Université Côte d'Azur
Année 2020-2021

Fiche thématique :
Représentations de groupes

Table des matières

1. Rappels 1
1.1. Mises en garde 2
1.2. Les fondamentaux 3
1.3. Quelques questions classiques 4
1.4. Théorie des représentations sous forme matricielle 5
2. Exercices 6
Références 10

1. Rappels

Aux confins de la théorie des groupes et de la géométrie (linéaire) trône la théorie des représentations. Une représentation n'est rien d'autre qu'une action linéaire d'un groupe sur un espace V. Il s'agit donc de plonger un groupe (ou un quotient du groupe) dans un groupe de matrices. Ici, nous allons nous intéresser aux représentations d'un groupe fini sur le corps des complexes (pour plusieurs raisons : le corps est algébriquement clos, de caractéristique nulle, et on a une notion de positivité via les formes hermitiennes).

Le but de la théorie est de comprendre toutes les représentations possibles d'un groupe fini fixé G, à isomorphisme près, c'est-à-dire à changement de base près. La première idée est d'utiliser la finitude du groupe, elle se résume en un autre mot : moyenner. Prendre la moyenne sur le groupe va permettre de montrer une propriété de semi-simplicité : tout sous-espace G-stable possède un supplémentaire G-stable, c'est le théorème de Maschke. Une représentation est alors somme directe de sous-représentations "minimales" dites irréductibles. Elles se caractérisent par le lemme de Schur qui assure qu'un morphisme entre deux sous-représentations irréductibles qui commute à l'action de G est soit nul, soit un isomorphisme. La classification à isomorphisme près des G-représentations (à isomorphisme près !) devient abordable : il suffit de classer celles qui sont irréductibles. C'est ici qu'intervient la théorie des caractères, introduite par Frobenius et Schur. Le caractère d'une représentation est une fonction de G dans $\mathbb{C}$, associée à la représentation, qui se définit par la trace de la matrice associée à g dans G, il ne dépend que de sa classe d'isomorphisme. Il s'agit d'un objet simple et concret, un outil de calcul qui va caractériser la représentation à isomorphisme près. On dote l'espace des fonctions de G vers $\mathbb{C}$ d'une forme hermitienne G-invariante sur l'espace des fonctions, et là, miracle, le lemme de Schur implique que les caractères des sous-représentations irréductibles forment une famille orthonormée ; il s'agit même d'une base orthonormée de l'espace des fonctions constantes sur les classes de conjugaison de G. On illustre la théorie avec des exemples de "groupes de petits cardinaux" où l'on sait calculer tous les caractères irréductibles donc, tous les caractères. On prend l'habitude de résumer les résultats obtenus dans une table de caractères, c'est-à-dire un tableau à double entrée dont les colonnes sont associées aux classes de conjugaison du groupe, et dont les lignes sont associées aux caractères irréductibles. Cette table donne de précieux renseignements sur le groupe qu'il faut pouvoir décoder, même si l'on sait qu'elle ne permet pas de retrouver le groupe à isomorphisme près. Pour finir, si on doit associer la théorie des représentations à une idée fondamentale des mathématiques, ce serait encore une fois l'idée de dualité. En effet, si un espace E de dimension finie sur $\mathbb{k}$ peut se voir à travers ses morphismes de E vers $\mathbb{k}$, on peut tenter de comprendre un groupe G à travers ses morphismes de G dans $\mathbb{C}^*$. Pour ce qui est des groupes abéliens finis, on obtient une dualité parfaite, mais pour les groupes finis en général, la théorie s'effondre : par exemple, pour l'énorme groupe $\mathcal{S}_n$, on ne récupère que le morphisme trivial et la signature. Il faut alors remplacer $\mathbb{C}^* = \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$ par $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ pour retrouver les propriétés (mais pas toutes !) du groupe G.

