# Feuille d'exercices n$^{\rm o}$ 1

**Exercice 1**

Donner un exemple de groupe non abélien.

**Solution 1**

Le groupe $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ des matrices inversibles à coefficients réels n'est pas abélien. En effet

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mais

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Un autre exemple était donné par le groupe $\mathrm{Isom}(T)$ des isométries du plan préservant un triangle équilatéral ou encore par le groupe symétrique $\mathcal{S}_3$, c'est-à-dire le groupe contenant les six bijections de l'ensemble $\{1,\, 2,\, 3\}$.

**Exercice 2**

Donner un exemple de groupe contenant exactement 3 éléments.

**Solution 2**

Le groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ des entiers modulo 3 muni de l'addition. En effet $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\overline{0},\, \overline{1},\, \overline{2}\}$.

Un autre exemple est donné par le groupe des rotations préservant un triangle équilatéral

$$\mathrm{Isom}^+(T) = \{\mathrm{id},\, r_{2\pi/3},\, r_{-2\pi/3}\}$$

ou encore le groupe

$$\mu_3 = \left\{1,\, \exp\left(\frac{2\mathbf{i}\pi}{3}\right),\, \exp\left(-\frac{2\mathbf{i}\pi}{3}\right)\right\}$$

des racines cubiques de l'unité.

**Exercice 3**

Donner un exemple de groupe cyclique, préciser l'ensemble et la loi, et expliciter un générateur.

**Solution 3**

Le groupe multiplicatif $\mu_n \subset \mathbb{C}^*$ des racines $n$ièmes de l'unité ; par exemple $\mu_3 = \{1,\, \mathrm{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{3}},\, \mathrm{e}^{\frac{4\mathbf{i}\pi}{3}}\}$, engendré par $\mathrm{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{3}}$.

**Exercice 4**

Donner un exemple de groupe abélien, fini et non cyclique, préciser l'ensemble et la loi.

**Solution 4**

Le groupe additif $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est un exemple de groupe abélien, fini et non cyclique.

Le groupe des isométries d'un rectangle est un exemple de groupe abélien, fini et non cyclique (il est en fait isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

**Exercice 5**

Donner un exemple de groupe infini monogène, préciser l'ensemble et la loi, et expliciter un générateur.

**Solution 5**

Le groupe additif $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs est un exemple de groupe infini monogène (c'est en fait le seul à isomorphisme près) ; 1 est un générateur.

**Exercice 6**

Donner un exemple de groupe abélien, infini, non monogène, préciser l'ensemble et la loi.

**Solution 6**

Le groupe multiplicatif $\mathbb{R}^*$ est un exemple de groupe abélien, infini, non monogène ; les groupes additifs $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ en sont d'autres.

**Exercice 7**

Donner un exemple de groupe fini, non abélien, préciser l'ensemble et la loi, et expliciter deux éléments qui ne commutent pas.

**Solution 7** Rappelons que $\mathbb{H}_8 = \{1,\,-1,\,i,\,-i,\,j,\,-j,\,k,\,-k\}$ est le groupe des quaternions. La multiplication est définie par la règle des signes et les formules

$$i^2=j^2=k^2=-1 \qquad ij=-ji=k \qquad jk=-kj=i \qquad ki=-ik=j$$

Le groupe ainsi obtenu est non abélien : $ij=-ji$. Plus précisément le groupe des quaternions est l'un des deux groupes non abéliens d'ordre 8.

L'ensemble $\mathcal{S}_3$ muni de la composition est un groupe fini, non abélien ; nous avons

$$(1\ 2\ 3)=(1\ 2)(2\ 3)\neq(2\ 3)(1\ 2)=(1\ 3\ 2)$$

**Exercice 8**

Donner un exemple de groupe infini, non abélien, préciser l'ensemble et la loi, et expliciter deux éléments qui ne commutent pas.

**Solution 8**

Le groupe $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ des matrices inversibles $2\times 2$ à coefficients réels est un exemple de groupe infini non abélien. Par exemple

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}$$

mais

$$\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\0&1\end{pmatrix}.$$

**Exercice 9**

Répondre par vrai ou faux en donnant suivant les cas un court argument ou un contre-exemple :

1. Si G est un groupe cyclique, il existe $n\geqslant 1$ tel que G soit isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ : vrai ou faux ?
2. Il existe un groupe d'ordre 6 qui ne contient aucun élément d'ordre 6 : vrai ou faux ?
3. Il existe un élément d'ordre 4 dans le groupe $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ : vrai ou faux ?
4. Il existe un groupe infini dont tous les éléments sont d'ordre fini : vrai ou faux ?
5. Une relation sur un ensemble $X$ qui est symétrique et transitive est automatiquement réflexive : vrai ou faux ?

