Feuille d'exercices n° 5

Exercice 1

Soit G un groupe de type fini.

Un sous-groupe H de G est-il nécessairement de type fini ? Justifiez votre réponse.

Solution 1

Soit G est un groupe de type fini ; G peut contenir un sous-groupe H qui n'est pas de type fini.

Considérons le sous-groupe G de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})$ engendré par les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit H le sous-groupe de G formé des matrices de G avec des 1 sur la diagonale. Raisonnons par l'absurde : supposons que H soit de type fini. Alors il existe un entier $N \geqslant 1$ tel que H soit contenu dans le sous-groupe de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})$ formé des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{N} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Or $A^{-N}BA^{N} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2^N} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: contradiction ($2^N > N$). Ainsi H n'est pas de type fini alors que G l'est.

Considérons par exemple le groupe libre G sur deux générateurs a et b. Soit H le sous-groupe engendré par tous les éléments de la forme ab^n avec $n \in \mathbb{N}$. Raisonnons par l'absurde : supposons que H soit de type fini. Alors il existe un entier N tel que dans tout mot de H le nombre de b consécutifs soit toujours strictement inférieur à N. Or ab^N appartient à H : contradiction. Le sous-groupe H de G n'est donc pas de type fini.

Exercice 2

Soit G un groupe abélien.

Montrer que $T(\mathrm{G}) = \{g \in \mathrm{G} \mid o(g) < \infty\}$ est un sous-groupe de G (appelé le sous-groupe de torsion de G).

Donner un exemple explicite pour lequel $T(\mathrm{G})$ n'est pas un sous-groupe de G si G n'est pas abélien.

Solution 2

Soit G un groupe abélien.

Montrons que $T(\mathrm{G}) = \{g \in G \mid o(g) < \infty\}$ est un sous-groupe de G (appelé le sous-groupe de torsion de G).

Clairement $T(\mathrm{G})$ est contenu dans G. On a

- $o(e) = 1 < \infty$ donc $e \in T(\mathrm{G})$;
- soient g et h dans $T(\mathrm{G})$. Notons n (respectivement m) l'ordre de g (respectivement h). Par hypothèse $n < \infty$ et $m < \infty$. On a bien sûr $o(h^{-1}) = m$. Puisque G est abélien on a

  $$(gh^{-1})^{mn} = g^{mn}(h^{-1})^{mn}$$

  Par suite $(gh^{-1})^{mn} = (g^n)^m((h^{-1})^m)^n = e^m e^n = e$. Ainsi $o(gh^{-1}) \leqslant mn < \infty$ et gh^{-1} appartient à $T(\mathrm{G})$.

Ainsi $T(\mathrm{G})$ est un sous-groupe de G.

Montrons que si G n'est pas abélien, alors $T(\mathrm{G})$ n'est pas forcément un sous-groupe de G.

Considérons $\mathrm{G} = \mathrm{O}(2)$. Soit ρ la rotation d'angle θ où θ/π est irrationnel. Alors ρ n'appartient pas à $T(\mathrm{G})$. Mais $\rho = s_2 \circ s_1$ avec s_1, s_2 réflexions ; en particulier $o(s_1) = o(s_2) = 2$ et donc s_1, s_2 appartiennent à $T(\mathrm{G})$.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Trouver le sous-groupe de torsion de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Montrer que l'ensemble des éléments d'ordre infini et l'élément neutre ne forment pas un sous-groupe de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Solution 3

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Déterminons le sous-groupe de torsion de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} T\left(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right) &= \left\{(a,\bar{b}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid o(a,b) < \infty\right\} \\ &= \left\{(a,\bar{b}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid \exists\, k \in \mathbb{N}^*,\ o(a,b) = k\right\} \\ &= \left\{(a,\bar{b}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid (ka, kb) = (0,\bar{0})\right\} \\ &= \left\{(a,\bar{b}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid a = 0 \text{ et } b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right\} \\ &= \{0\} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Montrons que l'ensemble des éléments d'ordre infini et l'élément neutre ne forment pas un sous-groupe de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Soient $(1,1)$ et $(-1,0)$ deux éléments de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Ils sont d'ordre infini mais $(1,1) + (-1,0) = (0,1)$ est d'ordre fini.