1.1. **Mises en garde.**

- ◇ Il y a souvent confusion entre caractère et représentation. Il ne faut jamais oublier que le but est de comprendre comment représenter un groupe à l'aide de matrices. La représentation est le but, et le caractère est l'outil.
- ◇ Il y a aussi une confusion qui provient du vocabulaire même. On appelle représentation un morphisme de G dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{k})$ mais aussi l'espace V sur lequel le groupe G agit linéairement. En fait, on préfère appeler V un "G-module", ce qui signifie en gros qu'il possède une structure linéaire et une action linéaire de G, le défaut de cette notation est de ne pas préciser sur quel corps on le considère, on pourrait dire "G-module sur le corps $\mathbb{k}$" si la précision est utile.
- ◇ Le mieux pour éviter toute confusion est de savoir interpréter toutes les définitions de base de façon matricielle. Il faut savoir comment interpréter une sous-représentation (matrice triangulaire par blocs), une somme directe de représentations (matrice diagonale par blocs), un morphisme de représentation (commutation de matrices). Voir par exemple [CG15, p. 255].
- ◇ Attention, on met sur un G-module V deux formes hermitiennes : une classique notée $(\ ,\ )$, indépendante de G, et l'autre G-invariante donnée par
$$(v, w)_{\mathrm{G}} = \frac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{g\in\mathrm{G}}(g\cdot v, g\cdot w).$$
Il ne faut pas les confondre. C'est la seconde qui fournit un supplémentaire G-stable à toute sous-représentation.
- ◇ Ne passons pas à côté des choses simples ! Il serait ridicule de faire défiler la théorie sans comprendre ce qu'est la théorie des représentations pour le groupe trivial et pour $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Pour le groupe trivial, un G-module est tout simplement un espace vectoriel. Pour $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$, les représentations correspondent aux matrices telles que $A^2 = \mathrm{id}$ (ici $A = \rho(\overline{1})$), c'est-à-dire les matrices de symétries. Un endomorphisme de représentation correspond à une matrice qui commute avec A. Deux représentations ρ et ρ_0 sont isomorphes

(toujours pour le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) si les deux matrices A et A_0 correspondantes sont conjuguées. Une matrice symétrique (en caractéristique différente de 2) est diagonalisable, ce qui correspond au théorème de Maschke, et les valeurs propres sont 1 et -1, ce qui correspond au fait que l'on a deux sous-représentations irréductibles : $\overline{1} \mapsto 1$ et $\overline{1} \mapsto -1$. Les sous-espaces propres $\ker(A - \mathrm{id})$ et $\ker(A + \mathrm{id})$ sont les composantes isotypiques de la représentation pour les deux irréductibles de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Que se passe-t-il pour $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$? Voir exemple [CG15].

- ◇ De la même manière, trouver une représentation en degré d du groupe diédral D_{2n} signifie trouver, dans $\mathrm{M}_d(\mathbb{C})$ deux matrices C et S telles que $C^n = \mathrm{id}$, $S^2 = \mathrm{id}$ et $SCS^{-1} = C^{-1}$. Cela vient du fait que D_{2n} est engendré par deux éléments vérifiant les relations correspondantes, voir [CG15, Remarque XIII-B.2.2].
- ◇ Quand on applique le théorème de Maschke (ou théorème de semi-simplicité) on obtient $V = \bigoplus_{i=1}^{m} V_i$ où les V_i sont des sous-représentations irréductibles. On regroupe ensuite la somme directe en représentations isomorphes : $V \simeq \bigoplus_{i=1}^{k} m_i V_i$, attention, c'est un isomorphisme et non pas une égalité (même si par abus de notation on arrive parfois à noter des égalités). Les $m_i V_i$ sont les composantes isotypiques. La composante isotypique associée à une représentation irréductible est unique, elle est entièrement déterminée par V. La première composante isotypique à connaître est le sous-espace V^{G} des éléments invariants par tout G ; c'est la composante isotypique de la représentation triviale. Comme elle est de degré 1, la multiplicité est donc $m = \dim V^{\mathrm{G}}$. Pour revenir à l'exemple de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, m est la dimension du sous-espace propre de A pour la valeur propre 1.
- ◇ Quand G est un groupe fini, le théorème de Lagrange assure qu'une représentation vérifie $\rho(g)^n = \mathrm{id}$ pour $n = |\mathrm{G}|$. C'est ceci qui implique que $\rho(g)$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, mais si G est infini, la diagonalisabilité n'est pas acquise ! Penser à la représentation de $(\mathbb{Z}, +)$ telle que $n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- ◇ Attention, quand on dit que le caractère caractérise, il ne caractérise la représentation qu'à isomorphisme près. On ne peut pas récupérer une représentation à partir de son caractère.

