.

a) Montrer que $\rho\circ\pi$ est une représentation de G.

b) Montrer que ρ est irréductible si et seulement si $\rho\circ\pi$ est irréductible.

Éléments de réponse 2

Soit G un groupe fini. Soit H un sous-groupe distingué de G. Notons $\pi\colon \mathrm{G}\to \mathrm{G}/\mathrm{H}$ la projection canonique. Soit ρ une représentation complexe de G/H.

a) Montrons que $\rho\circ\pi$ est une représentation de G.

La composée de deux morphismes de groupes étant un morphisme de groupes, $\rho\circ\pi$ est une représentation de G.

b) Montrons que ρ est irréductible si et seulement si $\rho\circ\pi$ est irréductible.

- Commençons par montrer que si $\rho\circ\pi$ est irréductible alors ρ l'est. Plus généralement si $f\colon \mathrm{G}\to\mathrm{G}'$ est un morphisme de groupes et si ρ est une représentation de G', on a l'implication suivante

si $\rho\circ f$ est irréductible (comme représentation) de G, alors ρ est irréductible.

En effet tout sous-espace stable par G' est stable par G puisque l'action de G se factorise par G'.

- Montrons que si ρ est irréductible, alors $\rho \circ \pi$ est irréductible.
  Soit W un sous-espace strict stable par G. Pour tout $\overline{x} \in {}^{\mathrm{G}}\!/\!_{\mathrm{H}}$ il existe $g \in \mathrm{G}$ tel que $\pi(g) = \overline{x}$ (ρ est surjective, si elle ne l'était pas l'implication serait fausse). Comme W est stable par g, il est stable par $\overline{x}$. Ainsi W est stable par tout élément de ${}^{\mathrm{G}}\!/\!_{\mathrm{H}}$. La représentation ρ étant irréductible $W = 0$ et $\rho \circ \pi$ est irréductible.

Exercice 3

Soient V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, G un groupe et (V, ρ) une représentation de G. On suppose qu'il existe $v \in V$ tel que $\left\{\rho(g)v \,|\, g \in \mathrm{G}\right\}$ forme une base de V.

Montrer que (V, ρ) est isomorphe à la représentation régulière de G.

Éléments de réponse 3

Soient V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, G un groupe et (V, ρ) une représentation de G. On suppose qu'il existe $v \in V$ tel que $\left\{\rho(g)v \,|\, g \in \mathrm{G}\right\}$ forme une base de V.

Montrons que (V, ρ) est isomorphe à la représentation régulière de G.

Soit W un espace vectoriel de base $\{e_j\}_{g\in\mathrm{G}}$; prendre par exemple $W = \mathbb{C}^G$ et e_g = indicatrice de g. Rappelons que la représentation régulière ρ_R de G opère sur W par

$$\rho_R(h)(e_g) = e_{hg}$$

Considérons l'application linéaire ϕ définie sur la base (e_g) oar

$$\phi\colon W \to V, \qquad\qquad e_g \mapsto \rho(g)v$$

Puisque par hypothèse $(\rho(g)(v))_{g\in\mathrm{G}}$ est une base de V ϕ est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. Par définition ϕ est G-équivariante, *i.e.* $\phi \circ \rho_R(g) = \rho(g) \circ \phi$. En effet d'une part

$$(\phi \circ \rho_R(g))(e_h) = \phi(e_{gh}) = \rho(gh)(v)$$

et d'autre part

$$(\rho(g) \circ \phi)(e_h) = \rho(g)(\phi(e_h)) = \rho(g)(\rho(h)(v)) = \rho(gh)(v)$$

Ainsi ϕ est un isomorphisme entre ρ et ρ_R.

Exercice 4

Soit $\mathrm{G} = \mathcal{S}_3$ et soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel possédant une base indexée par les éléments de G. Considérons l'application $T\colon \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(V)$ définie par

$$T(g)(e_\tau) = e_{g\tau g^{-1}}.$$

a) Montrer que T est une représentation de G.

b) Soit j une racine cubique primitive de 1. Soit W le sous-espace de V dont une base est

$$\alpha = e_{(1\,2)} + je_{(1\,3)} + j^2 e_{(2\,3)} \qquad\qquad \beta = e_{(1\,2)} + j^2 e_{(1\,3)} + je_{(2\,3)}$$

Montrer que W est une sous-G-représentation de V. W est-il irréductible ?

c) Déterminer la décomposition de V en somme directe de sous-espaces irréductibles et expliciter l'action de G sur chacun de ses sous-espaces.

Éléments de réponse 4

Soit $\mathrm{G} = \mathcal{S}_3$ et soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel possédant une base indexée par les éléments de G. Considérons l'application $T\colon \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(V)$ définie par

$$T(g)(e_\tau) = e_{g\tau g^{-1}}.$$

a) Montrons que T est une représentation de G.

T est un morphisme de G dans $\mathrm{GL}(V)$: soient g et g' dans G on a d'une part

$$T(g \circ g')(e_\tau) = e_{(g\circ g')\tau(g\circ g')^{-1}} = e_{gg'\tau g'^{-1}g^{-1}}$$

et d'autre part

$$T(g) \circ T(g')(e_\tau) = T(g)(e_{g'\tau g'^{-1}}) = e_{gg'\tau g'^{-1}g^{-1}}$$

d'où $T(g \circ g') = T(g) \circ T(g')$.

b) Soit j une racine cubique primitive de 1. Soit W le sous-espace de V dont une base est

$$\alpha = e_{(1\,2)} + je_{(1\,3)} + j^2e_{(2\,3)} \qquad\qquad \beta = e_{(1\,2)} + j^2e_{(1\,3)} + je_{(2\,3)}$$

Montrons que W est une sous-G-représentation de V.

Le groupe $\mathcal{S}_3$ est engendré par (1 2) et (1 2 3). Il suffit donc de montrer que l'espace engendré par α et β est stable par $T((1\ 2))$ et $T((1\ 2\ 3))$. Un calcul montre que

$$T((1\ 2))(\alpha) = \beta, \quad T((1\ 2\ 3))(\alpha) = j\alpha, \quad T((1\ 2))(\beta) = \alpha, \quad T((1\ 2\ 3))(\beta) = j^2\beta$$

W est-il irréductible ?

Un calcul montre qu'aucun sous-module de W de dimension 1 n'est stable par $\mathcal{S}_3$ donc W est irréductible.

c) Déterminons la décomposition de V en somme directe de sous-espaces irréductibles et expliciter l'action de G sur chacun de ses sous-espaces.

Remarquons que si C est une classe de conjugaison dans $\mathcal{S}_3$, alors $\sum\limits_{g\in \mathrm{G}} e_g$ est stable par T (c'est par définition même de T). On trouve ainsi trois sous-espaces stables sous $\mathcal{S}_3$ qui sont les droites

$$W_1 = \mathbb{C}\mathrm{id}, \qquad W_2 = \mathbb{C}(e_{(1\ 2)} + e_{(1\ 3)} + e_{(2\ 2)}), \qquad W_3 = \mathbb{C}(e_{(1\ 2\ 3)} + e_{(1\ 3\ 2)})$$

Enfin si on note ε la signature on obtient

$$T(g)(e_{(1\ 2\ 3)} - e_{(1\ 3\ 2)}) = \varepsilon(g)(e_{(1\ 2\ 3)} - e_{(1\ 3\ 2)})$$

En effet d'une part

$$\begin{aligned} T((1\ 2))(e_{(1\ 2\ 3)} - e_{(1\ 3\ 2)}) &= e_{(1\ 2)(1\ 2\ 3)(1\ 2)} - e_{(1\ 2)(1\ 3\ 2)(1\ 2)} \\ &= e_{(1\ 3\ 2)} - e_{(1\ 2\ 3)} \\ &= -(e_{(1\ 2\ 3)} - e_{(1\ 3\ 2)}) \end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned} T((1\ 2\ 3))(e_{(1\ 2\ 3)} - e_{(1\ 3\ 2)}) &= e_{(1\ 2\ 3)(1\ 2\ 3)(1\ 2\ 3)^{-1}} - e_{(1\ 2\ 3)(1\ 3\ 2)(1\ 2\ 3)} \\ &= e_{(1\ 2\ 3)(1\ 2\ 3)(1\ 3\ 2)} - e_{(1\ 2\ 3)(1\ 3\ 2)(1\ 3\ 2)} \\ &= -(e_{(1\ 2\ 3)} - e_{(1\ 3\ 2)}) \end{aligned}$$

L'espace $W_4 = \mathbb{C}(e_{(1\ 2\ 3)} - e_{(1\ 3\ 2)})$ est donc stable par $\mathcal{S}_3$.

On a finalement $V = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4 \oplus W$ où W désigne l'unique représentation irréductible de dimension 2.

Exercice 5

Soit p un nombre premier. Soit $\Bbbk$ un corps algébriquement clos de caractéristique différente de p. Soit G un p-groupe.

Montrer que G possède une représentation non triviale de dimension 1 sur $\Bbbk$.

Éléments de réponse 5

Soit p un nombre premier. Soit $\Bbbk$ un corps algébriquement clos de caractéristique différente de p. Soit G un p-groupe.

Montrons que G possède une représentation non triviale de dimension 1 sur $\Bbbk$.