Exercice 4

a) Donner un exemple de groupe abélien qui n'est pas de type fini.

b) Si p est un nombre premier, quel est le groupe sous-jacent au corps $\mathbb{F}_{p^n}$?

c) Soient n, $m \geqslant 1$ deux entiers. Posons $\delta := \operatorname{pgcd}(n,m)$ et $\mu := \operatorname{ppcm}(n,m)$.
Montrer que les groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/\delta\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\mu\mathbb{Z}$ sont isomorphes.

d) Montrer qu'un groupe abélien de type fini et de torsion est fini (ceci n'est plus vrai pour les groupes non-abéliens : voir par exemple [Calais, p. 294]).

e) Montrer qu'un groupe abélien fini est le produit de ses sous-groupes de Sylow.

Solution 4

a) $(\mathbb{Q},+)$ est un groupe abélien qui n'est pas de type fini (pour le vérifier raisonner par l'absurde).

b) Soit p un nombre premier.
Si $n = 1$, alors $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et le groupe sous-jacent est $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
Si $n = 2$, alors le groupe sous-jacent à $\mathbb{F}_{p^2}$ est $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ car $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ possède un élément d'ordre p^2 alors que $\mathbb{F}_{p^2}$ est de caractéristique p donc sans élément d'ordre p^2.
De même pour n quelconque le groupe sous-jacent à $\mathbb{F}_{p^n}$ est $\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^n$.

c) Soient n, $m \geqslant 1$ deux entiers. Posons $\delta := \operatorname{pgcd}(n,m)$ et $\mu := \operatorname{ppcm}(n,m)$. Montrons que les groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/\delta\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\mu\mathbb{Z}$ sont isomorphes.
Écrivons les décompositions de m et n en nombre premiers :

$$m = \prod_i p_i^{\alpha_i} \qquad\qquad n = \prod_i p_i^{\beta_i}$$

Alors

$$\delta = \prod_i p_i^{\min(\alpha_i,\beta_i)} \qquad\qquad \mu = \prod_i p_i^{\max(\alpha_i,\beta_i)}$$

D'une part

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq \prod_i \mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z} \times \prod_i \mathbb{Z}/p_i^{\beta_i}\mathbb{Z} \simeq \prod_i \left(\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p_i^{\beta_i}\mathbb{Z}\right)$$

d'autre part

$$\mathbb{Z}/\delta\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\mu\mathbb{Z} \simeq \prod_i \left(\mathbb{Z}/p_i^{\min(\alpha_i,\beta_i)}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p_i^{\max(\alpha_i,\beta_i)}\mathbb{Z}\right)$$

Si $\min(\alpha_i,\beta_i) = \alpha_i$, alors $\max(\alpha_i,\beta_i) = \beta_i$; réciproquement si $\min(\alpha_i,\beta_i) = \beta_i$ alors $\max(\alpha_i,\beta_i) = \alpha_i$. Par conséquent tous les α_i et β_i apparaissent une fois et une seule dans le produit

$$\prod_i \left(\mathbb{Z}/p_i^{\min(\alpha_i,\beta_i)}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p_i^{\max(\alpha_i,\beta_i)}\mathbb{Z}\right)$$

qui est donc isomorphe à

$$\prod_i \left(\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p_i^{\beta_i}\mathbb{Z} \right)$$

d) Montrons qu'un groupe abélien de type fini et de torsion est fini.
Soit G un groupe abélien de type fini et sans torsion. Puisque G est abélien de type fini on a

$$\mathrm{G} \simeq \mathbb{Z}^r \times \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/n_s\mathbb{Z}$$

où $r \geqslant 0$, $n_j \geqslant 0$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant s$ et n_{i+1} divise n_i pour tout $1 \leqslant i \leqslant s-1$.
De plus G est de torsion, *i.e.* tout élément est d'ordre fini. Il en résulte que $r = 0$, c'est-à-dire que

$$\mathrm{G} \simeq \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/n_s\mathbb{Z}$$

En particulier $|\mathrm{G}| = n_1 n_2 \ldots n_s < \infty$.

e) Montrer qu'un groupe abélien fini est le produit de ses sous-groupes de Sylow.
Soient G un groupe abélien et $(\mathrm{H}_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ une famille de sous-groupes d'ordre 2 à 2 premiers entre eux. Alors ces groupes sont en somme directe dans G. En effet soit d_i l'ordre de H_i. Rappelons que dans un groupe abélien si G est d'ordre m et h d'ordre n avec n, m premiers entre eux, alors gh est d'ordre mn. Ainsi pour tout i l'ordre de tout élément de $\displaystyle\sum_{j\neq i} \mathrm{H}_j$ divise $\mathrm{ppcm}_{j\neq i}(d_j)$ donc est premier avec d_i. Il en résulte que nous avons pour tout i

$$\mathrm{H}_i \cap \left(\sum_{j\neq i} \mathrm{H}_j \right) = \{1\}$$

Par conséquent les H_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, sont en somme directe.
D'après ce qui précède les différents p-Sylow d'un groupe abélien fini G sont en somme directe. L'égalité des cardinaux assure que G est la somme directe de ses sous-groupes de Sylow.

