Feuille d'exercices n° 1

Exercice 1

Donner un exemple de groupe non abélien.

Exercice 2

Donner un exemple de groupe contenant exactement 3 éléments.

Exercice 3

Donner un exemple de groupe cyclique, préciser l'ensemble et la loi, et expliciter un générateur.

Exercice 4

Donner un exemple de groupe abélien, fini et non cyclique, préciser l'ensemble et la loi.

Exercice 5

Donner un exemple de groupe infini monogène, préciser l'ensemble et la loi, et expliciter un générateur.

Exercice 6

Donner un exemple de groupe abélien, infini, non monogène, préciser l'ensemble et la loi.

Exercice 7

Donner un exemple de groupe fini, non abélien, préciser l'ensemble et la loi, et expliciter deux éléments qui ne commutent pas.

Exercice 8

Donner un exemple de groupe infini, non abélien, préciser l'ensemble et la loi, et expliciter deux éléments qui ne commutent pas.

Exercice 9

Répondre par vrai ou faux en donnant suivant les cas un court argument ou un contre-exemple :

1. Si G est un groupe cyclique, il existe $n \geqslant 1$ tel que G soit isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: vrai ou faux ?
2. Il existe un groupe d'ordre 6 qui ne contient aucun élément d'ordre 6 : vrai ou faux ?
3. Il existe un élément d'ordre 4 dans le groupe $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$: vrai ou faux ?
4. Il existe un groupe infini dont tous les éléments sont d'ordre fini : vrai ou faux ?
5. Une relation sur un ensemble X qui est symétrique et transitive est automatiquement réflexive : vrai ou faux ?

Exercice 10

1. Le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est un exemple de groupe fini, abélien et non cyclique : vrai ou faux ?
2. Il existe deux groupes d'ordre 4 non isomorphes : vrai ou faux ?
3. Il existe exactement quatre éléments d'ordre 2 dans le groupe $\mathrm{Isom}(R)$ des isométries du plan préservant un rectangle (non carré) R : vrai ou faux ?
4. Tous les sous-groupes du groupe symétrique $\mathcal{S}_3$ sont distingués : vrai ou faux ?
5. Le groupe symétrique $\mathcal{S}_{10}$ contient au moins un élément d'ordre 30 : vrai ou faux ?

Exercice 11

Justifier en une ou deux phrases chacune des réponses :

1. Donner la liste des éléments d'ordre 4 dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ des complexes non nuls.
2. Donner un exemple de polygone P tel que le groupe $\mathrm{Isom}(P)$ des isométries du plan préservant P soit d'ordre 4.
3. Donner un exemple d'élément d'ordre 4 dans le groupe alterné $\mathcal{A}_8$.
4. Donner un isomorphisme entre le groupe $\mathrm{Isom}(T)$ des isométries du plan préservant un triangle équilatéral et le groupe symétrique $\mathcal{S}_3$.
5. Donner un exemple de groupe contenant à la fois des éléments d'ordre fini en plus du neutre.

Exercice 12

Soit T un triangle équilatéral de sommets A, B et C et soit $\mathrm{Isom}(T) = \{\mathrm{id},\, s_A,\, s_B,\, s_C,\, r_{\frac{2\pi}{3}},\, r_{-\frac{2\pi}{3}}\}$ le groupe des isométries du plan préservant ce triangle.

Si $\mathrm{H} = \{\mathrm{id},\, s_A\}$, donner un exemple d'élément $g \in \mathrm{Isom}(T)$ tel que les classes à gauche et à droite de g soient distinctes, *i.e.* $g\mathrm{H} \neq \mathrm{H}g$.

Exercice 13

Quelles sont les implications correctes ?

1. Si G est un groupe abélien, alors G est cyclique.
2. Si G est un groupe cyclique, alors G est abélien.
3. Si G est d'ordre p, avec p un nombre premier, alors G est cyclique.
4. Si G est d'ordre fini et cyclique, alors G est d'ordre premier.

Exercice 14

Soit G un groupe. Soient a, b deux éléments de G d'ordre fini. Le groupe engendré par a et b est-il fini ?