Le groupe G admet un sous-groupe distingué H d'indice p. Par conséquent ${}^{\mathrm{G}}\!/_{\mathrm{H}} \simeq {}^{\mathbb{Z}}\!/_{p\mathbb{Z}}$. Le corps $\Bbbk$ est algébriquement clos de caractéristique $\neq p$. Par suite le polynôme $X^p - 1$ est scindé à racines simples. Ainsi les racines p-ième de l'unité dans $\Bbbk^*$ forment un sous-groupe cyclique d'ordre p isomorphe à ${}^{\mathbb{Z}}\!/_{p\mathbb{Z}}$ d'où une injection de ${}^{\mathbb{Z}}\!/_{p\mathbb{Z}}$ dans $\Bbbk^*$. Le morphisme

$$\mathrm{G} \longrightarrow {}^{\mathrm{G}}\!/_{\mathrm{H}} \simeq {}^{\mathbb{Z}}\!/_{p\mathbb{Z}} \longrightarrow \Bbbk^*$$

est donc un caractère non trivial de G, *i.e.* une représentation non triviale de dimension 1 de G sur $\Bbbk$.

Exercice 6

Soit G un groupe fini et soit χ un caractère de G vérifiant

$$\forall\, g \in \mathrm{G} \qquad g \neq 1 \Rightarrow \chi(g) = 0.$$

Montrer que χ est un multiple entier du caractère de la représentation régulière de G.

Éléments de réponse 6

Soit G un groupe fini et soit χ un caractère de G vérifiant

$$\forall\, g \in \mathrm{G} \qquad g \neq 1 \Rightarrow \chi(g) = 0.$$

Montrons que χ est un multiple entier du caractère de la représentation régulière de G.

Il suffit de montrer que $|\mathrm{G}|$ divise $\chi(1)$. Notons χ_{triv} le caractère de la représentation triviale de G. On a

$$\langle \chi, \chi_{\mathrm{triv}} \rangle = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{g \in \mathrm{G}} \chi(g)\overline{\chi_{\mathrm{triv}}(g)}$$

Comme $\chi(g) = 0$ pour tout $g \neq 1$ on a $\displaystyle\sum_{g \in \mathrm{G}} \chi(g)\overline{\chi_{\mathrm{triv}}(g)} = \chi(1)\overline{\chi_{\mathrm{triv}}(1)} = \chi(1)$ autrement dit

$$\langle \chi, \chi_{\mathrm{triv}} \rangle = \frac{1}{|\mathrm{G}|}\chi(1)$$

donc $|\mathrm{G}|$ divise $\chi(1)$.

Exercice 7

Soit $\mathbb{H}_8 := \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ le groupe des quaternions. Ecrire la table de caractères de $\mathbb{H}_8$ et décrire les représentations irréductibles.

Indication : On rappelle que $\mathbb{H}_8$ s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{SU}(2,\mathbb{C})$ en posant : $I = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ et $K = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$.

Éléments de réponse 7

On peut vérifier que $\mathbb{H}_8$ admet cinq classes de conjugaison qui sont

$$\{1\}, \quad \{-1\}, \quad \{\pm i\}, \quad \{\pm j\}, \quad \{\pm k\}$$

Le groupe dérivé $D(\mathrm{G})$ de G est donné par : $D(\mathrm{G}) = \{\pm 1\}$. Par conséquent

$$\mathrm{G}/D(\mathrm{G}) = \langle \bar{i}, \bar{j} \,|\, \bar{i}^2 = \bar{j}^2 = 1, \overline{ij} = \overline{ji} \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Ainsi G admet quatre représentations de dimension 1 correspondant aux quatre morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$. Il s'en suit que la cinquième représentation irréductible de $\mathbb{H}_8$ est de dimension 2. Son caractère se déduit des caractères précédents par orthogonalité.

La table des caractères de $\mathbb{H}_8$ est

$\mathbb{H}_8$	1	1	2	2	2
	$\{1\}$	$\{-1\}$	$\{\pm i\}$	$\{\pm j\}$	$\{\pm k\}$
χ_{triv}	1	1	1	1	1
χ_1	1	1	-1	1	-1
χ_2	1	1	1	-1	-1
$\chi_3 = \chi_1\chi_2$	1	1	-1	-1	1
χ_ρ	2	-2	0	0	0

Notons que les tables de $\mathbb{H}_8$ et D_8 sont les mêmes. La table de caractères ne détermine donc pas la classe d'isomorphisme d'un groupe fini.

Exercice 8

Décrire les représentations irréductibles du groupe symétrique $\mathcal{S}_3$ et écrire sa table de caractères.

Éléments de réponse 8

Les classes de conjugaison de $\mathcal{S}_3$ sont

$$C_1 = \{\mathrm{id}\}, \qquad C_2 = \{(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\}, \qquad C_3 = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}.$$

Ainsi $\mathcal{S}_3$ a trois représentations irréductibles à équivalence près. Il y a la représentation triviale ρ_{triv} qui est irréductible. On a aussi la représentation signature

$$\mathrm{sgn}\colon \mathcal{S}_3 \to \mathrm{GL}(1,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^*, \qquad \sigma \mapsto \mathrm{sgn}(\sigma)$$

qui est de degré 1 ; elle est irréductible car

$$\langle \chi_{\mathrm{sgn}}, \chi_{\mathrm{sgn}} \rangle = \frac{1}{6}\Big(\underbrace{1}_{\#C_1} \times \underbrace{1}_{\chi_{\mathrm{sgn}}((\mathrm{id}))} \times \bar{1} + \underbrace{3}_{\#C_2} \times \underbrace{(-1)}_{\chi_{\mathrm{sgn}}((1\ 2))} \times \overline{(-1)} + \underbrace{2}_{\#C_3} \times \underbrace{1}_{\chi_{\mathrm{sgn}}((1\ 2\ 3))} \times \bar{1} \Big) = 1$$

Enfin on a la représentation suivante dite représentation standard et notée ρ_S. Soient $A = (1,0)$, $B = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $C = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Les points A, B et C sont les sommets d'un triangle équilatéral de centre de gravité $O = (0,0)$. Les isométries du plan laissant stable ce triangle fixent O et donc sont linéaires. Elles forment donc un sous-groupe de $\mathrm{O}(2,\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ qui n'est autre que D_6. L'injection de D_6 dans $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ fait de $\mathbb{C}^2$ une représentation du groupe D_6 et nous allons montrer que ce groupe est isomorphe à $\mathcal{S}_3$ pour construire notre représentation de $\mathcal{S}_3$. Un élément de D_6 laisse fixe l'ensemble $\{A,\, B,\, C\}$ et fournit un morphisme de groupes φ de D_6 dans le groupe des permutations $\mathcal{S}_{\{A,\,B,\,C\}}$ de $\{A,\, B,\, C\}$. Puisque A, B et C ne sont pas alignés, un élément de D_6 est uniquement déterminé par les images de A, B et C ce qui signifie que φ est injectif. Par ailleurs φ est surjectif car D_6 contient

- ⋄ les symétries par rapport aux droites (OA), (OB) et (OC) qui s'envoient respectivement sur les transpositions $(B\ C)$, $(A\ C)$ et $(A\ B)$;
- ⋄ les rotations d'angle 0, $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$ dont les images respectives sont l'identité et les 3-cycles $(A\ B\ C)$ et $(A\ C\ B)$.

Ainsi $\varphi\colon \mathrm{D}_6 \to \mathcal{S}_{\{A,\,B,\,C\}}$ est un isomorphisme de groupes. La bijection

$$1 \mapsto A \qquad\qquad 2 \mapsto B \qquad\qquad 3 \mapsto C$$

de $\{1,\, 2,\, 3\}$ sur $\{A,\, B,\, C\}$ fournit un isomorphisme $\psi\colon \mathcal{S}_3 \xrightarrow{\simeq} \mathcal{S}_{\{A,\,B,\,C\}}$. Nous obtenons un morphisme de groupes de $\mathcal{S}_3$ dans $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ en composant $\varphi^{-1}\circ\psi\colon \mathcal{S}_3 \to \mathrm{D}_6$ avec l'injection de D_6 dans $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$. Ce morphisme fait de $\mathbb{C}^2$ une représentation de $\mathcal{S}_3$.

Cette représentation de $\mathcal{S}_3$ sur $\mathbb{C}^2$ est irréductible. Raisonnons par l'absurde : supposons qu'elle ne soit pas irréductible. Puisqu'elle est de dimension 2 une sous-représentation distincte de 0 ou $\mathbb{C}^2$ est une droite de $\mathbb{C}^2$. Une telle droite est en particulier stable par les symétries orthogonales s_{OA} et s_{OB} par rapport aux droites (OA) et (OB) ce qui est impossible ; en effet les droites stables par s_{OA} sont les axes de coordonnées qui ne sont pas stables par s_{OB}.

Notons que

$$(\deg \rho_{\mathrm{triv}})^2 + (\deg \mathrm{sgn})^2 + (\deg \rho_S)^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$$

autrement dit $(\deg \rho_{\mathrm{triv}})^2 + (\deg \mathrm{sgn})^2 + (\deg \rho_S)^2 = |\mathcal{S}_3|$.

Ainsi la table de caractères de $\mathcal{S}_3$ est

	C_1	C_2	C_3
$\chi_{\rho_{\mathrm{triv}}}$	1	1	1
sgn	1	-1	1
χ_{ρ_S}	2	0	-1

A noter que les colonnes sont bien orthogonales.

Exercice 9 [Table de caractères du groupe symétrique $\mathcal{S}_4$]

a) Décrire les représentations irréductibles de $\mathcal{S}_4$ et dresser sa table des caractères.

b) Déterminer les sous-groupes distingués de $\mathcal{S}_4$ à partir de sa table des caractères.

c) On rappelle que $\mathcal{S}_4$ s'identifie au groupe des isométries directes d'un cube (ou d'un octaèdre) et également au groupe des isométries (directes et indirectes) d'un tétraèdre. Que pensez-vous des représentations de dimension 3 associées ?