Exercice 5

Soit G un groupe abélien fini. Montrer qu'il existe dans G un élément dont l'ordre est égal à l'exposant de G.

Solution 5

Soit G un groupe abélien fini. Montrons qu'il existe dans G un élément dont l'ordre est égal à l'exposant de G. Le théorème de structure assure que

$$\mathrm{G} \simeq \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}$$

où d_i divise d_{i+1} pour tout $1 \leqslant i \leqslant r-1$.
L'exposant de G est d_r et $(0, 0, \ldots, 0, 1)$ est d'ordre d_r.

Exercice 6

a) Donner la décomposition primaire du groupe $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$. En déduire ses facteurs invariants.
b) Donner la décomposition primaire du groupe $\mathbb{Z}/54\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/26\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$. En déduire ses facteurs invariants.

Solution 6

a) Donnons la décomposition primaire du groupe $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$.
Notons que $8 = 2^3$, $12 = 2^2 \times 3$ et $24 = 2^3 \times 3$. Ainsi

$$\mathrm{G} \simeq \mathbb{Z}/2^3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

et les diviseurs élémentaires de G sont 2^3, 2^2, 3, 2^3 et 3.
Déterminons les facteurs invariants de G. Réordonnons les diviseurs élémentaires comme suit

$$\begin{array}{r} 2^2 \mid 2^3 \mid 2^3 \\ 3 \mid 3 \end{array}$$

Les facteurs invariants de G sont donc $2^2 \times 1 = 4$, $2^3 \times 3 = 24$ et $2^3 \times 3 = 24$.
Par conséquent

$$\mathrm{G} \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}.$$

b) Donnons la décomposition primaire du groupe $\mathbb{Z}/54\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/26\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.
Notons que $54 = 2 \times 3^3$, $26 = 2 \times 13$ et $15 = 3 \times 5$. Ainsi

$$\mathrm{G} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3^3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$$

et les diviseurs élémentaires de G sont 2, 3^3, 2, 13, 3 et 5.
Donnons ses facteurs invariants. On ordonne les diviseurs élémentaires comme suit

$$\begin{array}{rl} 2 \mid & 2 \\ 3 \mid & 3^3 \\ & 5 \\ & 13 \end{array}$$

Les facteurs invariants de G sont donc $2 \times 3 = 6$ et $2 \times 3^3 \times 5 \times 13 = 3510$.

Exercice 7

a) Le nombre de classes de conjugaison dans $\mathcal{S}_5$ est le même que le nombre de groupes abéliens de cardinal 32 à isomorphisme près. Pourquoi ?

b) Généraliser au nombre de classes de conjugaison dans $\mathcal{S}_n$.

Solution 7

a) Le nombre de classes de conjugaison dans $\mathcal{S}_5$ est le même que le nombre de groupes abéliens de cardinal 32 à isomorphisme près. Expliquons pourquoi. Le nombre de classes de conjugaison dans $\mathcal{S}_5$ et le nombre de groupes abéliens de cardinal 32 à isomorphisme près sont chacun en bijection avec l'ensemble des partitions de 5 (rappelons qu'une partition d'un entier est une décomposition de cet entier en une somme d'entiers strictement positifs à l'ordre près des termes).

b) Généralisons au nombre de classes de conjugaison dans $\mathcal{S}_n$. Soit p un nombre premier. Notons G_n l'ensemble des classes d'isomorphismes de groupes abéliens de cardinal p^n, P_n l'ensemble des partitions de l'entier n et C_n l'ensemble des classes de conjugaison dans $\mathcal{S}_n$. Considérons

$$\varphi \colon P_n \to G_n \qquad (n_1, n_2, \ldots, n_r) \mapsto \text{ classe d'isomorphisme de } \prod_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/N_i\mathbb{Z}$$

et

$$\psi \colon P_n \to C_n \qquad \begin{array}{l} (n_1, n_2, \ldots, n_r) \mapsto \text{ classe de conjugaison de la permutation} \\ (1, 2, \ldots, n_1)(n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2) \ldots (n_1 + n_2 + n_{r-1} + 1, \ldots, n) \end{array}$$

φ et ψ sont des bijections donc $|C_n| = |G_n|$: il y a autant de classes de conjugaison dans $\mathcal{S}_n$ que de classes d'isomorphisme de groupes abéliens d'ordre p^n.

