# Feuille d'exercices n° 3

**Exercice 1**
Soient $\Bbbk$ un corps et $G \subset GL(2, \Bbbk)$ le sous-groupe des matrices $2 \times 2$ triangulaires supérieures. Déterminer si chacune des conditions suivantes définit un sous-groupe distingué de G, et si oui, utiliser le théorème d'isomorphisme pour identifier le quotient :
(i) $a_{11} = 1$ ;
(ii) $a_{12} = 0$ ;
(iii) $a_{11} = a_{22}$ ;
(iv) $a_{11} = a_{22} = 1$.

**Exercice 2** Soient $n \geqslant 2$ un entier et $d \geqslant 1$ un diviseur de $n$. Montrer que le groupe cyclique $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ contient un unique sous-groupe d'ordre $d$. Est-il vrai que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ contient un unique élément d'ordre $d$ ? (Commencer par expliciter les réponses dans le cas particulier $n = 6$, $d = 3$).

**Exercice 3** On se propose de montrer que le groupe alterné $\mathcal{A}_4$ ne contient aucun sous-groupe d'ordre 6.
(1) En général, montrer que si $H \subset G$ est un sous-groupe d'indice 2, alors H est distingué dans G.
(2) Rappeler la liste des classes de conjugaison de $\mathcal{A}_4$ et leurs cardinaux.
(3) Conclure.

**Exercice 4**
Soit $GL\left(2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)$ le groupe des matrices inversibles $2 \times 2$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

1. Quel est l'ordre de $GL\left(2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)$ ?
2. Soit $E$ un espace vectoriel de dimension 2 sur le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Définir une action non triviale de $GL\left(2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)$ sur $E$.
3. En déduire que $GL\left(2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)$ est isomorphe au groupe $\mathcal{S}_3$ des permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.

**Exercice 5**
Soit $p$ un nombre premier. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Soient G un groupe d'ordre $p^n$ et $Z(G)$ son centre. Considérons un sous-groupe distingué H de G non trivial.

1. Montrer que $H \cap Z(G) \neq \{e\}$.
2. Montrer que l'ordre de $Z(G)$ est $> 1$.

Indication : faire agir G par conjugaison sur H.

**Exercice 6**
Soient G un groupe fini et $Z(G)$ son centre. Considérons l'action de G sur lui-même par conjugaison.

1. Supposons G non abélien. Soit $g$ un élément de $G \setminus Z(G)$ ; notons $\mathrm{Stab}(g)$ le stabilisateur de $g$. Montrer que $Z(G) \subset \mathrm{Stab}(g) \subset G$ (les inclusions sont strictes).
2. En déduire que si G n'est pas abélien, alors $Z(G)$ est un sous-groupe de G dont l'indice est strictement supérieur au plus petit nombre premier divisant l'ordre $|G|$ de G.
3. Soit $p$ un nombre premier. Soit $n$ un entier.
   Quelles sont les valeurs possibles pour l'ordre du centre d'un groupe d'ordre $p^n$ ?
   Quel est le centre d'un groupe d'ordre $p^2$ ?
   Quel est le centre d'un groupe non abélien d'ordre $p^3$ ?

4. Donner un exemple de groupe d'ordre $p^3$ non abélien.
5. Montrer que si G est d'ordre $p^2$, alors $G \simeq \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou $G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

**Exercice 7**

Soient $E$ un ensemble et G un groupe opérant sur $E$. Soient $g$ et $h$ des éléments de $E$ appartenant à la même orbite.

Montrer que les stabilisateurs $\mathrm{Stab}_g$ et $\mathrm{Stab}_h$ sont des sous-groupes conjugués de G.

En déduire que $\mathrm{Stab}_g$ et $\mathrm{Stab}_h$ ont même ordre.

**Exercice 8**

Soit $E$ un ensemble fini. Soit G un groupe fini qui opère sur $E$. Pour tout $g$ dans G on définit

$$E^g = \{s \in E \mid gs = s\}.$$

Autrement dit $E^g$ est l'ensemble des points fixes de $E$ sous l'action de $g$. Pour $s \in E$, on note $G_s$ le fixateur de $s$ pour l'action de G sur $E$.

1. Construire la table de l'opération

$$\varphi\colon G \times E \to \{ \text{ vrai=V, faux=F } \}$$

définie par

$$\begin{cases} \varphi(g,s) = V \text{ si } gs = s \\ \varphi(g,s) = F \text{ sinon} \end{cases}$$

dans le cas où $G = D_6$ et $E = \{A, B, C\}$ où $ABC$ est un triangle équilatéral.