Éléments de réponse 9

Le groupe symétrique $\mathcal{S}_4$ possède cinq classes de conjugaison :

$$C_1 = \{\mathrm{id}\},$$
$$C_2 = \{(1\ 2),\ (1\ 3),\ (1\ 4),\ (2\ 3),\ (2\ 4),\ (3\ 4)\},$$
$$C_3 = \{(1\ 2)(3\ 4),\ (1\ 3)(2\ 4),\ (1\ 4)(2\ 3)\},$$
$$C_4 = \{(1\ 2\ 3),\ (1\ 3\ 2),\ (1\ 2\ 4),\ (1\ 4\ 2),\ (1\ 3\ 4),\ (1\ 4\ 3),\ (2\ 3\ 4),\ (2\ 4\ 3)\},$$
$$C_5 = \{(1\ 2\ 3\ 4),\ (1\ 2\ 4\ 3),\ (1\ 3\ 2\ 4),\ (1\ 3\ 4\ 2),\ (1\ 4\ 2\ 3),\ (1\ 4\ 3\ 2)\}.$$

Il y a donc cinq représetntations irréductibles à équivalence près. On peut déjà donner deux représentations de degré 1

- ◇ la représentation triviale ρ_{triv} ;
- ◇ la représentation signature sgn.

Intéressons-nous à la représentation par permutations. Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{C}^4$. On définit la représentation par permutations par

$$\rho_P\colon \mathcal{S}_4 \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^4) \qquad\qquad \sigma \mapsto (e_i \mapsto e_{\sigma(i)}).$$

Cette représentation laisse stable $\mathrm{Vect}(1,1,1,1)$ dont

$$H = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 \,|\, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

est un supplémentaitre stable. Elle induit une représentation ρ_S appelée représentation standard sur H. Comme ρ_P induit la représentation triviale sur $\mathrm{Vect}(1,1,1,1)$ nous avons la relation $\chi_{\rho_P} = \chi_{\rho_{\mathrm{triv}}} + \chi_{\rho_S}$. Reste à savoir si χ_{ρ_S} est irréductible, *i.e.* si $\langle \chi_{\rho_S}, \chi_{\rho_S}\rangle = 1$. Mais $\chi_{\rho_P}(\sigma)$ est le nombre de 1 sur la diagonale de la matrice de permutations σ, c'est-à-dire le nombre de points fixes de σ. Ainsi

$$\chi_{\rho_P}(\mathrm{id}) = 4, \quad \chi_{\rho_P}((1\ 2)) = 2, \quad \chi_{\rho_P}((1\ 2)(3\ 4)) = 0, \quad \chi_{\rho_P}((1\ 2\ 3)) = 1, \quad \chi_{\rho_P}((1\ 2\ 3\ 4)) = 0$$

(en effet $\mathrm{Fix}(\mathrm{id}) = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $\mathrm{Fix}((1\ 2)) = \{3,\ 4\}$, $\mathrm{Fix}((1\ 2)(3\ 4)) = \emptyset$, $\mathrm{Fix}((1\ 2\ 3)) = \{4\}$ et $\mathrm{Fix}((1\ 2\ 3\ 4)) = \emptyset$) d'où (puisque $\chi_{\rho_S}(g) = \chi_{\rho_P}(g) - \chi_{\rho_{\mathrm{triv}}}(g) = \chi_{\rho_P}(g) - 1$)

$$\chi_{\rho_S}(\mathrm{id}) = 3, \quad \chi_{\rho_S}((1\ 2)) = 1, \quad \chi_{\rho_S}((1\ 2)(3\ 4)) = -1, \quad \chi_{\rho_S}((1\ 2\ 3)) = 0, \quad \chi_{\rho_S}((1\ 2\ 3\ 4)) = -1.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}\langle \chi_{\rho_S}, \chi_{\rho_S}\rangle &= \frac{1}{|\mathcal{S}_4|}\Big(1\times 3\times\overline{3} + 6\times 1\times\overline{1} + 3\times(-1)\times\overline{(-1)} + 8\times 0\times\overline{0} + 6\times(-1)\times\overline{(-1)}\Big)\\ &= \frac{1}{24}(9+6+3+6)\end{aligned}$$

Nous en déduisons que ρ_S est une représentation irréductible de degré 3. Nous la notons ρ_4.

Déterminons les deux autres représentations irréductibles de $\mathcal{A}_4$ notées ρ_3 et ρ_5. Commençons par déterminer leurs degrés : l'identité

$$(\deg\rho_{\mathrm{triv}})^2 + (\deg\mathrm{sgn})^2 + (\deg\rho_3^2)^2 + (\deg\rho_4^2)^2 + (\deg\rho_5^2)^2 = |\mathcal{S}_4|$$

conduit à

$$24 - (\deg\rho_{\mathrm{triv}})^2 - (\deg\mathrm{sgn})^2 - (\deg\rho_4)^2 = (\deg\rho_3)^2 + (\deg\rho_5)^2$$

soit $13 = (\deg\rho_3)^2 + (\deg\rho_5)^2$. Nous en déduisons que $\{\deg\rho_3,\ \deg\rho_5\} = \{2,\ 3\}$.

Considérons la représentation

$$\rho_5\colon \mathcal{S}_4 \to \mathrm{GL}(H), \qquad\qquad \sigma \mapsto \mathrm{sgn}(\sigma)\rho_4(\sigma).$$

Alors $\chi_{\rho_5} = \mathrm{sgn}\chi_{\rho_4}$ d'où

$$\chi_{\rho_S}(\mathrm{id}) = 1 \times 3 = 3, \qquad \chi_{\rho_S}((1\ 2)) = (-1) \times 1 = -1,$$
$$\chi_{\rho_S}((1\ 2)(3\ 4)) = 1 \times (-1) = -1, \qquad \chi_{\rho_S}((1\ 2\ 3)) = 1 \times 0 = 0,$$
$$\chi_{\rho_S}((1\ 2\ 3\ 4)) = (-1) \times (-1) = 1.$$

En particulier

$$\begin{aligned}\langle \chi_{\rho_5}, \chi_{\rho_5} \rangle &= \frac{1}{24}\Big(1 \times 3 \times 3 + 6 \times (-1) \times (-1) + 3 \times (-1) \times (-1) + 8 \times 0 \times 0 + 6 \times 1 \times 1\Big) \\ &= \frac{1}{24}\Big(9 + 6 + 3 + 6\Big) \\ &= 1.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que ρ_5 est irréductible. De plus $\deg \rho_5 = \dim H = 3$.

Remarque 2.1. On peut donner une interprétation géométrique de ρ_5 : c'est la représentation de $\mathcal{S}_4$ comme $\mathrm{Isom}^+(C_6)$.

Commençons à écrire la table de caractères de $\mathcal{S}_4$:

	$C(\mathrm{id})$	$C((1\ 2))$	$C((1\ 2)(3\ 4))$	$C((1\ 2\ 3))$	$C((1\ 2\ 3\ 4))$
$\chi_{\rho_{\mathrm{triv}}}$	1	1	1	1	1
χ_{sgn}	1	-1	1	1	-1
χ_{ρ_3}	2	?	?	?	?
χ_{ρ_4}	3	1	-1	0	-1
χ_{ρ_5}	3	-1	-1	0	1

où $C(g)$ désigne la classe de conjugaison de $g \in \mathcal{S}_4$.

En utilisant que les colonnes de la table de $\mathcal{S}_4$ sont orthogonales nous obtenons

	$C(\mathrm{id})$	$C((1\ 2))$	$C((1\ 2)(3\ 4))$	$C((1\ 2\ 3))$	$C((1\ 2\ 3\ 4))$
$\chi_{\rho_{\mathrm{triv}}}$	1	1	1	1	1
χ_{sgn}	1	-1	1	1	-1
χ_{ρ_3}	2	0	2	-1	0
χ_{ρ_4}	3	1	-1	0	-1
χ_{ρ_5}	3	-1	-1	0	1

Rappelons que les sous-groupes distingués de $\mathcal{S}_4$ sont les intersections $\displaystyle\bigcap_{i\in I} \ker \chi_{\rho_i}$ où $I \subset [\mathrm{triv, sgn, 3, 4, 5}]$. La table des caractères de $\mathcal{S}_4$ assure que

$$\begin{aligned}&\ker \chi_{\rho_{\mathrm{triv}}} = \mathcal{S}_4 \\ &\ker \chi_{\rho_{\mathrm{sgn}}} = \{\mathrm{id},\ C((1\ 2)(3\ 4)),\ C(1\ 2\ 3)\} \\ &\ker \chi_{\rho_3} = \{\mathrm{id}\} \\ &\ker \chi_{\rho_4} = \{\mathrm{id},\ C(1\ 2)\} \\ &\ker \chi_{\rho_5} = \{\mathrm{id},\ C(1\ 2\ 3\ 4)\}\end{aligned}$$

Par suite les sous-groupes distingués de $\mathcal{S}_4$ sont

$$\mathcal{S}_4, \qquad \{\mathrm{id}\}, \qquad \mathcal{A}_4, \qquad \{\mathrm{id},\ (1\ 2)(3\ 4),\ (1\ 3)(2\ 4),\ (1\ 4)(2\ 3)\} \simeq \mathcal{K}$$

(on rappelle que $\mathcal{K}$ désigne le groupe de Klein).