1.2. **Les fondamentaux.** Il est fondamental de savoir construire des représentations d'un groupe G donné. Les outils de base sont les suivants :

- ◇ On peut construire à partir d'un groupe un certain nombre de représentations : les représentations classiques (la triviale, la régulière [CG15, XIII-1.1.10]), les représentations par permutations à partir d'actions de groupe sur des ensembles finis. En effet, toute action du groupe G sur un ensemble fini X fournit une représentation par matrices de permutations, [CG15, XIII-3.11]. Le caractère de cette représentation est l'application qui envoie g sur le nombre d'invariants de g sur X. La représentation régulière a l'avantage d'être fidèle (injective) ; cela provient des permutations de l'action du groupe G à gauche sur lui-même.

- ◇ La construction de représentations, voir [CG15, XIII-1.3] : on utilise la somme directe, la dualité, les homomorphismes de représentations pour construire à partir de quelques représentations classiques beaucoup d'autres représentations.
- ◇ Si G est un groupe abélien, alors les matrices de représentations commutent et sont diagonalisables : elles sont codiagonalisables et donc, les sous-représentations irréductibles sont de dimension 1. On a ainsi n sous-représentations irréductibles et elles forment même un groupe pour la multiplication des fonctions, noté $\widehat{\mathrm{G}}$. C'est le début d'une belle dualité ! Par exemple, le groupe G va s'identifier au bidual, voir [CG15, Annexe XIII-A, 1.2.3] et la théorie de Fourier peut s'appliquer.
- ◇ Le théorème de Maschke : toute sous-représentation possède un supplémentaire stable. La version avec l'orthogonal pour la forme G-invariante est valable uniquement sur $\mathbb{C}$. La version avec les noyaux d'un projecteur G-invariant a l'avantage d'être valable sur tout corps de caractéristique ne divisant pas $|\mathrm{G}|$, voir [CG15, XIII-1.7].
- ◇ La théorie des caractères : le caractère associé à une représentation ρ est la fonction qui envoie g dans G sur la trace $\mathrm{tr}(\rho(g))$. Le lemme de Schur, [CG15, XIII-2.1], en est le point de départ. Il dit qu'un morphisme de sous-représentations irréductibles est soit un isomorphisme soit nul, et (sur $\mathbb{C}$) s'il est un isomorphisme, c'est une homothétie. C'est ce résultat fondamental qui implique que les caractères des sous-représentations irréductibles forment un système orthonormé pour la norme hermitienne G-invariante des fonctions de G vers $\mathbb{C}$, [CG15, XIII-2.5.6]. Mieux ! Si on se restreint aux fonctions constantes sur les classes de conjugaison de G, on montre avec un peu plus d'effort que l'ensemble des caractères irréductibles en forme une base, [CG15, XIII-2.6.1]. Comme corollaire, [CG15, XIII-2.7], le nombre de sous-représentations irréductibles (à isomorphisme près) est égal au nombre de classes de conjugaison : la table de caractères est une matrice carrée !
- ◇ La déconstruction de représentations : la base unitaire des caractères permet alors de comprendre comment une représentation complexe se décompose en représentations irréductibles, à isomorphisme près. En effet, $V \simeq \sum_i m_i V_i$ implique au niveau des caractères $\chi_V = \sum_i m_i \chi_{V_i}$ et $m_i = \langle \chi_V, \chi_{V_i} \rangle$ car la base des χ_{V_i} est unitaire. Comme corollaire, on obtient que si deux représentations possèdent un même caractère, elles sont isomorphes : le caractère caractérise, [CG15, XIII-2.5.7].
- ◇ Savoir construire une table de caractères, utiliser pour cela la somme des carrés des degrés, l'orthogonalité des lignes, la pseudo-orthogonalité des colonnes, voir les annexes de [CG15, XIII]. La connaissance botanique des petits groupes : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (où la table de caractères est une matrice de Vandermonde), D_n, $\mathcal{S}_n$, et $\mathcal{A}_n$, pour $n = 3$, 4, voire 5. Certaines représentations proviennent d'actions de groupe sur l'espace affine (avec des dessins, même s'ils sont moches, c'est pas grave) sur le triangle, le carré, le n-gone, le tétraèdre, voire l'icosaèdre.