Exercice 8

Déterminer la structure des groupes abéliens de type fini suivants :

$$\mathbb{Z}^2/\langle(1,3),(2,0)\rangle \qquad\qquad \mathbb{Z}^2/\langle(1,1),(1,-1)\rangle.$$

Solution 8

Déterminons la structure du groupe abélien de type fini

$$\mathbb{Z}^2/\langle(1,3),(2,0)\rangle.$$

On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Par suite $\mathbb{Z}^2/\langle(1,3),(2,0)\rangle \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Par conséquent $\mathbb{Z}^2/\langle(1,1),(1,-1)\rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 9

Soit H le sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$ engendré par $(2,5)$, $(5,-1)$ et $(1,-2)$. Déterminer une base de H et décrire le quotient $\mathbb{Z}^2/\mathrm{H}$.

Solution 9

On a

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 5 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 9 & 9 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & -2 \end{pmatrix}$$

donc $\mathrm{H} = \langle(0,9),\ (1,-2)\rangle$ est de rang 2.

De plus $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 9 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$; par suite $\mathbb{Z}^2/\mathrm{H} \simeq \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.

Exercice 10

Trouver une base du groupe suivant :

$$\mathrm{G} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \,\middle|\, \begin{cases} 2x+3y+5z=0 \\ 3x-6y+2z=0 \end{cases} \right\}$$

Solution 10

Soit G le groupe donné par :

$$\mathrm{G} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \,\middle|\, \begin{cases} 2x+3y+5z=0 \\ 3x-6y+2z=0 \end{cases} \right\}$$

On a

$$\mathrm{G} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \,\middle|\, \begin{cases} 2x+3y+5z=0 \\ 7x+12z=0 \end{cases} \right\}$$

Comme $7x+12z=0$ on écrit $x=12k$ et $z=-7k$. Alors $2x+3y+5z=0$ conduit à $3y=11k$. On pose donc $k=3l$ alors

$$x = 36\ell, \qquad y = 11\ell, \qquad z = -21\ell$$

Finalement

$$\mathrm{G} = \{\ell(36,11,-21) \mid \ell \in \mathbb{Z}\} = \mathrm{Vect}(36,11,-21)$$

et $\{(36,11,-21)\}$ est une base de G.

Exercice 11

Soit G un groupe abélien fini.

Supposons que pour tout diviseur d de l'ordre n de G, il existe un et un seul sous-groupe d'ordre d dans G. Montrer que G est cyclique.

Solution 11

Raisonnons par l'absurde. Supposons que G ne soit pas cyclique. Alors G est isomorphe à $\mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q_2\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/q_k\mathbb{Z}$ où $q_1|q_2|\ldots|q_k$ sont les facteurs invariants de G et $k \geqslant 2$. Il y a alors (au moins) deux sous-groupes distincts d'ordre q_1 : d'une part le facteur $\mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z}$ et d'autre part l'unique sous-groupe d'ordre q_1 du facteur $\mathbb{Z}/q_2\mathbb{Z}$ associé au diviseur q_1 de q_2.

Exercice 12

1. Les groupes $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/48\mathbb{Z}$ sont-ils isomorphes ?

2. Les groupes $\mathbb{Z}/72\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/84\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/168\mathbb{Z}$ sont-ils isomorphes ?

Solution 12

1. Les groupes $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/48\mathbb{Z}$ ne sont pas isomorphes. En effet posons

$$\mathrm{G}_1 = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/72\mathbb{Z} \qquad \mathrm{G}_2 = \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/48\mathbb{Z}.$$

Nous avons $12 = 2^2 \times 3$, $72 = 2^3 \times 3^2$, $18 = 2 \times 3^2$ et $48 = 2^4 \times 3$. Les groupes G_1 et G_2 sont tous deux d'ordre $2^5 \times 3^3$. Les groupes G_i sont isomorphes à $\mathrm{A}_i \times \mathrm{B}_i$ pour $i = 1,\ 2$ où A_i est un groupe abélien d'ordre 2^5 et B_i un groupe abélien d'ordre 3^3. Le groupe A_1 est associé à la partition $(3, 2)$ de 5 et le groupe A_2 est associé à la partition $(4, 1)$ de 5 ; ils ne sont donc pas isomorphes. Par suite les groupes G_1 et G_2 ne sont pas isomorphes.