Explicitons ρ_3. Nous avons la décomposition en produit semi-direct

$$\mathcal{S}_4 \simeq \mathcal{K} \rtimes \mathcal{S}_3.$$

À cette décomposition correspond un morphisme surjectif de groupes

$$\pi \colon \mathcal{S}_4 \to {}^{\mathcal{S}_4}\!/_{\mathcal{K}} \simeq \mathcal{S}_3$$

d'où par composition avec la représentation standard $\widetilde{\rho_S}$ de $\mathcal{S}_3$ une représentation de degré 2

$$\rho_3 \colon \mathcal{S}_4 \xrightarrow{\pi} \mathcal{S}_3 \xrightarrow{\widetilde{\rho_S}} \mathrm{GL}(\widetilde{H})$$

où $\widetilde{H}$ désigne l'hyperplan de $\mathbb{C}^3$ d'équation $x_1+x_2+x_3=0$, $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$ et $\widetilde{\rho_S} \colon \mathcal{S}_3 \to \mathrm{GL}(\widetilde{H})$ la représentation standard de $\mathcal{S}_3$ induite par la représentation par permutation

$$\widetilde{\rho_P} \colon \mathcal{S}_3 \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^3), \qquad \sigma \mapsto (e_i \mapsto e_{\sigma(i)}).$$

Pour tout σ dans $\mathcal{S}_4$ nous avons

$$\chi_{\rho_3}(\sigma) = \chi_{\widetilde{\rho_S}}(\pi(\sigma))$$

soit

$$\begin{aligned}
&\chi_{\rho_3}\big(\mathrm{id}\big) = 2\\
&\chi_{\rho_3}\big((1\ 2)\big) = 0\\
&\chi_{\rho_3}\big((1\ 2)(3\ 4)\big) = 2\\
&\chi_{\rho_3}\big((1\ 2\ 3)\big) = -1\\
&\chi_{\rho_3}\big((1\ 2\ 3\ 4)\big) = \chi_{\rho_3}\big((1\ 4)(1\ 2\ 3)\big) = 0
\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}
\langle \chi_{\rho_3},\, \chi_{\rho_3}\rangle &= \frac{1}{24}\Big(1\times 2\times 2 + 6\times 0\times 0 + 3\times 2\times 2 + 8\times(-1)\times(-1) + 6\times 0\times 0\Big)\\
&= \frac{1}{24}\Big(4+12+8\Big)\\
&= 1
\end{aligned}$$

autrement dit χ_{ρ_3} est irréductible.

Exercice 10

Décrire les représentations irréductibles du groupe $\mathcal{A}_4$ et écrire sa table de caractères.

Éléments de réponse 10

Nous allons établir la table des caractères de $\mathcal{A}_4$. Il y a plusieurs façons d'arriver au résultat. La manière la plus systématique consiste à déterminer les classes de conjugaison de $\mathcal{A}_4$, construire toutes les représentations irréductibles de $\mathcal{A}_4$ et calculer la valeur de leurs caractères sur les classes de conjugaison. C'est ce que nous allons faire avant de montrer que certains des résultats démontrés précédemment permettent quelques raccourcis.

a) Désignons par t le 3-cycle $(1\ 2\ 3)$. Notons que $t^2=(1\ 3\ 2)$ et que comme t est d'ordre 3, le sous-groupe $\mathrm{T}=\langle t\rangle=\{\mathrm{id},\, t,\, t^2\}$ de $\mathcal{A}_4$ engendré par t est d'ordre 3.

b) Le sous-groupe $\mathrm{H} = \{\mathrm{id},\, s_2,\, s_3,\, s_4\}$ de $\mathcal{A}_4$ est abélien et distingué dans $\mathcal{A}_4$. En effet un 2-Sylow de $\mathcal{A}_4$ est d'ordre 4 et comme H est d'ordre 4 et contient tous les éléments de $\mathcal{A}_4$ d'ordre divisant 4 cela montre qu'il n'y a qu'un seul 2-Sylow qui est par conséquent distingué dans $\mathcal{A}_4$ et que ce 2-Sylow est H.

De plus tous les éléments de H sont d'ordre divisant 2 donc H est abélien [1].

c) Tout élément de $\mathcal{A}_4$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $t^\ell h$ avec $\ell \in \{0,\, 1,\, 2\}$ et $h \in \mathrm{H}$.

Considérons

$$\varphi\colon \mathrm{T} \times \mathrm{H} \to \mathcal{A}_4, \qquad\qquad (c, h) \mapsto ch.$$

C'est une injection de $\mathrm{T} \times \mathrm{H}$ dans $\mathcal{A}_4$. En effet soient (c_1, h_1) et (c_2, h_2) dans $\mathrm{T} \times \mathrm{H}$ tels que $c_1 h_1 = c_2 h_2$. Alors $c_2^{-1} c_1 = h_2 h_1^{-1}$; en particulier puisque $c_2^{-1} c_1$ appartient à T et $h_2 h_1^{-1}$ appartient à H, les éléments $c_2 c_1^{-1}$ et $h_2 h_1^{-1}$ appartiennent à $\mathrm{T} \cap \mathrm{H}$. Or $\mathrm{T} \cap \mathrm{H} = \big\{\mathrm{id}\big\}$ donc $(c_1, h_1) = (c_2, h_2)$. Remarquons que $|\mathrm{T} \times \mathrm{H}| = |\mathcal{A}_4|$; il en résulte que φ est une bijection ce qui permet de conclure.

d) On peut vérifier que les 3-cycles t et t^2 ne commutent à aucun élément de $\mathrm{H} \smallsetminus \{\mathrm{id}\}$ par un calcul direct.

e) Montrons que les classes de conjugaison de $\mathcal{A}_4$ sont

$$C_1 = \big\{\mathrm{id}\big\}, \qquad C_2 = \mathrm{H} \smallsetminus \big\{\mathrm{id}\big\}, \qquad C_3 = t\mathrm{H}, \qquad C_4 = t^2\mathrm{H}.$$

Comme dans tout groupe la classe de conjugaison de l'élément neutre a un seul élément C_1 appartient à l'ensemble $\mathrm{conj}(\mathcal{A}_4)$ des classes de conjugaison de $\mathcal{A}_4$.

Si s appartient à C_2 et si $t^a h$, avec $a \in \{0,\, 1,\, 2\}$ et $h \in \mathrm{H}$, commute à s, alors $t^a hs = st^a h$ donc $t^a hsh = st^a h^2$. Comme H est abélien et $h^2 = \mathrm{id}$ nous obtenons $t^a s = st^a$ ce qui entraîne $a = 0$. Le centralisateur de s est donc G et le cardinal de la classe de conjugaison de s est égal à $\frac{|\mathcal{A}_4|}{|\mathrm{H}|} = 3$. Puisqu'un conjugué de s est d'ordre 2, cette classe de conjugaison est incluse dans C_2 et lui est égale pour des raisons de cardinal.

Enfin le centralisateur de t et t^2 est T ; en effet si $t^a ht = tt^a h$ alors $ht = th$ et donc $h = \mathrm{id}$. Il s'ensuit que la classe de conjugaison de t est de cardinal $\frac{|\mathcal{A}_4|}{|\mathrm{T}|} = 4$. Or

$$(t^a h)t(t^a h)^{-1} = t^a hth^{-1} t^{-a} = t(t^{a-1} ht^{1-a})(t^a h^{-1} t^{-a}) \in t\mathrm{H}$$

car H est distingué dans $\mathcal{A}_4$. Donc $t^{a-1} ht^{1-a}$ et $t^a h^{-1} t^{-a}$ appartiennent à H. La classe de conjugaison de t est donc contenue dans C_3 et lui est égale pour des raisons de cardinalité. On obtient de la même façon que la classe de conjugaison de t^2 est C_4.

f) Soit $\zeta = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$ une racine primitive 3ième de l'unité. Rappelons que μ_n désigne l'ensemble des racines $n$ième de l'unité. Pour $0 \leq j \leq 2$ on définit

1. En effet soit G un groupe dont tous les éléments sont d'ordre divisant 2 ; si g et h sont deux éléments de G, alors d'une part $(gh)^2 = e$ et d'autre part $g^2 h^2 = e$ d'où $(gh)^2 = g^2 h^2$ soit $ghgh = gghh$ et $gh = gh$.

$\eta^j : \mathcal{A}_4 \to \mu_3$ par $\eta^j(t^a h) = \zeta^{ja}$ si $0 \leq a \leq 2$ et $h \in$ H. Alors $\eta^0 = \mathrm{id}$, η et η^2 sont des caractères linéaires distincts de $\mathcal{A}_4$.