1.3. **Quelques questions classiques.**

- ◇ Un groupe abélien fini a toutes ses sous-représentations irréductibles de degré 1. Et réciproquement ? Oui, voir par exemple [CG15, Exercice XIII-E1].
- ◇ Deux groupes ayant la même table de caractères sont isomorphes. Vrai ou faux ? Faux, on a des contre-exemples. Le premier exemple est que la table de caractères de $\mathbb{H}_8$ et de D_4 sont les mêmes alors qu'ils sont non isomorphes, voir [CG15, Exercice XIII-21].
- ◇ Peut-on trouver la table de caractères d'un sous-groupe H à partir de la table des caractères d'un groupe G donné ? En théorie oui : toutes les représentations de G sont dans la représentation régulière de G et comme $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$, la représentation régulière de H est une sous-représentation de la représentation régulière de G, vue comme restriction d'une représentation de G. On a donc toutes les représentations de H dans les représentations de G. Du coup, en pratique, on prend une à une les représentations de G et on regarde leur décomposition en caractères de H, quand l'indice de H est petit, on s'en sort, voir [CG15, Annexe XIII-D].
- ◇ Le lemme de Schur assure que l'ensemble des endomorphismes d'une représentation irréductible est un corps. Est-il nécessairement commutatif ? Oui pour $\mathbb{C}$, puisqu'on obtient les homothéties, et donc le corps $\mathbb{C}$ lui-même. Mais non pour $\mathbb{R}$, voir par exemple [CG15, Exercice XIII-E.13], où l'on trouve le corps des quaternions.
- ◇ Il est indispensable de savoir répondre à la question "Que peut-on lire dans la table de caractères d'un groupe fini G ?" Citons en vrac : le treillis des sous-groupes distingués [CG15, Exercice XIII-E.25], donc en particulier, la simplicité de G (à savoir illustrer sur le groupe simple $\mathcal{A}_5$), le groupe dérivé, [CG15, Exercice XIII-E.26], le centre de G, [CG15, Exercice XIII-E.28], la cyclicité du centre, [CG15, Exercice XIII-E.29], le nombre de racines carrées d'un élément g de G, [CG15, Exercice XIV-A.9].

1.4. **Théorie des représentations sous forme matricielle.** Comprendre la théorie sous forme matricielle permet de percevoir les vrais problèmes de façon tangible. Ici, le groupe G est supposé fini, et l'espace vectoriel V sur lequel G agit linéairement est de dimension finie notée n sur le corps de complexes.

- ◇ Qu'est-ce qu'une représentation d'un groupe fini G ?

  Il s'agit finalement de trouver une famille de matrices $A(g) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ pour tout g dans G, *telles que si $g = hk$, alors $A(g) = A(h)A(k)$.*
- ◇ Qu'est-ce qu'un morphisme de représentations ? Qu'est-ce qu'un automorphisme de représentations ?

  Si V, resp. W, est une représentation de G *de degré n, resp. m, dont le système de matrices associées est $A(g)$, resp. $B(g)$, $g \in \mathrm{G}$, alors un morphisme de représentations entre V et W est une matrice $M \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ telle que pour tout g dans* G, *$MA(g) = B(g)M$. Un automorphisme de la représentation V est une matrice P de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $PA(g)P^{-1} = A(g)$ pour tout g de* G.
- ◇ Qu'est-ce qu'une forme hermitienne G-invariante sur le $\mathbb{C}$-espace V ?

  Il s'agit d'une matrice H dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, à symétrie hermitienne, c'est-à-dire $H^* = H$, telle que $A(g)^*HA(g) = H$ pour tout g de G.
- ◇ Comment voit-on matriciellement une sous-représentation ? Et formuler matriciellement le théorème de Maschke.

  On voit que l'on a une sous-représentation s'il existe une matrice de passage $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $g \in \mathrm{G}$, $PA(g)P^{-1}$ a une structure *triangulaire par blocs :*

$$\begin{pmatrix} B(g) & X(g) \\ 0 & C(g) \end{pmatrix}.$$

Le théorème de Maschke dit qu'il existe une matrice Q de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $QA(g)Q^{-1}$ est diagonale par blocs pour tout g (avec les mêmes tailles de blocs que ci-dessus).

