Feuille d'exercices n° 2

Exercice 1

Soit G un groupe. Soient H et K deux sous-groupes de G.

Montrer que $\mathrm{H} \cup \mathrm{K}$ est un sous-groupe de G si et seulement si $\mathrm{H} \subset \mathrm{K}$ ou $\mathrm{K} \subset \mathrm{H}$.

En déduire qu'un groupe n'est jamais la réunion de deux de ses sous-groupes propres.

Exercice 2

Soit G un groupe abélien fini d'ordre k. Soit n un entier premier avec k. Montrer que pour tout élément g de G il existe un élément h de G tel que $g = h^n$.

(Indication : considérer l'application $\varphi\colon \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ définie par $\varphi(h) = h^n$ et montrer que φ est un isomorphisme de G).

Exercice 3

Montrer de la façon la plus élémentaire possible que tout groupe d'ordre 4 est abélien (Indication : utiliser le théorème de Lagrange).

Exercice 4

1. Montrer qu'une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$ est dans $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ si et seulement si elle a pour déterminant 1 ou -1.
2. Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer l'ordre de A, l'ordre de B et l'ordre de AB.

Exercice 5

Montrer que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ n'est pas monogène.

Exercice 6

Montrer que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 7

Montrer qu'un groupe est fini si et seulement si il n'a qu'un nombre fini de sous-groupes.

Exercice 8

Donner un exemple de groupe et de sous-groupes dont la réunion n'est pas un sous-groupe.

Exercice 9

Dans les groupes suivants, donner un exemple d'élément d'ordre 4 s'il en existe, sinon donner un argument pour justifier qu'il n'y en a pas :

(a) le groupe linéaire $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$;
(b) le groupe alterné $\mathcal{A}_8$;
(c) le groupe $\mathrm{Isom}^+(T) \subset \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ des rotations de $\mathbb{R}^3$ préservant un tétraèdre régulier T ;
(d) un groupe d'ordre 16 quelconque (attention il s'agit de déterminer si *tout* sous-groupe d'ordre 16 admet un élément d'ordre 4).

Exercice 10

a) Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ non réduit à $\{0\}$. Montrer que G est ou bien dense dans $\mathbb{R}$, ou bien monogène, *i.e.* de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a > 0$ (donc discret).

b) Soient α et β deux réels non nuls. Discuter de la nature du sous-groupe additif qu'ils engendrent.

c) Soit $\beta \notin \mathbb{Q}$. Montrer que $\mathbb{N}\beta + \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

d) Soit $\vartheta \notin 2\pi\mathbb{Q}$. Montrer que $\{\exp(\mathbf{i}n\vartheta) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans le cercle unité $\mathbb{S}^1$ de $\mathbb{C}$.
En déduire
   i) qu'un sous-groupe G de $\mathbb{S}^1$ est soit fini (auquel cas égal au groupe des racines $n$ièmes de l'unité où $n = |\mathrm{G}|$), soit dense dans $\mathbb{S}^1$;
   ii) les valeurs d'adhérence de la suite $(\sin(n))_{n\geqslant 0}$.

Exercice 11

Montrer que si $n \geqslant 2$, le seul sous-groupe fini de $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ de cardinal n est le groupe μ_n des racines $n$ième de l'unité.

Exercice 12

Soit $p > 2$ un nombre premier. Soit G un groupe non abélien d'ordre $2p$.

(1) Montrer qu'il existe x, y dans G avec d'ordre 2, y d'ordre p et $\mathrm{G} = \langle x, y\rangle$.

(2) Montrer que $xyx = y^i$ pour un certain $2 \leqslant i \leqslant p-1$, puis montrer que $i^2 \equiv 1 \bmod p$, et en déduire que $i = p-1$.

(3) Montrer que G est isomorphe au groupe diédral D_{2p}.

Exercice 13

Notons $\mathrm{T} \subset \mathrm{GL}\left(3, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\right)$ le sous-groupe des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec a, b et c dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(1) Montrer que tout élément non trivial de T est d'ordre 3.

(2) Le groupe T est-il isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$?

(3) En quoi cet exemple est-il intéressant ?