2. Les groupes $\mathbb{Z}/72\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/84\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/168\mathbb{Z}$ sont isomorphes. En effet posons

$$\mathrm{G}_1 = \mathbb{Z}/72\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/84\mathbb{Z} \qquad \mathrm{G}_2 = \mathbb{Z}/36\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/168\mathbb{Z}.$$

Nous avons $72 = 2^3 \times 3^2$, $84 = 2^2 \times 3 \times 7$, $36 = 2^2 \times 3^2$ et $168 = 2^3 \times 3 \times 7$. Les groupes G_1 et G_2 sont donc de même ordre $2^5 \times 3^3 \times 7$. Les groupes G_i sont isomorphes à $\mathrm{A}_i \times \mathrm{B}_i \times \mathrm{C}_i$ où A_i est un groupe abélien d'ordre 2^5, B_i est un groupe abélien d'ordre 3^3 et C_i est un groupe abélien d'ordre 7. Les groupes A_1 et A_2 sont associés à la partition $(3, 2)$ de 5, ils sont isomorphes. Les groupes B_1 et B_2 sont associés à la partition $(2, 1)$ de 3 ; ils sont donc isomorphes. Les groupes C_1 et C_2 sont isomorphes. Il en résulte que G_1 et G_2 sont isomorphes.

Exercice 13

Soit $\mathrm{G} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. Considérons les deux sous-groupes suivants de G :

$$\mathrm{H} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \{0\} \qquad \mathrm{K} = \{0\} \times \{0,\ 6\}.$$

Remarquons que $\mathrm{H} \simeq \mathrm{K} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mais avons-nous $\mathrm{G}/\mathrm{H} \simeq \mathrm{G}/\mathrm{K}$?

Solution 13

D'une part $\mathrm{G}/\mathrm{H} \simeq \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, d'autre part $\mathrm{G}/\mathrm{K} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \simeq \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right) \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
Les deux premiers facteurs ne sont pas isomorphes donc les deux groupes ne sont pas isomorphes.

Exercice 14

Soient G, H et K des groupes abéliens finis.

1. Montrer que si $\mathrm{G} \times \mathrm{G} \simeq \mathrm{H} \times \mathrm{H}$, alors $\mathrm{G} \simeq \mathrm{H}$.
2. Montrer que si $\mathrm{G} \times \mathrm{K} \simeq \mathrm{H} \times \mathrm{K}$, alors $\mathrm{G} \simeq \mathrm{H}$.

Solution 14

Soient G, H et K des groupes abéliens finis. Montrons que si $\mathrm{G} \times \mathrm{G} \simeq \mathrm{H} \times \mathrm{H}$, alors $\mathrm{G} \simeq \mathrm{H}$ et que si $\mathrm{G} \times \mathrm{K} \simeq \mathrm{H} \times \mathrm{K}$, alors $\mathrm{G} \simeq \mathrm{H}$.

La décomposition primaire de G est $\prod_{i=1}^{s} \mathrm{A}_i$, celle de $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$ est donc $\prod_{i=1}^{s} \mathrm{A}_i \times \mathrm{A}_i$.

La décomposition primaire de H est $\prod_{i=1}^{t} \mathrm{B}_i$, celle de $\mathrm{H} \times \mathrm{H}$ est donc $\prod_{i=1}^{t} \mathrm{B}_i \times \mathrm{B}_i$.

La décomposition primaire de K est $\prod_{i=1}^{u} \mathrm{C}_i$, celle de $\mathrm{G} \times \mathrm{K}$ est donc $\prod_{i=1}^{s} \mathrm{A}_i \times \prod_{i=1}^{u} \mathrm{C}_i$ et celle de $\mathrm{H} \times \mathrm{K}$ est donc $\prod_{i=1}^{s} \mathrm{B}_i \times \prod_{i=1}^{u} \mathrm{C}_i$.

1. Si $\mathrm{G} \times \mathrm{G} \simeq \mathrm{H} \times \mathrm{H}$, alors $s = t$ et $\mathrm{A}_i = \mathrm{B}_i$ pour tout i. Par suite $\mathrm{G} \simeq \mathrm{H}$.
2. Si $\mathrm{G} \times \mathrm{K} \simeq \mathrm{H} \times \mathrm{K}$, alors $s = t$ et $\mathrm{A}_i = \mathrm{B}_i$ pour tout i. Par conséquent $\mathrm{G} \simeq \mathrm{H}$.