En effet si $0 \leq a, b \leq 2$ et si h, g appartiennent à H, alors $t^a h t^b g = t^{a+b}(t^{-b} h t^b) g$. Puisque H est distingué dans $\mathcal{A}_4$, on a $t^{-b} h t^b$ appartient à H et donc $(t^{-b} h t^b) g$ appartient à H. De plus $\eta^j(t^a h t^b g) = \zeta^{j(a+b)} = \zeta^{ja}\zeta^{jb} = \eta^j(t^a h)\eta^j(t^b g)$.

g) Soit V la représentation de permutation associée à l'action naturelle de $\mathcal{A}_4$ sur $\{1, 2, 3, 4\}$. Rappelons que cette représentation est $\mathbb{C}^4$ muni de l'action de $\mathcal{A}_4$ définie dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) par $g(e_i) = e_{g(i)}$. L'hyperplan W d'équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ est stable par $\mathcal{A}_4$ et la représentation obtenue est irréductible de caractère :

$$\chi_W(\mathrm{id}) = 3, \qquad \chi_W(g) = -1 \text{ si } g \in \mathrm{H} \smallsetminus \{\mathrm{id}\}, \qquad \chi_W(g) = 0 \text{ si } g \notin \mathrm{H}.$$

En effet la représentation V se décompose sous la forme $V' \oplus W$ où V' est la droite engendrée par $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$. Puisque V est une repésentation de permutation $\chi_V(g)$ est le nombre de points fixes de g agissant sur $\{1, 2, 3, 4\}$. Nous avons donc

$$\chi_V(\mathrm{id}) = 4, \qquad \chi_V(g) = 0 \text{ si } g \in \mathrm{H} \smallsetminus \{\mathrm{id}\}, \qquad \chi_V(g) = 1 \text{ si } g \notin \mathrm{H}.$$

Nous en déduisons le caractère de W car $\chi_V = \chi_{V'} + \chi_W$ et $\chi_{V'}(g) = 1$ pour tout $g \in \mathcal{A}_4$ (en effet $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ est fixe par $\mathcal{A}_4$ donc $\chi_{V'} \simeq \chi_{\rho_{\mathrm{triv}}}$). Par suite

$$\chi_W(\mathrm{id}) = 3, \qquad \chi_W(g) = -1 \text{ si } g \in \mathrm{H} \smallsetminus \{\mathrm{id}\}, \qquad \chi_W(g) = 0 \text{ si } g \notin \mathrm{H}.$$

Montrons que W est irréductible. Commençons par constater que si g appartient à $\mathcal{A}_4$ et si $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ appartient à $\mathbb{C}^4$, alors

$$g \cdot v = x_1 e_{g(1)} + x_2 e_{g(2)} + x_3 e_{g(3)} + x_4 e_{g(4)} = (x_{g^{-1}(1)}, x_{g^{-1}(2)}, x_{g^{-1}(3)}, x_{g^{-1}(4)}).$$

Supposons que v appartienne à $W \smallsetminus \{0\}$; soit W' le sous-espace de W engendré par les $g \cdot v$ pour $g \in \mathcal{A}_4$. Montrons que $W = W'$ quel que soit v. Il existe donc $i \neq j$ tel que $x_i \neq x_j$; sans perdre de généralité on peut supposer que $x_1 \neq x_2$. L'image de v par le 3-cycle t est alors (x_3, x_1, x_2, x_4) ; il s'ensuit que W' qui contient $t \cdot v$ et v contient $w = t \cdot v - v = (x_3 - x_1, x_1 - x_2, x_2 - x_3, 0)$. Le sous-espace W' contient aussi $w + g \cdot w$ si $g = (1\ 3)(2\ 4)$, et comme

$$w + g \cdot w = (x_1 - x_2)(e_2 + e_4 - e_1 - e_3)$$

et $x_1 - x_2 \neq 0$ il contient le vecteur $f_1 = e_1 - e_2 + e_3 - e_4$. Il contient donc aussi les images $f_2 = e_1 + e_2 - e_3 - e_4$ et $f_3 = e_1 - e_2 - e_3 + e_4$ de f_1 par les 3-cycles $(2\ 4\ 3)$ et $(2\ 3\ 4)$. Puisque f_1, f_2 et f_3 forment une base de W nous avons l'égalité recherchée $W = W'$.

h) Le groupe $\mathcal{A}_4$ compte quatre classes de conjugaison, il a donc quatre représentations irréductibles à isomorphismes près qui sont les trois caractères linéaires ρ_{triv}, η et η^2 et la représentation W de dimension 3. Les valeurs des caractères de ces représentations ont été calculées ci-dessus d'où la table des caractères de $\mathcal{A}_4$:

	C_1	C_2	C_3	C_4
$\chi_{\rho_{\mathrm{triv}}}$	1	1	1	1
χ_η	1	1	ζ	ζ^2
χ_{η^2}	1	1	ζ^2	ζ
χ_W	3	-1	0	0

Exercice 11

Soit G un groupe fini. Soit H un sous-groupe de G. Soit π une représentation de G de caractère χ.

a) Montrer que la restriction de π à H a pour caractère la restriction $\chi_{|\mathrm{H}}$.

b) Si π est irréductible, est-ce que $\chi_{|\mathrm{H}}$ est un caractère irréductible ?

Éléments de réponse 11

a) Montrons que la restriction de π à H a pour caractère la restriction $\chi_{|\mathrm{H}}$. Pour tout $h \in H$ on a

$$\chi_{\pi_{|\mathrm{H}}}(h) = \mathrm{tr}(\pi_{|\mathrm{H}}(h)) = \mathrm{tr}(\pi(h)) = \chi(h) = \chi_{|\mathrm{H}}(h).$$

b) Si π est irréductible, $\chi_{|\mathrm{H}}$ n'est pas nécessairement un caractère irréductible. En effet soit G un groupe fini non abélien. Soit $H = \{e_{\mathrm{G}}\}$ le sous-groupe trivial de G et soit π une représentation complexe irréductible de G de dimension ≥ 2 (une telle représentation existe). Alors toute droite de π est un sous-espace strict non nul de π stable par H donc $\chi_{|\mathrm{H}}$ n'est pas irréductible.

Exercice 12

Soit G un groupe fini. Soit H un sous-groupe de G. Soit (π, V) une représentation de H. On pose

$$W = \big\{f\colon \mathrm{G} \to V \,|\, \forall\, x \in \mathrm{G}\, \forall\, h \in H \quad f(hx) = \pi(h)f(x)\big\}$$

avec une action de G donnée par $g(f)\colon x \mapsto f(xg)$.

a) Montrer que W est une représentation de G. Quelle est sa dimension ?

b) Si π est irréductible, W est-elle une représentation irréductible de G ?

Éléments de réponse 12

a) Montrons que W est une représentation de G. On peut vérifier que
   - W est un sous-espace vectoriel de V^{G} ;
   - la formule $(g, f) \mapsto g(f)$ définit une action de groupes linéaire de G sur W ;
   - pour tout $g \in \mathrm{G}$ et pour tout $f \in W$, on a $f(g)$ appartient à W. En effet, pour tout $h \in H$ et pour tout $x \in \mathrm{G}$ on a

$$f(g)(hx) = f(h(xg)) = \pi(h)f(xg) = \pi(h)f(g)(x).$$

Ces trois points assurent que W est naturellement une représentation de G.

Précisons la dimension de W.

Si $R \subset G$ désigne l'ensemble des représentants de G modulo H l'application

$$W \to V^R \qquad\qquad f \mapsto f_{|R}$$

est une application linéaire. C'est un isomorphisme par définition de W : un élément de W est entièrement déterminé par l'image des éléments de R. Par suite $\dim W = |R| \dim V$, *i.e.* $\dim X = [\mathrm{G} : \mathrm{H}] \dim V$.

b) Si π est irréductible, W n'est pas nécessairement une représentation irréductible de G. Considérons un groupe G non trivial et $H = \{e_{\mathrm{G}}\}$ le sous-groupe trivial. La représentation triviale de H, notée triv, est irréductible. On peut vérifier que $W(\mathrm{triv}) \simeq K[\mathrm{G}]$ où $K[\mathrm{G}]$ désigne la représentation régulière de G. Or cette dernière est irréductible si et seulement si $|\mathrm{G}| = 1$ ce que l'on a exclu.

Exercice 13 [Représentations et sous-groupes distingués, Peyre, l'algèbre discrète de la transformée de Fourier, pages 231-232]

Soit G un groupe fini dont e_{G} est l'élément neutre. Soient $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r$ un ensemble de représentants des classes d'isomorphies de représentations irréductibles. Soient $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_r$ les caractères irréductibles associés. Posons

$$K_{\chi_i} = \left\{g \in \mathrm{G} \,|\, \chi_i(g) = \chi_i(e_{\mathrm{G}})\right\}$$

a) Soit $\rho\colon \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation de caractère χ_V sur un espace V de dimension d. Soit g un élément d'ordre k de G. Alors
   (i) $\rho(g)$ est diagonalisable ;
   (ii) χ_V est somme de $\chi_V(1) = \dim V = d$ racines $k$ième de l'unité ;
   (iii) $|\chi_V(g)| \leq \chi_V(e_{\mathrm{G}}) = d$;
   (iv) $K_{\chi_V} = \left\{x \in \mathrm{G}, |\, \chi_V(x) = \chi_V(e_{\mathrm{G}})\right\}$ est un sous-groupe distingué de G. On l'appelle noyau de la représentation.

b) Soit $N \triangleleft \mathrm{G}$ un sous-groupe distingué de G. Soit ρ_U une représentation de G/N sur un espace vectoriel U.

   Il existe une représentation canonique de G sur U telle que les sous-représentations de U sous l'action de G/N soient exactement celles de U sous l'action de G.

c) Soit V un espace vectoriel de dimension égale à l'ordre de G. Soit $(b_t)_{t \in \mathrm{G}}$ une base de V. La représentation régulière de G est la représentation

$$\begin{array}{rcl} \rho_{\mathrm{reg}}\colon \mathrm{G} & \to & \mathrm{GL}(V) \\ g & \mapsto & \rho_{\mathrm{reg}}(g)\colon V \to V \\ & & \qquad\qquad b_t \mapsto b_{gt} \end{array}$$

   Soit $\rho\colon \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation de G. La représentation est fidèle si ρ est injectif.