**Solution 9**

1. Vrai. Si G est un groupe cyclique, par définition il existe $g\in\mathrm{G}$ et $n\geqslant 1$ tel que $\mathrm{G}=\langle g\rangle=\{1,\,g,\,g^2,\,\ldots,\,g^{n-1}\}$. Alors l'application

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\to\mathrm{G}, \qquad \overline{a}\mapsto g^a$$

est un isomorphisme.

2. Vrai. Le groupe $\mathrm{Isom}(T)$ des isométries préservant un triangle équilatéral est d'ordre 6 mais ne contient aucun élément d'ordre 6. Le groupe $\mathcal{S}_3$ est d'ordre 6 mais ne contient aucun élément d'ordre 6.
3. Vrai. Par exemple la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ correspond à une rotation d'un quart de tour, et on vérifie que $M^2 = -\mathrm{id}$, $M^3 = -M$ et $M^4 = \mathrm{id}$.
4. Vrai. Il existe des groupes infinis dont tous les éléments sont d'ordre fini, par exemple le groupe additif $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Un autre exemple est le groupe multiplicatif $\mu_\infty \subset \mathbb{C}^*$ de toutes les racines de l'unité de n'importe quel ordre.
5. Faux. Donnons un contre-exemple. Soit $X = \{0, 1\}$. Considérons la relation $\sim$ donnée par $1 \sim 1$ mais $1 \not\sim 0$, $0 \not\sim 1$ et $0 \not\sim 0$. Cette relation est symétrique ($x \sim y$ implique $y \sim x$) et transitive ($x \sim y$ et $y \sim z$ impliquent $x \sim z$) mais pas réflexive (0 n'est pas en relation avec lui même).

**Exercice 10**

1. Le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est un exemple de groupe fini, abélien et non cyclique : vrai ou faux ?
2. Il existe deux groupes d'ordre 4 non isomorphes : vrai ou faux ?
3. Il existe exactement quatre éléments d'ordre 2 dans le groupe $\mathrm{Isom}(R)$ des isométries du plan préservant un rectangle (non carré) $R$ : vrai ou faux ?
4. Tous les sous-groupes du groupe symétrique $\mathcal{S}_3$ sont distingués : vrai ou faux ?
5. Le groupe symétrique $\mathcal{S}_{10}$ contient au moins un élément d'ordre 30 : vrai ou faux ?

**Solution 10**

1. Faux : le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est cyclique engendré par exemple par $(\bar{1}, \hat{1})$ : c'est un cas particulier du lemme chinois.
2. Vrai : les groupes $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sont tous deux d'ordre 4 mais non isomorphes. En effet $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est non cyclique car il contient seulement des éléments d'ordre 2 à part le neutre.
3. Faux : il n'y en a que trois qui sont la symétrie centrale (que l'on peut aussi voir comme une rotation d'angle $\pi$), et les deux symétries axiales par rapport aux droites passant par des milieux des côtés opposés. Le dernier élément du groupe est id qui est d'ordre 1.
4. Faux : le sous-groupe $\mathrm{H} = \{\mathrm{id}, (1\ 2)\}$ n'est pas distingué dans $\mathcal{S}_3$ :
$$(1\ 3) \circ (1\ 2) \circ (1\ 3)^{-1} = (3\ 2)$$
5. Vrai : $(1\ 2)(3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8\ 9\ 10)$ convient car $30 = \mathrm{ppcm}(2, 3, 5)$.

**Exercice 11**

Justifier en une ou deux phrases chacune des réponses :

1. Donner la liste des éléments d'ordre 4 dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ des complexes non nuls.
2. Donner un exemple de polygone $P$ tel que le groupe $\mathrm{Isom}(P)$ des isométries du plan préservant $P$ soit d'ordre 4.
3. Donner un exemple d'élément d'ordre 4 dans le groupe alterné $\mathcal{A}_8$.
4. Donner un isomorphisme entre le groupe $\mathrm{Isom}(T)$ des isométries du plan préservant un triangle équilatéral et le groupe symétrique $\mathcal{S}_3$.
5. Donner un exemple de groupe contenant à la fois des éléments d'ordre fini non triviaux et des éléments d'ordre infini.

**Solution 11**

1. $\mathbf{i}$ et $-\mathbf{i}$ sont les éléments d'ordre 4 dans $\mathbb{C}^*$. Les deux autres racines 4ièmes de l'unité, qui sont 1 et $-1$, sont d'ordre 1 et 2 respectivement.
2. On peut prendre $P$ un rectangle (non carré) ou encore un losange (non carré également). Dans le cas d'un rectangle le groupe $\mathrm{Isom}(P)$ contient l'identité, la symétrie centrale et les deux symétries axiales pour les deux droites passant par les milieux de côtés opposés.