Exercice 15

1. Exprimer tous les groupes abéliens d'ordre 99 comme sommes directes de sous-groupes cycliques.
2. Exprimer tous les groupes abéliens d'ordre 100 comme sommes directes de sous-groupes cycliques.

Solution 15

1. Exprimons tous les groupes abéliens d'ordre 99 comme sommes directes de sous-groupes cycliques.
   Les groupes abéliens d'ordre $99 = 3^2 \times 11$ sont isomorphes
   - soit à $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$,
   - soit à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.
2. Exprimons tous les groupes abéliens d'ordre 100 comme sommes directes de sous-groupes cycliques. Les groupes abéliens d'ordre $100 = 2^2 \times 5^2$ sont isomorphes
   - soit à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$,
   - soit à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$,
   - soit à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$,
   - soit à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Exercice 16

Combien existe-t-il, à isomorphisme près, de groupes abéliens d'ordre 10^6 ?

Solution 16

Nous avons $10^6 = 2^6 \times 5^6$. Les partitions de 6 sont

$$
\begin{aligned}
&(6)\\
&(5,1)\\
&(4,2)\\
&(4,1,1)\\
&(3,3)\\
&(3,2,1)\\
&(3,1,1,1)\\
&(2,2,2)\\
&(2,2,1,1)\\
&(2,1,1,1,1)\\
&(1,1,1,1,1,1)
\end{aligned}
$$

Elles sont donc au nombre de 11. Il y a donc à isomorphisme près $11^2 = 121$ groupes abéliens d'ordre 10^6.

Exercice 17

a) Déterminer à isomorphisme près tous les groupes abéliens d'ordre 12 et 72.
b) Déterminer à isomorphisme près tous les groupes abéliens d'ordre 10^6.

Solution 17

a) Déterminons à isomorphisme près tous les groupes abéliens d'ordre 12.
   Nous avons $12 = 2^2 \times 3$. De plus les partitions de 2 sont

   $$2 \qquad\qquad 1,\,1$$

   Par conséquent il y a à isomorphisme près 2 groupes abéliens d'ordre 12 :

   $$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \qquad\qquad \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

   Déterminons à isomorphisme près tous les groupes abéliens d'ordre 72.
   Nous avons $72 = 2^3 \times 3^2$. De plus les partitions de 2 sont

   $$2 \qquad\qquad 1,\,1$$

et celles de 3 sont

$$3 \qquad\qquad 2,\,1 \qquad\qquad 1,\,1,\,1$$

Par conséquent il y a à isomorphisme près $2 \times 3 = 6$ groupes abéliens d'ordre 72 :

$$\begin{array}{ll}
\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}, & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}, \\
\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\text{é}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}, & \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \\
\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\text{é}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.
\end{array}$$

b) Déterminons à isomorphisme près tous les groupes abéliens d'ordre 10^6.
Nous avons $10^6 = 2^6 \times 5^6$. De plus les partitions de 6 sont

6
5, 1
4, 2
4, 1, 1
3, 3
3, 2, 1
3, 1, 1, 1
2, 2, 2
2, 2, 1, 1
2, 1, 1, 1, 1, 1
1, 1, 1, 1, 1, 1

Il y a donc à isomorphisme près $11^2 = 121$ groupes abéliens d'ordre 10^6.

Exercice 18

Montrer que les groupes $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/90\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ sont isomorphes.

Solution 18

Nous utilisons le lemme chinois pour voir que les deux groupes sont isomorphes au groupe

$$\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z}\right) \times \left(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3^2\mathbb{Z}\right) \times \left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5^2\mathbb{Z}\right)$$

Notons que cette écriture est la décomposition en composantes p-primaires. En effet $12 = 2^2 \times 3$, $90 = 2 \times 3^2 \times 5$, $25 = 5^2$, $100 = 2^2 \times 5^2$, $30 = 2 \times 3 \times 5$ et $9 = 3^2$.

Nous pouvons aussi écrire la décomposition en facteurs invariants de ces deux groupes, nous trouvons

$$\mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/900\mathbb{Z}.$$

Exercice 19

Montrer qu'un groupe abélien fini non cyclique possède un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour un certain nombre premier p.

Solution 19

Montrons qu'un groupe abélien fini non cyclique possède un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour un certain nombre premier p.