   Montrer que la représentation régulière est fidèle.

d) Montrer que les sous-groupes distingués de G sont les
$$\bigcap_{i\in I} K_{\chi_i}$$
où $I \subset \{1, 2, 3, \ldots, r\}$.

e) Montrer que G est simple si et seulement si
$$\forall\, i \neq 1, \forall\, g \in \mathrm{G} \qquad \chi_i(g) \neq \chi_i(e_{\mathrm{G}}).$$

Éléments de réponse 13

a) (i) Puisque $g^k = 1$, on a $\rho(g)^k = \mathrm{id}$. Le polynôme minimal de $\rho(g)$ divise donc $X^k - 1$ qui est scindé à racines simples.
(ii) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d$ les valeurs propres de $\rho(g)$ qui sont des racines $k$ièmes de l'unité. On a $\chi_V(g) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_d$.
(iii) On a $|\chi_V(g)| \leq |\lambda_1| + |\lambda_2| + \ldots + |\lambda_d| = d$.
(iv) Si $|\chi_V(g)| = d$, alors d'après (iii) les nombres complexes λ_i sont positivement liés sur $\mathbb{R}$; comme ils sont de module 1, ils sont tous égaux. Si $\chi_V(g) = d$, alors nécessairement $\omega_i = 1$ donc $\rho(g) = \mathrm{id}$. Ainsi $K_{\chi_V} = \ker\rho$ est bien un sous-groupe distingué.

b) Désignons par $\pi\colon \mathrm{G} \to {}^{\mathrm{G}}\!/\!_{\mathrm{N}}$ la projection canonique. La représentation $\widetilde{\rho}_U$ définie par
$$\forall\, g \in \mathrm{G} \qquad \widetilde{\rho}_U(g) = \rho_U \circ \pi(g)$$
convient.

c) Direct.

d) Soit $\mathrm{N} \lhd G$ un sous-groupe distingué de G. Désignons par ρ_U la représentation régulière de ${}^{\mathrm{G}}\!/\!_{\mathrm{N}}$. Autrement dit U est un espace vectoriel de dimension égale à $|{}^{\mathrm{G}}\!/\!_{\mathrm{N}}| = \frac{|\mathrm{G}|}{|\mathrm{N}|}$.

Soit $\mathrm{N} \lhd \mathrm{G}$ un sous-groupe distingué de G. Désignons par ρ_U la représentation régulière de ${}^{\mathrm{G}}\!/\!_{\mathrm{N}}$. Autrement dit U est un espace vectoriel de dimension égale à $|{}^{\mathrm{G}}\!/\!_{\mathrm{N}}| = \frac{|\mathrm{G}|}{|\mathrm{N}|}$ de base $(e_g)_{g\in {}^{\mathrm{G}}\!/\!_{\mathrm{N}}}$ et $\rho_U(h)(e_{\mathrm{G}}) = e_{hg}$. La représentation régulière est fidèle (c)) donc ρ_U est injective. Le b) permet d'étendre cette représentation en une représentation $\widetilde{\rho}_U\colon \mathrm{G} \to U$. Notons χ le caractère de la représentation $\widetilde{\rho}_U$. On a $\ker\widetilde{\rho}_U = \ker(\rho_U \circ \pi) = \mathrm{N}$ d'où $\mathrm{N} = K_\chi$. Ecrivons la décomposition de la représentation $\widetilde{\rho}_U$ en fonction des représentations irréductibles
$$\chi = a_1\chi_1 + a_2\chi_2 + \ldots + a_r\chi_r$$
D'après la troisième assertion de a) on a
$$\forall\, g \in \mathrm{G} \qquad |\chi(g)| \leq \sum_{i=1}^{r} a_i|\chi_i(g)| \leq \sum_{i=1}^{r} a_i|\chi_i(e_{\mathrm{G}})| = \chi(e_{\mathrm{G}}).$$
On a donc l'égalité $\chi(g) = \chi(e_{\mathrm{G}})$, *i.e.* $g \in K_\chi$, si et seulement si
$$\forall\, g \in \mathrm{G} \qquad |\chi(g)| = \sum_{i=1}^{r} a_i|\chi_i(g)| = \sum_{i=1}^{r} a_i|\chi_i(e_{\mathrm{G}})| = \chi(e_{\mathrm{G}})$$

autrement dit si et seulement si

$$\forall\, i \qquad a_i\chi_i(g) = a_i\chi_i(e_{\mathrm{G}}).$$

Ceci est finalement équivalent à

$$\forall\, i \qquad a_i > 0 \Rightarrow g \in K_{\chi_i}.$$

On obtient donc le résultat voulu avec $I = \{i \,|\, a_i > 0\}$.

Réciproquement comme les K_{χ_i} sont distingués tout sous-groupe du type $\bigcap_{i\in I} K_{\chi_i}$ l'est aussi.

e) Supposons qu'il existe un élément de $\mathrm{G}\setminus\{e_{\mathrm{G}}\}$ tel que $\chi_i(g) = \chi_i(e_{\mathrm{G}})$; alors $K_{\chi_i} \subset \mathrm{G}$ est un sous-groupe distingué non trivial et G n'est pas simple.

Réciproquement si G n'est pas simple, il existe $g \neq e_{\mathrm{G}}$ dans un certain sous-groupe distingué $\mathrm{N} \triangleleft \mathrm{G}$ non trivial. Le d) assure que $\mathrm{N} = \bigcap_{i\in I} K_{\chi_i}$ donc g appartient à K_{χ_i} pour $i \in I \subset \{2, 3, \ldots, r\}$. Ceci signifie bien que $\chi_i(g) = \chi_i(e_{\mathrm{G}})$.

Exercice 14

Le but de cet exercice est de montrer que le centre du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est le groupe des homothéties.

Une représentation ρ du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est donnée par son action naturelle sur $\mathbb{C}^n$.

(1) Montrer que la représentation ρ est irréductible.

(2) Montrer que tout élément du centre de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un morphisme de la représentation ρ, *i.e.* montrer que pour tout élément h du centre et pour tout élément M de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ on a

$$\rho(M) \circ h = Mh = hM = h \circ \rho(M).$$

(3) Conclure en utilisant le Lemme de Schur.

Éléments de réponse 14

Puisque ρ est l'action naturelle de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}^n$, ρ est l'identité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

(1) Si un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{C}^n$ est stable par tous les éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, alors $V = \{0\}$ ou $V = \mathbb{C}^n$, *i.e.* ρ est irréductible.

(2) Soit h un élément du centre de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Pour tout M dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ on a

$$\rho(M) \circ h = Mh = hM = h \circ \rho(M)$$

ainsi h est bien un morphisme de la représentation ρ.

(3) Comme ρ est irréductible, le Lemme de Schur assure que $h = \lambda\mathrm{id}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$, *i.e.* h est une homothétie.

Exercice 15

Soit G un groupe abélien.

(1) Si $\rho\colon \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation de G, montrer que tout élément G de G définit un G-morphisme $V \to V$.

(2) En déduire que toute représentation irréductible de G est de dimension 1.

(3) Donner toutes les représentations irréductibles de ${}^{\mathbb{Z}}\!/_{n\mathbb{Z}}$.

Éléments de réponse 15

(1) Pour tous G, h et x dans G on a
$$g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x = (hg) \cdot x = h \cdot (g \cdot x)$$
c'est-à-dire l'application $\rho(g)\colon x \mapsto g \cdot x$ est un G-morphisme pour tout $g \in \mathrm{G}$.

(2) On suppose que V est une représentation irréductible de G. Si $g \in \mathrm{G}$, alors, d'après 1. et le Lemme de Schur, $\rho(g) = \lambda \mathrm{id}$. De plus comme $\rho(g) \in \mathrm{GL}(V)$, λ est non nul. Par conséquent tout sous-espace vectoriel de V est stable par G donc est une sous-représentation de G. Puisque V est irréductible, $\dim V = 1$.

(3) D'après 1. une représentation irréductible de ${}^{\mathbb{Z}}\!/_{n\mathbb{Z}}$ est un morphisme de groupes
$$\rho\colon {}^{\mathbb{Z}}\!/_{n\mathbb{Z}} \to \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$$
Tout élément k de ${}^{\mathbb{Z}}\!/_{n\mathbb{Z}}$ est d'ordre divisant n ; par suite $\rho(k)$ est aussi d'ordre divisant n, *i.e.* $\rho(k)^n = 1$. Réciproquement pour tout racine $n$ième de l'unité ω l'application
$${}^{\mathbb{Z}}\!/_{n\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}^*, \qquad\qquad k \mapsto \omega^k$$
est une représentation de ${}^{\mathbb{Z}}\!/_{n\mathbb{Z}}$. On les obtient donc toutes ainsi.

Notons aussi que l'espace des représentations irréductibles de ${}^{\mathbb{Z}}\!/_{n\mathbb{Z}}$ peut être muni d'une structure de groupe qui le rend isomorphe à ${}^{\mathbb{Z}}\!/_{n\mathbb{Z}}$.

Exercice 16

Soit G un groupe fini. Soit H un sous-groupe abélien de G.

Montrer que toute représentation irréductible de G est de dimension au plus $[\mathrm{G} : \mathrm{H}]$.

Indication : si V est une représentation irréductible de G*, c'est aussi une représentation de* H*. On pourra considérer la représentation de* G *engendrée par une sous-représentation de* H.

Éléments de réponse 16

Soit V une représentation irréductible de G. C'est aussi par restriction une représentation irréductible de H. Puisque H est abélien, V vu comme représentation de H se décompose en somme directe de représentations de H de degré 1. Soit v un vecteur directeur d'une de ces représentations et soit V' le sous-espace vectoriel de V engendré par les vecteurs de la forme $g \cdot v$ où G parcourt G. Il est clair que $V' \neq \{0\}$ est une sous-représentation de V du groupe G ; ainsi $V' = V$. Or si $g' = gh$ avec h dans H, alors par définition de v, $g' \cdot v$ et $g \cdot v$ sont colinéaires. Par conséquent V' est engendré par $[\mathrm{G} : \mathrm{H}]$ vecteurs, et est donc de dimension au plus $[\mathrm{G} : \mathrm{H}]$.