3. La permutation $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8)$ est d'ordre 4, de signature 1 car se factorise à l'aide de six transpositions : $\sigma = (1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)(5\ 6)(6\ 7)(7\ 8)$
4. En numérotant $p_1$, $p_2$ et $p_3$ les sommets du triangle et en posant
$$\phi\colon \mathrm{Isom}(T) \to \mathcal{S}_3, \qquad f \mapsto \sigma$$
tel que $f(p_i) = p_{\sigma(i)}$, on obtient l'isomorphisme attendu.
5. Le groupe $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^*$ des complexes de module 1, pour la multiplication, convient : un élément $e^{\mathbf{i}\theta}$ est d'ordre fini si et seulement si $\theta = 2\pi\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{Q}$.
Un autre exemple est donné par le produit direct de $\mathcal{S}_3$ avec $\mathbb{Z}$ : un élément $(\sigma, n) \in \mathcal{S}_3 \times \mathbb{Z}$ est d'ordre fini si et seulement si $n = 0$.

**Exercice 12**
Soit $T$ un triangle équilatéral de sommets $A$, $B$ et $C$ et soit $\mathrm{Isom}(T) = \{\mathrm{id},\, s_A,\, s_B,\, s_C,\, r_{\frac{2\pi}{3}},\, r_{-\frac{2\pi}{3}}\}$ le groupe des isométries du plan préservant ce triangle.
Si $\mathrm{H} = \{\mathrm{id},\, s_A\}$, donner un exemple d'élément $g \in \mathrm{Isom}(T)$ tel que les classes à gauche et à droite de $g$ soient distinctes, *i.e.* $g\mathrm{H} \neq \mathrm{H}g$.

**Solution 12**
Par exemple $g = s_B$ convient car
$$s_B\mathrm{H} = \{s_B,\, s_B \circ s_A\}, \qquad \mathrm{H}s_B = \{s_B,\, s_A \circ s_B\}$$
et $s_B \circ s_A \neq s_A \circ s_B$ sont deux rotations d'angles opposés.
Notons que le choix de $g$ n'est pas unique : $g = s_C$, $g = r_{2\pi/3}$ ou $g = r_{-2\pi/3}$ convient aussi.

**Exercice 13**
Quelles sont les assertions correctes ?
1. Si G est un groupe abélien, alors G est cyclique.
2. Si G est un groupe cyclique, alors G est abélien.
3. Si G est d'ordre $p$, avec $p$ un nombre premier, alors G est cyclique.
4. Si G est d'ordre fini et cyclique, alors G est d'ordre premier.

**Solution 13**
Les assertions correctes sont :
2. Si G est un groupe cyclique, alors G est abélien ; en effet si G est cyclique, il existe $g \in \mathrm{G}$ tel que $\mathrm{G} = \langle g \rangle$. Soient $a$ et $b$ dans G, ils s'écrivent aussi $g^\ell$ et $g^k$, $\ell$, $k \in \mathbb{Z}$ et
$$ab = g^\ell g^k = g^{\ell+k} = g^{k+\ell} = g^k g^\ell = ba.$$
3. Si G est d'ordre $p$, avec $p$ un nombre premier, alors G est cyclique. En effet soit $g \in \mathrm{G} \setminus \{e\}$. Le théorème de Lagrange assure que l'ordre de $g$ divise $p$. Puisque $p$ est premier, l'ordre de $g$ est $p$ et $g$ est un générateur de G.

Remarque sur le 1. : l'assertion est fausse, considérons par exemple $\mathrm{G} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, c'est un groupe abélien, non cyclique.

Remarque sur le 4. : l'assertion est fausse, considérons par exemple $\mathrm{G} = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, c'est un groupe d'ordre fini et cyclique mais 4 n'est pas premier.

**Exercice 14**
Soit G un groupe. Soient $a$, $b$ deux éléments de G d'ordre fini. Le groupe engendré par $a$ et $b$ est-il fini ?

**Solution 14**
Non. Considérons par exemple le groupe G des permutations de $\mathbb{Z}$ engendré par $f(x) = -x$ et $g(x) = 1 - x$. Alors $f \circ f = \mathrm{id}$, $g \circ g = \mathrm{id}$ mais $f \circ g\colon x \mapsto x - 1$ donc $(f \circ g)^n\colon x \mapsto x - n$. Le groupe G contient donc tous les éléments de la forme $x \mapsto x - n$ avec $n$ dans $\mathbb{Z}$. En particulier il est infini.