Soit G un groupe abélien fini non cyclique. Il est isomorphe à un produit

$$\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z} \times \dots \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}$$

avec $d_i \geqslant 2$ et $d_i \,|\, d_{i+1}$. Puisque G n'est pas cyclique, $r \geqslant 2$. Soit p un facteur premier de d_1 alors p disvise tous les d_i et $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est isomorphe à un sous-groupe de chacun des $\mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}$ (c'est le sous-groupe de p-torsion). Le sous-groupe de p torsion de G est isomorphe à $\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^r$ qui contient un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice 20

a) Combien y a-t-il de groupes abéliens de cardinal 360 ? Faire la liste complète de ces groupes.
b) Plus généralement, pour tout entier n, combien y a-t-il de groupes abéliens de cardinal n ?

Solution 20

a) La décomposition de 360 en facteurs premiers est $2^3 \times 3^2 \times 5$. Ainsi si G est un groupe de cardinal 360, alors le sous-groupe
$$T_2(\mathrm{G}) = \left\{g \in \mathrm{G} \,|\, \exists\, n \in \mathbb{N} \quad 2^n g = 0\right\}$$
de 2-torsion de G est un groupe abélien de cardinal 2^3, il y a donc trois classes d'isomorphisme de tels groupes : $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^3$. De même il y a exactement deux classes d'isomorphisme possibles pour $T_3(\mathrm{G})$ à savoir $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ et $\left(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\right)^2$. Par ailleurs $T_5(\mathrm{G})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Il y a donc exactement six classes d'isomorphisme de groupes abéliens d'ordre 360 donc les décompositions p-primaires et les décompositions en facteurs invariants sont les suivantes :

$$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/360\mathbb{Z}$$
$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times 4\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/180\mathbb{Z}$$
$$\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^3 \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/90\mathbb{Z}$$
$$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \left(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\right)^2 \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/120\mathbb{Z}$$
$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \left(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\right)^2 \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$$
$$\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^3 \times \left(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\right)^2 \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$$

b) Plus généralement, pour tout entier n, déterminons le nombre de groupes abéliens de cardinal n. Nous utilisons la classification des classes d'isomorphisme de groupes abéliens finis. Soit $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$ la décomposition de n en facteurs premiers. La classe d'isomorphisme d'un groupe abélien d'ordre n est caractérisée par ses facteurs invariants $(d_1, d_2, \ldots, d_s)$ qui sont des entiers > 1 tels que $d_i \,|\, d_{i+1}$ et $d_1 d_2 \ldots d_s = n$. Par suite chaque d_i se décompose comme suit : $d_i = p_1^{\alpha_{1,i}} p_2^{\alpha_{2,i}} \ldots p_r^{\alpha_{r,i}}$ avec les contraintes suivantes : $\alpha_{i,j} \leqslant \alpha_{i+1,j}$ pour tout j, pour tout i et $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} \alpha_{i,j} = \alpha_j$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{q} \alpha_{i,j} = \alpha_j$.

Il s'en suit que le nombre de choix possibles pour les a_i est exactement $\displaystyle\prod_{j=1}^{r} p(\alpha_j)$ où $p(\alpha)$ désigne le nombre de partitions de α, *i.e.* le nombre de façons d'écrire l'entier α comme une somme croissante d'entiers strictement positifs.

Exercice 21

a) On considère $\mathrm{H} = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \,|\, a-b \text{ est divisible par } 10\}$. Montrer que H est un sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$. Calculer le rang de H. Donner une base de H. Décrire le quotient $\mathbb{Z}^2/\mathrm{H}$.
b) On note H le quotient de $\mathbb{Z}^3$ par le sous-groupe engendré par les vecteurs $(4,8,10)$ et $(6,2,0)$. Déterminer la structure du groupe H.

Solution 21

a) Soit φ le morphisme de groupes donné par
$$\varphi\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}, \qquad (a,b) \mapsto a-b$$
Son noyau est H. En particulier H est un sous-groupe distingué de $\mathbb{Z}^2$.
D'une part H contient $(1,1)$ et $(0,10)$ donc $\mathrm{rg}\,\mathrm{H} \geqslant 2$. D'autre part $\mathrm{H} \subset \mathbb{Z}^2$ donc $\mathrm{rg}\,\mathrm{H} \leqslant 2$. Finalement $\mathrm{rg}\,\mathrm{H} = 2$.