- Que signifie matriciellement la décomposition de V en irréductibles ?
  Cela signifie qu'il existe P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $PA(g)P^{-1}$ est diagonalisable par blocs pour tout g, avec des blocs les plus petits possibles.
- Que dit le théorème de Frobenius-Schur ?
  Si V est irréductible et si $\frac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{g\in\mathrm{G}}\chi_V(g^2) = 1$, alors il existe P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $PA(g)P^{-1}$ est une matrice réelle pour tout g.

2. Exercices

Exercice 1

Montrer que tout groupe fini G admet une représentation fidèle sur tout corps $\Bbbk$.

Exercice 2

Soit G un groupe fini. Soit H un sous-groupe distingué de G. Notons $\pi\colon \mathrm{G} \to {}^{\mathrm{G}}\!/\!_{\mathrm{H}}$ la projection canonique. Soit ρ une représentation complexe de ${}^{\mathrm{G}}\!/\!_{\mathrm{H}}$.

a) Montrer que $\rho\circ\pi$ est une représentation de G.

b) Montrer que ρ est irréductible si et seulement si $\rho\circ\pi$ est irréductible.

Exercice 3

Soient V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, G un groupe et (V,ρ) une représentation de G. On suppose qu'il existe $v \in V$ tel que $\{\rho(g)v \mid g \in \mathrm{G}\}$ forme une base de V.

Montrer que (V,ρ) est isomorphe à la représentation régulière de G.

Exercice 4

Soit $\mathrm{G} = \mathcal{S}_3$ et soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel possédant une base indexée par les éléments de G. Considérons l'application $T\colon \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(V)$ définie par

$$T(g)(e_\tau) = e_{g\tau g^{-1}}.$$

a) Montrer que T est une représentation de G.

b) Soit j une racine cubique primitive de 1. Soit W le sous-espace de V dont une base est

$$\alpha = e_{(1\,2)} + je_{(1\,3)} + j^2 e_{(2\,3)} \qquad\qquad \beta = e_{(1\,2)} + j^2 e_{(1\,3)} + je_{(2\,3)}$$

Montrer que W est une sous-G-représentation de V. W est-il irréductible ?

c) Déterminer la décomposition de V en somme directe de sous-espaces irréductibles et expliciter l'action de G sur chacun de ses sous-espaces.

Exercice 5

Soit p un nombre premier. Soit $\Bbbk$ un corps algébriquement clos de caractéristique différente de p. Soit G un p-groupe.

Montrer que G possède une représentation non triviale de dimension 1 sur $\Bbbk$.

Exercice 6

Soit G un groupe fini et soit χ un caractère de G vérifiant

$$\forall\, g \in \mathrm{G} \qquad g \neq 1 \Rightarrow \chi(g) = 0.$$

Montrer que χ est un multiple entier du caractère de la représentation régulière de G.

Exercice 7

Soit $\mathbb{H}_8 := \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ le groupe des quaternions. Ecrire la table de caractères de $\mathbb{H}_8$ et décrire les représentations irréductibles.

Indication : On rappelle que $\mathbb{H}_8$ s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$ en posant : $I = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ et $K = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$.

Exercice 8

Décrire les représentations irréductibles du groupe symétrique $\mathcal{S}_3$ et écrire sa table de caractères.

Exercice 9 [Table de caractères du groupe symétrique $\mathcal{S}_4$]

a) Décrire les représentations irréductibles de $\mathcal{S}_4$ et dresser sa table des caractères.

b) Déterminer les sous-groupes distingués de $\mathcal{S}_4$ à partir de sa table des caractères.

c) On rappelle que $\mathcal{S}_4$ s'identifie au groupe des isométries directes d'un cube (ou d'un octaèdre) et également au groupe des isométries (directes et indirectes) d'un tétraèdre. Que pensez-vous des représentations de dimension 3 associées ?

Exercice 10

Décrire les représentations irréductibles du groupe $\mathcal{A}_4$ et écrire sa table de caractères.

Exercice 11

Soit G un groupe fini. Soit H un sous-groupe de G. Soit π une représentation de G de caractère χ.

a) Montrer que la restriction de π à H a pour caractère la restriction $\chi_{|\mathrm{H}}$.

b) Si π est irréductible, est-ce que $\chi_{|\mathrm{H}}$ est un caractère irréductible ?