2. Démontrer que $\displaystyle\sum_{s\in E} |G_s| = \sum_{g\in G} \mathrm{card}(E^g)$.
3. En déduire la formule de Burnside

$$|G| \times \text{ le nombre d'orbites } = \sum_{g\in G} \mathrm{card}(E^g).$$

**Exercice 9**

Combien $(\mathbb{F}_2)^n$ admet-il de sous-espaces vectoriels de dimension $k$ ?

**Exercice 10**

Montrer que dans un groupe tout sous-groupe d'indice 2 est distingué.

**Exercice 11**

Pour $a$ et $b$ réels on définit l'application

$$\tau_{a,b}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad x \mapsto ax + b.$$

1. Soit $G = \{\tau_{a,b} \mid a \neq 0\}$.
   Montrer que G est un groupe pour la composition des applications.
2. Soit $H = \{\tau_{a,b} \mid a \neq 0,\ a \in \mathbb{Q}\}$.
   Montrer que H est un sous-groupe de G.
3. Décrire les classes à droite de H dans G.
   Montrer que toute classe à gauche (modulo H) est classe à droite (modulo H). (Indication : considérer l'application qui à l'élément $\tau_{a,b}$ de G associe la classe de $a$ dans $\mathbb{R}^*/\mathbb{Q}^*$)
4. Donner un exemple d'un sous-groupe K de G tel qu'une classe à gauche ne soit pas classe à droite.
5. Soit $N = \{\tau_{a,b} \mid a = 1\}$.
   Montrer que N est un sous-groupe distingué de G.

**Exercice 12**
Soit H un sous-groupe d'un groupe G tel que toute classe à gauche modulo H soit classe à droite modulo H. Le sous-groupe H est-il distingué ?

**Exercice 13**
Soit G un groupe fini. Soit N un sous-groupe de G. Soit N un sous-groupe distingué de G.
Montrer que si $|\mathrm{H}|$ et $[\mathrm{G} : \mathrm{N}]$ sont premiers entre eux, alors H est un sous-groupe de N.

**Exercice 14**
Soit G un groupe qui ne contient qu'un seul sous-groupe H d'ordre $n$.
Montrer que H est distingué dans G.

**Exercice 15**
Soit H un sous-groupe de G tel que le produit de deux classes à gauche modulo H soit une classe à gauche modulo H.
Le sous-groupe H est-il distingué dans G ?

**Exercice 16**
Soit G un groupe. Soit H un sous-groupe distingué de G.
Montrer que si H est cyclique tout sous-groupe de H est distingué dans G.

**Exercice 17**
Soient G un groupe et H un sous-groupe de G.
(a) Montrer qu'en posant $g \cdot a\mathrm{H} = (ga)\mathrm{H}$, où $a$, $g \in \mathrm{G}$, on définit une action de G sur l'ensemble ${}^{\mathrm{G}}\!/_{\mathrm{H}}$ des classes à gauche modulo H.
(b) Montrer que cette action est transitive.
Déterminer le stabilisateur de $a$H.
(c) On suppose G fini. Calculer le cardinal d'une orbite et retrouver un théorème classique.

**Exercice 18**
Soit G un groupe. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.
a) Si tout sous-groupe H de G est distingué dans G, alors G est abélien.
b) Si $\mathrm{H} \lhd \mathrm{G}$ et $\mathrm{K} \lhd \mathrm{H}$, alors $\mathrm{K} \lhd \mathrm{G}$.
c) Soient $g$ et $h$ dans G d'ordre fini. Alors $gh$ est d'ordre fini.
d) Si G a un nombre fini de sous-groupes, alors G est fini.
e) Si H et K sont des sous-groupes de G, alors $\langle \mathrm{H} \cup \mathrm{K} \rangle = \mathrm{HK}$.

**Exercice 19**
Soit G un groupe. Désignons par Aut(G) le groupe des automorphismes de G. Si $a$ appartient à G, notons $\varphi(a)$ l'application

$$\varphi(a) \colon \mathrm{G} \to \mathrm{G} \qquad\qquad g \mapsto aga^{-1}.$$

a) Montrer que pour tout $a$ dans G l'application $\varphi(a)$ est un automorphisme de G (appelé automorphisme intérieur de G).
b) Montrer que $\varphi \colon \mathrm{G} \to \mathrm{Aut}(G)$, $g \mapsto \varphi(g)$ est un morphisme de groupes de G dans Aut(G).
c) Notons Int(G) l'ensemble des automorphismes intérieurs de G. Montrer que Int(G) est un sous-groupe distingué de Aut(G).
d) Notons $Z(\mathrm{G})$ le centre de G. Montrer que $\mathrm{Int(G)} \simeq {}^{\mathrm{G}}\!/_{Z(\mathrm{G})}$.