Soit (a,b) dans H. Il existe n dans $\mathbb{Z}$ tel que $a = b + 10n$ et

$$(a,b) = (a, a-10n) = a(1,1) + (-n)(0,10).$$

Autrement dit $((1,1),(0,10))$ est une base de H.

Par ailleurs

$$\mathbb{Z}^2/\mathrm{H} = \langle (g_1,g_2) \mid g_1 + g_2 = 0,\ 10g_2 = 0\rangle.$$

Puisque $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$ les facteurs invariants de $\mathbb{Z}^2/\mathrm{H}$ sont 1 et 10 et $\mathbb{Z}^2/\mathrm{H} \simeq \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

b) Notons H le quotient de $\mathbb{Z}^3$ par le sous-groupe engendré par les vecteurs $(4,8,10)$ et $(6,2,0)$. Déterminons la structure du groupe H. Nous avons

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 2 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -20 & 0 \\ 8 & 2 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -20 & 0 \\ 0 & 2 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi les facteurs invariants de $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 2 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$ sont 2 et 10 et $\mathrm{H} \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

Exercice 22

Déterminer les facteurs invariants des matrices suivantes à coefficients dans $\mathbb{Z}$:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 69 & -153 \\ 12 & -27 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 12 & -6 & 2 \\ 75 & -41 & 13 \\ 19 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Solution 22

Nous pouvons procéder de deux manières différentes :

- soit en calculer le pgcd des coefficients de la matrice puis le pgcd des mineurs de taille 2, etc
- soit en appliquant l'algorithme de réduction des matrices à coefficients entiers via des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes.

Dans les deux cas nous obtenons ($\sim$ désigne l'équivalence des matrices à coefficients entiers) :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 69 & -153 \\ 12 & -27 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 12 & -6 & 2 \\ 75 & -41 & 13 \\ 19 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Les facteurs invariants sont donc respectivement $(1,6)$, $(3,9)$ et $(1,2,16)$.

Détaillons la première équivalence :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Détaillons la seconde équivalence :

$$\begin{pmatrix} 69 & -153 \\ 12 & -27 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 12 & -27 \\ 69 & -153 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 12 & -27 \\ 9 & -18 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 12 & -3 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Détaillons la dernière équivalence :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 12 & -6 & 2 \\ 75 & -41 & 13 \\ 19 & -3 & 3 \end{pmatrix} \quad & \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -75 & 41 & -13 \\ 12 & -6 & 2 \\ 19 & -3 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3 & 5 & -1 \\ 12 & -6 & 2 \\ 19 & -3 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -12 & 6 & -2 \\ -3 & 5 & -1 \\ 19 & -3 & 3 \end{pmatrix} \\
& \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -14 & 2 \\ -3 & 5 & -1 \\ 19 & -3 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -19 & 3 & -3 \\ -3 & 5 & -1 \\ 0 & -14 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & -27 & 3 \\ -3 & 5 & -1 \\ 0 & -14 & 2 \end{pmatrix} \\
& \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -1 & -27 & 3 \\ 0 & -14 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -86 & 10 \\ -1 & -27 & 3 \\ 0 & -14 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 27 & -3 \\ 0 & -86 & 10 \\ 0 & -14 & 2 \end{pmatrix} \\
& \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -86 & 10 \\ 0 & -14 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -14 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \\
& \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix} \\
& \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Exercice 23

Soit $\mathbb{k}$ un corps commutatif. Soit G un sous-groupe fini du groupe multiplicatif $\mathbb{k}^\times = \mathbb{k} \smallsetminus \{0\}$ de $\mathbb{k}$. Montrer que G est cyclique.

Solution 23

Nous utilisons le théorème de structure des groupes abéliens finis. Si $|\mathrm{G}| > 1$, alors il existe une suite d'entiers $1 < a_1 \mid a_2 \mid \ldots \mid a_r$ tels que

$$\mathrm{G} \simeq \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/a_2\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/a_r\mathbb{Z}$$

Montrons que $r = 1$. Puisque $a_r\mathrm{G} = \{0\}$ nous avons

$$\#\{z \in \mathbb{k} \mid z^{a_r} = 1\} \geqslant |\mathrm{G}| = a_1 a_2 \ldots a_r.$$

Par ailleurs le nombre de racines dans $\mathbb{k}$ du polynôme $X^{a_r} - 1 \in \mathbb{k}[X]$ est inférieur ou égal à son degré parce que $\mathbb{k}$ est commutatif. Il en résulte l'inégalité $a_1 a_2 \ldots a_r \leqslant a_r$ qui conduit à $r = 1$.