Exercice 12

Soit G un groupe fini. Soit H un sous-groupe de G. Soit (π, V) une représentation de H. On pose

$$W = \big\{ f\colon \mathrm{G} \to V \,|\, \forall\, x \in \mathrm{G}\, \forall\, h \in H \quad f(hx) = \pi(h) f(x) \big\}$$

avec une action de G donnée par $g(f)\colon x \mapsto f(xg)$.

a) Montrer que W est une représentation de G. Quelle est sa dimension ?

b) Si π est irréductible, W est-elle une représentation irréductible de G ?

Exercice 13 [Représentations et sous-groupes distingués, Peyre, l'algèbre discrète de la transformée de Fourier, pages 231-232]

Soit G un groupe fini dont e_{G} est l'élément neutre. Soient ρ_1, ρ_2, …, ρ_r un ensemble de représentants des classes d'isomorphies de représentations irréductibles. Soient χ_1, χ_2, …, χ_r les caractères irréductibles associés. Posons

$$K_{\chi_i} = \left\{g \in \mathrm{G} \,|\, \chi_i(g) = \chi_i(e_{\mathrm{G}})\right\}$$

a) Soit $\rho\colon \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation de caractère χ_V sur un espace V de dimension d. Soit g un élément d'ordre k de G. Alors
   (i) $\rho(g)$ est diagonalisable ;
   (ii) χ_V est somme de $\chi_V(1) = \dim V = d$ racines $k$ième de l'unité ;
   (iii) $|\chi_V(g)| \leq \chi_V(e_{\mathrm{G}}) = d$;
   (iv) $K_{\chi_V} = \left\{x \in \mathrm{G}, |\, \chi_V(x) = \chi_V(e_{\mathrm{G}})\right\}$ est un sous-groupe distingué de G. On l'appelle noyau de la représentation.

b) Soit $N \triangleleft \mathrm{G}$ un sous-groupe distingué de G. Soit ρ_U une représentation de ${}^{\mathrm{G}}\!/\!_{\mathrm{N}}$ sur un espace vectoriel U.

   Il existe une représentation canonique de G sur U telle que les sous-représentations de U sous l'action de ${}^{\mathrm{G}}\!/\!_{\mathrm{N}}$ soient exactement celles de U sous l'action de G.

c) Soit V un espace vectoriel de dimension égale à l'ordre de G. Soit $(b_t)_{t\in\mathrm{G}}$ une base de V. La représentation régulière de G est la représentation

$$\begin{array}{rcl} \rho_{\mathrm{reg}}\colon \mathrm{G} & \to & \mathrm{GL}(V) \\ g & \mapsto & \rho_{\mathrm{reg}}(g)\colon V \to V \\ & & \qquad\qquad b_t \mapsto b_{gt} \end{array}$$

   Soit $\rho\colon \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation de G. La représentation est fidèle si ρ est injectif.

   Montrer que la représentation régulière est fidèle.

d) Montrer que les sous-groupes distingués de G sont les

$$\bigcap_{i\in I} K_{\chi_i}$$

   où $I \subset \{1, 2, 3, \ldots, r\}$.

e) Montrer que G est simple si et seulement si

$$\forall\, i \neq 1, \forall\, g \in \mathrm{G} \qquad \chi_i(g) \neq \chi_i(e_{\mathrm{G}}).$$

Exercice 14

Le but de cet exercice est de montrer que le centre du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est le groupe des homothéties.

Une représentation ρ du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est donnée par son action naturelle sur $\mathbb{C}^n$.

(1) Montrer que la représentation ρ est irréductible.

(2) Montrer que tout élément du centre de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un morphisme de la représentation ρ, *i.e.* montrer que pour tout élément h du centre et pour tout élément M de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ on a

$$\rho(M) \circ h = Mh = hM = h \circ \rho(M).$$

(3) Conclure en utilisant le Lemme de Schur.

Exercice 15

Soit G un groupe abélien.

(1) Si $\rho\colon \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation de G, montrer que tout élément G de G définit un G-morphisme $V \to V$.

(2) En déduire que toute représentation irréductible de G est de dimension 1.

(3) Donner toutes les représentations irréductibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 16

Soit G un groupe fini. Soit H un sous-groupe abélien de G.

Montrer que toute représentation irréductible de G est de dimension au plus $[\mathrm{G} : \mathrm{H}]$.