**Exercice 20**
Soit G un groupe de centre $Z(\mathrm{G})$.
a) Montrer que $Z(\mathrm{G})$ est un sous-groupe distingué de G.
b) Montrer que si ${}^{\mathrm{G}}\!/_{Z(\mathrm{G})}$ est monogène (*i.e.* ${}^{\mathrm{G}}\!/_{Z(\mathrm{G})}$ est engendré par un seul élément), alors G est abélien.

**Exercice 21** [Formule de Burnside et coloriage de polyèdres]

1. Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini $X$. Pour tout $x \in X$ on désigne par $\mathcal{O}_x$ l'orbite de $x$ par l'action de G et par $\mathrm{G}_x$ son stabilisateur.
   a) Soient $x \in X$ et $y \in \mathcal{O}_x$. Trouvez $z \in \mathrm{G}$ tel que
   $$\mathrm{G}_y = z^{-1}\mathrm{G}_x z.$$
   b) Montrer que pour tout $x \in X$
   $$|\mathrm{G}| = \sum_{y \in \mathcal{O}_x} |\mathrm{G}_y|.$$
   c) En déduire que
   $$|\Omega| = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{x \in X} |\mathrm{G}_x|$$
   où $\Omega = \{\mathcal{O}_x \mid x \in X\}$ est l'ensemble des orbites dans $X$ par l'action de G.
   d) En décomposant de deux façons différentes l'ensemble $F = \{(g, x) \in \mathrm{G} \times X \mid g \cdot x = x\}$ déduire de la question précédente la formule de BURNSIDE
   $$|\Omega| = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{g \in \mathrm{G}} |\mathrm{Fix}(g)|$$
   où $\mathrm{Fix}(g)$ est l'ensemble des points $x \in X$ tels que $g \cdot x = x$.
2. On cherche maintenant à déterminer le nombre de façons de colorier les faces et les arêtes d'un tétraèdre régulier, où $k$ couleurs sont disponibles, à chaque face et à chaque arête étant attribuée une couleur et une seule. Le tétraèdre $T$ est vu comme un sous-ensemble de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et on le suppose centré en 0.

   Nous identifions deux coloriages du tétraèdre s'il existe une rotation $R$ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ qui préserve le tétraèdre, *i.e.* $R(T) = T$, et qui envoie le premier coloriage sur le second.
   a) Soit $X$ l'ensemble des coloriages où on interdit cette identification. Quel est le cardinal de $X$ ?
   b) Montrer que l'ensemble des rotations préservant $T$, muni de la loi de composition, est un groupe. Notons G ce groupe. On admet qu'il est fini et plus précisément que $|\mathrm{G}| = 12$ :
      - l'identité $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ ;
      - 3 rotations d'axe passant par le milieu d'une arête et le milieu de l'arête opposée, et d'angle $\pi$ ;
      - 8 rotations d'axe passant par un sommet et le centre de la face opposée, et d'angle $\pm 2\pi/3$.
   c) Le groupe G agit naturellement sur $X$, et chaque coloriage du tétraèdre correspond à une orbite $\mathcal{O}_x$ dans $X$ par l'action de G. Exprimer le nombre de coloriages du tétraèdre en fonction de $k$.

**Exercice 22**

1. Soit G un groupe fini qui opère sur un ensemble fini non vide $E$. Supposons que G soit d'ordre $p^m$ avec $p$ premier et $m \in \mathbb{N}^*$. Posons
   $$E^{\mathrm{G}} = \big\{x \in E \mid \forall\, g \in \mathrm{G},\, g \cdot x = x\big\}.$$
   Montrer que $|E^{\mathrm{G}}| = |E| \bmod p$.
2. Soit H un groupe fini d'ordre $n$. Soit $p$ un diviseur premier de $n$. Montrer que H contient un élément d'ordre $p$ (lemme de CAUCHY). Indication : faire agir $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur l'ensemble $E$ des $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de $\mathrm{H}^p$ tels que $x_1 x_2 \ldots x_p = e$.
3. Soit H un groupe fini d'ordre $n$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $x \in \mathrm{H}$ on ait $x^m = e$. Montrer que $n$ divise une puissance de $m$.

**Exercice 23**

a) Combien y a-t-il d'opérations du groupe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ?

b) Soient G et $X$ deux groupes. On dit que G *opère par automorphismes sur* $X$ si on s'est donné une opération $(g, x) \mapsto g \cdot x$ de G sur $X$ telle que pour tout $g \in \mathrm{G}$ l'application $x \mapsto g \cdot x$ soit un automorphisme de $X$.
L'opération de G sur lui-même par translation est-elle une opération par automorphismes ?
L'opération de G sur lui-même par conjugaison est-elle une opération par automorphismes ?

c) Si $\mathrm{G} = \left(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +\right)$ et $X = \left(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}, +\right)$ combien y a-t-il d'actions de G sur $X$ par automorphismes ?

d) Si $\mathrm{G} = \left(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +\right)$ et $X = \left(\mathcal{S}_3, \circ\right)$ combien y a-t-il d'actions de G sur $X$ par automorphismes ?