Exercice 17

Montrer que tout groupe non abélien admet une représentation irréductible de dimension > 1.

Éléments de réponse 17

Soit G un groupe dont toutes les représentations irréductibles sont de degré 1. La somme des carrés des dimensions des représentations irréductibles de G est égale au cardinal de G ; par suite les classes de conjugaisons de G sont toutes réduites à un élément. Autrement dit G est abélien.

Exercice 18

Montrer que si V est une représentation d'un groupe fini vérifiant $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 2$, alors V est somme de deux représentations irréductibles.

Éléments de réponse 18

Si $V = \oplus V_i^{a_i}$, alors $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 2$ si et seulement si deux a_i distincts sont non nuls et égaux à 1.

Exercice 19

Soit V une représentation de degré fini d'un groupe G (non nécessairement fini).

(1) On suppose qu'il existe une forme hermitienne H sur V invariante par G, c'est-à-dire

$$H(u, v) = H(g \cdot u, g \cdot v) \qquad \forall\, u,\, v \in V \quad \forall\, g \in \mathrm{G}.$$

Montrer que toute sous-représentation de V admet une sous-représentation supplémentaire.

(2) Montrer que si G est fini, alors il existe toujours une telle forme hermitienne G-invariante.

(3) On suppose V irréductible. Montrer que deux formes hermitiennes G-invariantes sont multiples l'une de l'autre (c'est-à-dire $H_1 = \mu H_2$).

Éléments de réponse 19

Cet exercice est une (re)démonstration du théorème de Maschke.

(1) Soit W une sous-représentation de V. La forme hermitienne H nous donne un moyen canonique de trouver un supplémentaire de W : on prend son orthogonal. Comme H est invariante par G, on en déduit que $W^\perp$ est une sous-représentation de G par le calcul suivant

$$\forall\, g \in \mathrm{G} \quad \forall\, v \in W \quad \forall w \in W^\perp \quad H(v, g \cdot w) = H(g^{-1} \cdot v, w) = 0.$$

(2) Soit H_0 une forme hermitienne sur V. Puisque G est fini, on peut définir une forme hermitienne H G-invariante en "moyennant" H_0 par G :

$$H(v, w) = \sum_{g \in \mathrm{G}} H_0(g \cdot v, g \cdot w)$$

Remarque : dans une base adéquate, une représentation d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est donc unitaire. En particulier, tous les automorphismes linéaires sont diagonalisables.

(3) Soient H et H' deux formes hermitiennes G-invariantes sur V. Alors H induit une bijection anti-linéaire

$$\varphi_H \colon V \to V^* \qquad\qquad v \mapsto (w \to H(w,v)).$$

De plus, comme H est G-invariante, $\varphi_H(g \cdot v) = g \cdot \varphi_H(v)$. L'application $\varphi_{H'}^{-1} \circ \varphi_H$ est donc un G-automorphisme linéaire de V, donc d'après le Lemme de Schur, $\varphi_{H'}^{-1} \circ \varphi_H = \mu\mathrm{id}$, c'est-à-dire $H = \mu H'$.

Exercice 20

Soient p un nombre premier et G un groupe d'ordre p^3 non abélien. On note $\mathbb{U}_p = \{z \in \mathbb{C} \mid z^p = 1\}$.

(1) Montrer que les représentations irréductibles de G ont dimension 1 ou p. Que peut-on dire du nombre des représentations de G dans $\mathbb{C}$?

(2) Montrer que le nombre de classes d'isomorphie de représentations irréductibles de dimension p de G est $p-1$ et donner l'ordre de l'abélianisé de G.

Soit $g \in \mathrm{G} \smallsetminus D(\mathrm{G})$.

(3) Montrer que pour tout $\zeta \in \mathbb{U}_p$ il existe une représentation V de dimension 1 de G telle que $\chi_V(g) = \zeta$.

(4) Déduire de ce qui précède et du fait que si G est un groupe fini le produit d'un caractère irréductible de G par un caractère de degré 1 est un caractère irréductible de G de même degré que si V est une représentation irréductible de dimension p de G, alors $\chi_V(g) = 0$.

(5) Montrer que si V est une représentation de G de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$) alors l'un des nombres $\chi_V(g)$, $\chi_V(g^2)$, …, $\chi_V(g^n)$ est non nul (on pourra considérer la somme $\displaystyle\sum_{\lambda} C(\lambda)$, où C désigne le polynôme caractéristique de $v \cdot gv$, et λ parcourt ses n valeurs propres).

(6) Déduire des questions 4. et 5. que l'abélianisé de G n'est pas cyclique. à quel groupe est-il isomorphe ?

(7) Montrer à l'aide de la question 4. que si $g' \in D(\mathrm{G})$ et si (V, ρ) est une représentation irréductible de G alors $|\chi_V(g')| = \dim V$. Préciser les endomorphismes $\rho(g')$ pour g' parcourant $D(\mathrm{G})$.

(8) Décrire le centre de G et donner le cardinal des différentes classes de conjugaison de G.

(9) Donner explicitement la table des caractères de G lorsque $p = 3$.

Éléments de réponse 20

Soient p un nombre premier et G un groupe d'ordre p^3 non abélien. On note $\mathbb{U}_p = \{z \in \mathbb{C} \mid z^p = 1\}$.

(1) La dimension des représentations irréductibles de G divise l'ordre de G, donc p^3 ; par la formule de Burnside, la somme des carrés de ces dimensions vaut l'ordre, p^3. Donc les seules valeurs possibles sont 1 et p. On sait que 1 est la dimension de la représentation triviale, irréductible. Et que G possède une représentation irréductible de dimension > 1, car il est non

abélien (cours). Donc $\{1,\, p\}$ est l'ensemble des dimensions des représentations irréductibles de G. On sait qu'une représentation de G dans $\mathbb{C}$ est donnée précisément par un morphisme de G dans $\mathbb{C}^\times$ (*i.e.* un élément du dual G) et que leur nombre est l'ordre de l'abélianisé $\mathrm{G_{ab}}$. En particulier ce nombre divise $|\mathrm{G}| = p^3$.

(2) On écrit la formule de Burnside pour G : si r est le nombre de classes d'isomorphie de représentations irréductibles de dimension p de G, on obtient : $p^3 = |\mathrm{G_{ab}}| + rp^2$. Par suite p^2 divise $\mathrm{G_{ab}}$, qui divise lui-même p^3. Or G n'est pas abélien, donc l'ordre de $\mathrm{G_{ab}}$ n'est pas p^3, et c'est p^2. Il suit de la formule que $r = p - 1$.

Soit $g \in \mathrm{G} \smallsetminus D(\mathrm{G})$.

(3) Toute représentation (V, χ) de dimension 1 de G factorise par $\mathrm{G_{ab}}$, d'ordre p^2. Puisque $g \notin D(\mathrm{G})$ on sait qu'il existe χ un caractère de degré 1 tel que $\chi(g) \neq 1$. On a $\chi(g)^{p^2} = 1$; si $\chi(g)$ est d'ordre p dans $\mathbb{C}^\times$, alors il engendre $\mathbb{U}_p$, donc tout $\zeta \in \mathbb{U}_p$ s'écrit $\zeta = \chi(g)^k = \chi^k(g)$ et la représentation $(\mathbb{C}, \chi^k)$ convient pour V. Sinon, $\chi^p(g)$ est d'ordre p, on remplace χ par le caractère χ^p dans l'argument.

(4) Supposons $\chi_V(g) \neq 0$. Alors en multipliant χ_V par les p caractères de degré 1 obtenus en 3), on obtient par I 3. p caractères irréductibles de degré p distincts, car leur valeur en g diffère. Or par 2) G n'admet que $p-1$ caractères irréductibles de degré p, contradiction.

(5) Si on note $\lambda_1,\, \lambda_2,\, \ldots,\, \lambda_n$ les n valeurs propres de $\rho_V(g)$ (diagonalisable), alors celles de $\rho_V(g^k)$ sont $\lambda_1^k,\, \lambda_2^k,\, \ldots,\, \lambda_n^k$. De plus $\rho_V(g)$ est inversible, donc de déterminant d_g non nul. La somme proposée par l'énoncé $\sum_\lambda C(\lambda)$, qui est nulle par définition, s'écrit donc aussi

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \chi_V(g^k) + n a_0,$$

où on note $C(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ $(a_n = 1,\, a_0 = \pm d_g)$. Le fait que na_0 soit non nul entraîne ainsi que l'un des $\chi_V(g^k)$, $1 \le k \le n$, l'est également.

