DEVOIR n° 1

Exercice 1 Soit G un groupe fini dont tout sous-groupe propre est cyclique.

1. G est-il nécessairement cyclique, abélien ?
2. Si G est de plus supposé abélien, G est-il cyclique ?

Exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier. Soit G un groupe d'ordre n. Soit p un diviseur premier de n.

1. Montrer que G a au plus $\frac{n-1}{p-1}$ sous-groupes d'ordre p.
2. Donner un exemple où on a exactement $\frac{n-1}{p-1}$ sous-groupes d'ordre p.

Exercice 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Donner un élément d'ordre n de $\mathcal{S}_n$.
2. Soit $\mathrm{H} \triangleleft \mathcal{S}_n$ un sous-groupe distingué de $\mathcal{S}_n$ contenant une transposition. Montrer que $\mathrm{H} = \mathcal{S}_n$.

Exercice 4 Pour tout entier $n \geqslant 5$, le groupe alterné $\mathcal{A}_n$ est simple. Dans l'exercice qui suit nous montrons que parmi les groupes à 60 éléments la simplicité caractérise $\mathcal{A}_5$.

Soit G un groupe simple à 60 éléments. Nous allons montrer que G est isomorphe à $\mathcal{A}_5$.

1. Montrer que le groupe $\mathcal{A}_5$ est simple (Indication : penser à dénombrer).
2. Montrer que G possède exactement six sous-groupes d'ordre 5.
3. Désignons par X l'ensemble des 5-Sylow de G. Construire un morphisme injectif φ de G dans le groupe des permutations de X.
4. Montrer que $\varphi(\mathrm{G}) \subset \mathcal{A}_X$ (où $\mathcal{A}_X$ désigne l'ensemble des permutations de X de signature 1).
5. Notons $E = {}^{\mathcal{A}_X}\!/_{\varphi(\mathrm{G})}$ l'ensemble des classes à gauche. On définit un morphisme ψ de $\mathcal{A}_X$ dans $\mathcal{S}_E$ de la manière suivante

$$\begin{array}{rcl} \psi\colon \mathcal{A}_X & \to & \mathcal{S}_E \\ x & \mapsto & \psi_x\colon E \to E \\ & & \quad a\varphi(\mathrm{G}) \mapsto xa\varphi(\mathrm{G}) \end{array}$$

   Montrer que ψ est injectif. Conclure que G est isomorphe à $\mathcal{A}_5$.

Exercice 5

1. Lemme de Cauchy. Soit G un groupe fini ; notons e son élément neutre. Soit p un nombre premier qui divise $|\mathrm{G}|$. Définissons l'ensemble

$$E = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathrm{G}^p \mid x_1 x_2 \dots x_p = e\right\}.$$

   En faisant agit ${}^{\mathbb{Z}}\!/_{p\mathbb{Z}}$ sur E montrer que G possède un élément d'ordre p.

   Supposons jusqu'à la fin de l'exercice que $\mathrm{Aut}(\mathrm{G})$ agit transitivement sur l'ensemble $\mathrm{G} \setminus \{e\}$.
2. Montrer que G est un p-groupe, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel n tel que $|\mathrm{G}| = p^n$.
3. Montrer que le centre de G est non trivial.
4. Conclure que $\mathrm{G} \simeq \left({}^{\mathbb{Z}}\!/_{p\mathbb{Z}}\right)^n$.