**Exercice 24** Soit $E$ un espace euclidien. On fait opérer le groupe orthogonal $\mathrm{O}(E)$ de $E$ sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $E$.

a) Quelles sont les orbites pour cette action ?
b) Donner un énoncé analogue pour les espaces hermitiens.
c) Y a-t-il un énoncé analogue pour le groupe orthogonal $\mathrm{O}(q)$ d'un espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme quadratique non dégénérée $q$ ?

**Exercice 25**

1. Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini $X$. En considérant l'ensemble
$$E = \left\{(g, x) \in \mathrm{G} \times X \mid g \cdot x = x\right\},$$
calculer le nombre moyen de points fixes d'un élément de G. Que dire en particulier si l'action est transitive ? Que dire de la moyenne du nombre de points fixes d'une permutation aléatoire ?
2. Combien de colliers de 9 perles différents peut-on faire avec 4 perles bleues, 3 perles blanches et 2 perles oranges ?

**Exercice 26**

Soit $\Bbbk = \mathbb{F}_q$ un corps fini de cardinal $q$. Considérons le groupe linéaire $\mathrm{GL}(n, \Bbbk)$ et son sous-groupe $\mathrm{SL}(n, \Bbbk)$.

a) Montrer que le centre de $\mathrm{GL}(n, \Bbbk)$ (respectivement de $\mathrm{SL}(n, \Bbbk)$) est constitué des matrices scalaires de ce groupe.
b) Notons $\mathrm{PGL}(n, \Bbbk)$ (respectivement $\mathrm{PSL}(n, \Bbbk)$) le quotient de $\mathrm{GL}(n, \Bbbk)$ (respectivement $\mathrm{SL}(n, \Bbbk)$) par son centre. Calculer les ordres de $\mathrm{SL}(n, \Bbbk)$, $\mathrm{PGL}(n, \Bbbk)$ et $\mathrm{PSL}(n, \Bbbk)$.
Soit $n$ un entier. Soit $E$ le $\Bbbk$-espace vectoriel $\Bbbk^n$. Désignons par $\mathbb{P}(E)$ l'ensemble des droites vectorielles de $\Bbbk^n$ (espace projectif de dimension $n-1$).
c) Montrer qu'il existe un morphisme injectif $\Phi$ de $\mathrm{PGL}(n, \Bbbk)$ dans le groupe symétrique $\mathcal{S}_{\mathbb{P}(E)}$.
Dans la suite on suppose que $n = 2$.
d) Montrer que $\mathbb{P}(E)$ est de cardinal $q + 1$ ; on identifie $\Phi$ à un morphisme de $\mathrm{PGL}(2, \Bbbk)$ dans $\mathcal{S}_{q+1}$.
e) Supposons que $q = 2$. Montrer que $\Phi$ induit des isomorphismes de $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{F}_2)$ et $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_2)$ sur $\mathcal{S}_3$.
f) Supposons que $q = 3$. Montrer que $\Phi$ induit un isomorphisme de $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{F}_3)$ sur $\mathcal{S}_4$ et de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_3)$ sur $\mathcal{A}_4$. Les groupes $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{F}_3)$ et $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_3)$ sont-ils isomorphes ?
g) Supposons que $q = 4$. Montrer que $\Phi$ induit des isomorphismes de $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{F}_4)$ et $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_4)$ sur $\mathcal{A}_5$.
h) Supposons que $q = 5$. Montrer que $\Phi$ induit un isomorphisme de $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{F}_5)$ sur $\mathcal{S}_5$ et de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_5)$ sur $\mathcal{A}_5$ (rappelons une conséquence non triviale de la simplicité des groupes alternés : tout sous-groupe d'indice $n$ de $\mathcal{S}_n$ est isomorphe à $\mathcal{S}_{n-1}$ pour $n \geqslant 5$).

**Exercice 27**

Soit $p$ un nombre premier, soit G un groupe d'ordre $p^2$. Montrer que G est abélien.

**Exercice 28**

Soit G un groupe fini d'ordre 21 opérant sur un ensemble fini $E$ ayant $n$ éléments.

1. Supposons que $n = 19$. Supposons aussi qu'il n'existe pas de point fixe dans $E$ sous l'action de G. Combien y a-t-il d'orbites dans $E$ ? Quel est le nombre d'éléments dans chacune de ces orbites ?
2. Supposons que $n = 11$. Montrer qu'il existe au moins un point fixe dans $E$ sous l'action de G.
3. Soit $n$ un entier $> 11$. Montrer qu'il existe un ensemble ayant $n$ éléments sur lequel G opère sans point fixe.