Indication : si V est une représentation irréductible de G*, c'est aussi une représentation de* H*. On pourra considérer la représentation de* G *engendrée par une sous-représentation de* H*.*

Exercice 17

Montrer que tout groupe non abélien admet une représentation irréductible de dimension > 1.

Exercice 18

Montrer que si V est une représentation d'un groupe fini vérifiant $\langle \chi_V, \chi_V\rangle = 2$, alors V est somme de deux représentations irréductibles.

Exercice 19

Soit V une représentation de degré fini d'un groupe G (non nécessairement fini).

(1) On suppose qu'il existe une forme hermitienne H sur V invariante par G, c'est-à-dire

$$H(u, v) = H(g \cdot u, g \cdot v) \qquad \forall\, u,\, v \in V \quad \forall\, g \in \mathrm{G}.$$

Montrer que toute sous-représentation de V admet une sous-représentation supplémentaire.

(2) Montrer que si G est fini, alors il existe toujours une telle forme hermitienne G-invariante.

(3) On suppose V irréductible. Montrer que deux formes hermitiennes G-invariantes sont multiples l'une de l'autre (c'est-à-dire $H_1 = \mu H_2$).

Exercice 20

Soient p un nombre premier et G un groupe d'ordre p^3 non abélien. On note $\mathbb{U}_p = \{z \in \mathbb{C} \mid z^p = 1\}$.

(1) Montrer que les représentations irréductibles de G ont dimension 1 ou p. Que peut-on dire du nombre des représentations de G dans $\mathbb{C}$?

(2) Montrer que le nombre de classes d'isomorphie de représentations irréductibles de dimension p de G est $p - 1$ et donner l'ordre de l'abélianisé de G.

Soit $g \in \mathrm{G} \smallsetminus D(\mathrm{G})$.

(3) Montrer que pour tout $\zeta \in \mathbb{U}_p$ il existe une représentation V de dimension 1 de G telle que $\chi_V(g) = \zeta$.

(4) Déduire de ce qui précède et du fait que si G est un groupe fini le produit d'un caractère irréductible de G par un caractère de degré 1 est un caractère irréductible de G de même degré que si V est une représentation irréductible de dimension p de G, alors $\chi_V(g) = 0$.

(5) Montrer que si V est une représentation de G de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$) alors l'un des nombres $\chi_V(g)$, $\chi_V(g^2)$, …, $\chi_V(g^n)$ est non nul (on pourra considérer la somme $\sum_{\lambda} C(\lambda)$, où C désigne le polynôme caractéristique de $v \cdot gv$, et λ parcourt ses n valeurs propres).

(6) Déduire des questions 4. et 5. que l'abélianisé de G n'est pas cyclique. à quel groupe est-il isomorphe ?

(7) Montrer à l'aide de la question 4. que si $g' \in D(\mathrm{G})$ et si (V, ρ) est une représentation irréductible de G alors $|\chi_V(g')| = \dim V$. Préciser les endomorphismes $\rho(g')$ pour g' parcourant $D(\mathrm{G})$.

(8) Décrire le centre de G et donner le cardinal des différentes classes de conjugaison de G.

(9) Donner explicitement la table des caractères de G lorsque $p = 3$.

Exercice 21

(1) Soit G un groupe abélien fini. Pour $g \in \mathrm{G}$ notons δ_g l'élément de $\mathbb{C}[\mathrm{G}]$ qui vaut 1 en g et 0 sur $\mathrm{G} \setminus \{g\}$.
   a) Énoncer la formule d'inversion de Fourier et l'appliquer aux éléments δ_g de $\mathbb{C}[\mathrm{G}]$.
   b) En déduire que le morphisme naturel de G dans son bidual $\widehat{\widehat{\mathrm{G}}}$ est injectif.

(2) Soit V une représentation d'un groupe fini G qui est somme directe de r représentations irréductibles deux à deux non isomorphes.
   a) Décrire l'algèbre $\mathrm{End}_{\mathrm{G}}(V)$ des G-endomorphismes de V.
   b) Déterminer toutes les sous–représentations de V.

(3) Soit G un groupe fini. Montrer que le produit d'un caractère irréductible de G par un caractère de degré 1 est un caractère irréductible de G de même degré.

Références

[CG15] P. Caldero and J. Germoni. *Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries-Tome 2.* Calvage et Mounet, 2015.