(6) Si l'abélianisé de G était cyclique, il serait engendré par la classe, d'ordre p^2, d'un certain élément g de $G \smallsetminus D(\mathrm{G})$. On applique alors 5) à g et V une représentation irréductible de G de dimension p : avec 4) on en déduit que l'un des g^i, $1 \le i \le p$ est dans $D(\mathrm{G})$. Mais alors l'ordre de la classe de g dans l'abélianisé serait majorée par $i \le p$, contradiction. Par suite $\mathrm{G_{ab}}$ est un groupe abélien d'ordre p^2, non cyclique. Par le théorème de structure des groupes abéliens finis, on a $\mathrm{G_{ab}} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

(7) Si $\dim V = 1$, alors $\chi_V(g') = 1$ pour tout $g' \in D(\mathrm{G})$ car χ_V est un morphisme dans $\mathbb{C}^\times$ abélien. Sinon, $\dim V = p$ et on écrit que le carré hermitien de χ_V vaut 1 : d'après 4), on trouve $\sum_{g' \in D(\mathrm{G})} |\chi_V(g')|^2 = p^3$. Or pour tout g' on sait que $|\chi_V(g')| \le p = \dim V$. Puisque $|D(\mathrm{G})| = p$, ceci entraîne l'égalité $|\chi_V(g')| = p$ pour tout g'. Le cours montre que l'égalité $|\chi_V(g')| = \dim V$ a lieu si et seulement si $\rho_V(g')$ est une homothétie. Or si $g' \neq 1$, g' est

d'ordre p donc l'ordre de $\rho_V(g')$ est 1 ou p. Si c'était 1, alors g' et donc $D(\mathrm{G})$ seraient dans le noyau de ρ_V ; ainsi ρ_V factoriserait en un morphisme de G_{ab} abélien dans $\mathrm{GL}(V)$, ce qui contredit le fait que V est irréductible de dimension > 1. Donc $\rho_V(g')$ est une homothétie d'ordre p, de rapport une racine primitive $p$ième ζ de 1. Alors on a $D(\mathrm{G}) = \{{g'}^{\ell} \,|\, 0 \leq \ell \leq p-1\}$, et chaque $\rho({g'}^{\ell})$ est l'homothétie de V de rapport ζ^{ℓ}.

(8) D'après 7., les p éléments de $D(\mathrm{G})$ ont pour carré hermitien de leur colonne associée dans la table de caractères de G la valeur $|\mathrm{G}| = p^3$ obtenue (Burnside) pour la colonne de 1, donc leur centralisateur est G, *i.e.* ils sont dans le centre de G. Soit $g \in \mathrm{G} \smallsetminus D(\mathrm{G})$. Par 4., g n'est pas dans le centre car il n'agit pas comme une homothétie sur V irréductible de dimension p (en effet, on sait que $\rho_V(g)$ est alors un G–morphisme, donc par Schur une homothétie). Or le centralisateur de g contient g et $D(\mathrm{G})$, donc ce sous-groupe a cardinal $> p$, et distinct de p^3, soit exactement p^2 par Lagrange. Le cardinal de la classe de conjugaison de g est donc $\frac{p^3}{p^2} = p$ (toute la classe a même image dans l'abélianisé, par cardinalité elle coïncide donc avec la classe à droite $gD(\mathrm{G})$). On obtient en particulier que le centre de G est égal à $D(\mathrm{G})$.

(9) On note x un générateur de $D(\mathrm{G})$ (d'ordre 3), et g_{ij} un élément de $\mathrm{G} \smallsetminus D(\mathrm{G})$ qui s'envoie sur $(\bar{\imath}, \bar{\jmath})$ dans le quotient G_{ab}, identifié au groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. On a $Z(\mathrm{G}) = D(\mathrm{G})$, et la classe de conjugaison de g_{ij} dans G est $g_{ij}\langle x \rangle$ (cf. 8.). Ainsi la partie haute de la table privée des colonnes de x et x^2 est la table de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (groupe abélien, donc isomorphe à son groupe dual). Les deux représentations de degré 3, duales l'une de l'autre, correspondent sur $Z(\mathrm{G}) = D(\mathrm{G})$ à une action fidèle par homothéties, et on a $\rho(x^2) = \rho(x)^2$. Leurs caractères sont conjugués.

	1	x	x^2	g_{10}	g_{20}	g_{01}	g_{02}	g_{11}	g_{22}	g_{12}	g_{21}
χ_{00}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_{10}	1	1	1	$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}^2$	1	1	$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}^2$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}^2$
χ_{20}	1	1	1	$\mathbf{j}^2$	$\mathbf{j}$	1	1	$\mathbf{j}^2$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}^2$	$\mathbf{j}$
χ_{01}	1	1	1	1	1	$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}^2$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}^2$	$\mathbf{j}^2$	$\mathbf{j}$
χ_{02}	1	1	1	1	1	$\mathbf{j}^2$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}^2$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}^2$
χ_{11}	1	1	1	$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}^2$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}^2$	$\mathbf{j}^2$	$\mathbf{j}$	1	1
χ_{22}	1	1	1	$\mathbf{j}^2$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}^2$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}^2$	1	1
χ_{12}	1	1	1	$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}^2$	$\mathbf{j}^2$	$\mathbf{j}$	1	1	$\mathbf{j}^2$	$\mathbf{j}$
χ_{21}	1	1	1	$\mathbf{j}^2$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}^2$	1	1	$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}^2$
χ'	3	$3\mathbf{j}$	$3\mathbf{j}^2$	0	0	0	0	0	0	0	0
χ''	3	$3\mathbf{j}^2$	$3\mathbf{j}$	0	0	0	0	0	0	0	0

Exercice 21

(1) Soit G un groupe abélien fini. Pour $g \in \mathrm{G}$ notons δ_g l'élément de $\mathbb{C}[\mathrm{G}]$ qui vaut 1 en g et 0 sur $\mathrm{G} \smallsetminus \{g\}$.

a) Énoncer la formule d'inversion de Fourier et l'appliquer aux éléments δ_g de $\mathbb{C}[\mathrm{G}]$.

b) En déduire que le morphisme naturel de G dans son bidual $\widehat{\widehat{\mathrm{G}}}$ est injectif.

(2) Soit V une représentation d'un groupe fini G qui est somme directe de r représentations irréductibles deux à deux non isomorphes.
  a) Décrire l'algèbre $\mathrm{End}_{\mathrm{G}}(V)$ des G-endomorphismes de V.
  b) Déterminer toutes les sous–représentations de V.

(3) Soit G un groupe fini. Montrer que le produit d'un caractère irréductible de G par un caractère de degré 1 est un caractère irréductible de G de même degré.

Éléments de réponse 21

(1) Soit G un groupe abélien fini. Pour $g \in \mathrm{G}$ notons δ_g l'élément de $\mathbb{C}[\mathrm{G}]$ qui vaut 1 en g et 0 sur $\mathrm{G} \smallsetminus \{g\}$.
  a) Pour toute f dans $\mathbb{C}[\mathrm{G}]$, nous avons

$$f = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{\xi \in \widehat{\mathrm{G}}} \widehat{f}(\chi)\chi^{-1}$$

Et

$$\widehat{\delta_g}(\chi) = \sum_{g'} \delta_g(g')\chi(g') = \chi(g).$$

Ainsi

$$\delta_g = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{\chi \in \widehat{\mathrm{G}}} \chi(g)\chi^{-1}.$$

  b) Soit $g \in \mathrm{G}$. Par a), la transformée de Fourier de δ_g est l'application $\chi \mapsto \chi(g)$. Elle s'identifie donc à l'image naturelle de g dans son bidual. Un élément g est dans le noyau de ce morphisme naturel d'évaluation si et seulement si tous les caractères $\chi \in \widehat{\mathrm{G}}$ y valent 1, c'est-à-dire si et seulement si g a même transformée de Fourier que 1. Par la formule d'inversion ceci équivaut à $g = 1$.

(2) Soit V une représentation d'un groupe fini G qui est somme directe de r représentations irréductibles deux à deux non isomorphes.
  a) Si $V = \bigoplus_{i=1}^{r} V_i$, alors chaque élément de $\mathrm{End}_{\mathrm{G}}(V)$ se "décompose" en une somme directe de G-morphismes de V_i dans V_j, pour (i, j) variant dans $\{1, \ldots, r\} \times \{1, \ldots, r\}$. Par le lemme de Schur, les G-morphismes entre irréductibles non isomorphes sont nuls, et $\mathrm{End}_{\mathrm{G}}(V_i) = \mathbb{C}\mathrm{id}_{V_i}$. Nous en déduisons que l'algèbre $\mathrm{End}_{\mathrm{G}}(V)$ s'identifie au produit des algèbres $\mathbb{C}\mathrm{id}_{V_i}$ (blocs diagonaux d'une homothétie sur chaque V_i).
  b) On utilise l'unicité de la décomposition canonique de V : par l'hypothèse, toutes les composantes isotypiques de V sont irréductibles, et les sous-représentations sont toutes les sommes (directes) de certaines de ces composantes. (Attention, si une représentation irréductible apparaissait dans V avec multiplicité > 1, la composante isotypique correspondante, et par suite V, possèderait une infinité de sous-représentations irréductibles, toutes isomorphes !)

(3) Soit G un groupe fini.

D'après le cours, le produit des caractères de deux représentations V et (W, ρ) est le caractère de la représentation $\mathrm{Hom}(V^*, W)$, où V^* est la représentation duale de V. Ou encore : si $\dim V = 1$, ce produit est le caractère de la représention $\chi_V \cdot \rho$ de G sur W ($g \cdot w =: \chi_V(g) \cdot \rho(g)(w) \in W$). Le degré de ce caractère produit est sa valeur en 1, donc clairement le degré de χ_W. L'irréductibilité du produit (valable si $\dim V = 1\,!$) s'obtient facilement en calculant le carré hermitien de $\chi_V \chi_W$, égal à celui de χ_W (car χ_V, morphisme de G dans $\mathbb{C}^\times$, a pour valeurs des racines de l'unité donc de module 1), donc ce carré hermitien vaut 1 par l'irréductibilité de χ_W. On peut aussi remarquer qu'une sous–représentation de $(W, \chi_V \cdot \rho)$, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel stable pour l'action correspondante de G, est une sous–représentation de (W, ρ), donc $\{0\}$ ou W.

Références

[CG15] P. Caldero and J. Germoni. *Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries-Tome 2.* Calvage et Mounet, 2015.