

Feuille d'exercices n° 6

Exercice 1

Montrer que tout groupe fini G admet une représentation fidèle sur tout corps $\mathbb{k}$.

Exercice 2

Montrer que si G est un groupe d'ordre fini n , si ρ est une représentation de G , alors pour tout g dans G $\rho(g)$ est diagonalisable et son spectre est inclus dans μ_n .

Exercice 3

Soit G un groupe fini. Soit H un sous-groupe distingué de G . Notons $\pi: G \rightarrow G/H$ la projection canonique. Soit ρ une représentation complexe de G/H .

- Montrer que $\rho \circ \pi$ est une représentation de G .
- Montrer que ρ est irréductible si et seulement si $\rho \circ \pi$ est irréductible.

Exercice 4

Soient V un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, G un groupe et (V, ρ) une représentation de G . On suppose qu'il existe $v \in V$ tel que $\{\rho(g)v \mid g \in G\}$ forme une base de V .

Montrer que (V, ρ) est isomorphe à la représentation régulière de G .

Exercice 5

Soit $G = \mathcal{S}_3$ et soit V un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel possédant une base indexée par les éléments de G . Considérons l'application $T: G \rightarrow \text{GL}(V)$ définie par

$$T(g)(e_\tau) = e_{g\tau g^{-1}}.$$

- Montrer que T est une représentation de G .
- Soit j une racine cubique primitive de 1. Soit W le sous-espace de V dont une base est

$$\alpha = e_{(12)} + je_{(13)} + j^2e_{(23)} \qquad \beta = e_{(12)} + j^2e_{(13)} + je_{(23)}$$

Montrer que W est une sous- G -représentation de V . W est-il irréductible ?

- Déterminer la décomposition de V en somme directe de sous-espaces irréductibles et expliciter l'action de G sur chacun de ses sous-espaces.

Exercice 6

Soit p un nombre premier. Soit $\mathbb{k}$ un corps algébriquement clos de caractéristique différente de p . Soit G un p -groupe.

Montrer que G possède une représentation non triviale de dimension 1 sur $\mathbb{k}$.

Exercice 7

Soit G un groupe fini et soit χ un caractère de G vérifiant

$$\forall g \in G \quad g \neq e \Rightarrow \chi(g) = 0.$$

Montrer que χ est un multiple entier du caractère de la représentation régulière de G .

Exercice 8

Soit $\mathbb{H}_8 := \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ le groupe des quaternions. Ecrire la table de caractères de $\mathbb{H}_8$ et décrire les représentations irréductibles.

Indication : On rappelle que $\mathbb{H}_8$ s'identifie à un sous-groupe de $SU(2, \mathbb{C})$ en posant : $I = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ et $K = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$.

Exercice 9

Décrire les représentations irréductibles du groupe symétrique $\mathcal{S}_3$ et écrire sa table de caractères.

Exercice 10 [Table de caractères du groupe symétrique $\mathcal{S}_4$]

- Décrire les représentations irréductibles de $\mathcal{S}_4$ et dresser sa table des caractères.
- Déterminer les sous-groupes distingués de $\mathcal{S}_4$ à partir de sa table des caractères.
- On rappelle que $\mathcal{S}_4$ s'identifie au groupe des isométries directes d'un cube (ou d'un octaèdre) et également au groupe des isométries (directes et indirectes) d'un tétraèdre. Que pensez-vous des représentations de dimension 3 associées ?

Exercice 11

Décrire les représentations irréductibles du groupe $\mathcal{A}_4$ et écrire sa table de caractères.

Exercice 12

Soit G un groupe fini. Soit H un sous-groupe de G . Soit π une représentation de G de caractère χ .

- Montrer que la restriction de π à H a pour caractère la restriction $\chi|_H$.
- Si π est irréductible, est-ce que $\chi|_H$ est un caractère irréductible ?

Exercice 13

Soit G un groupe fini. Soit H un sous-groupe de G . Soit (π, V) une représentation de H . On pose

$$W = \{f: G \rightarrow V \mid \forall x \in G \forall h \in H \quad f(hx) = \pi(h)f(x)\}$$

avec une action de G donnée par $g(f): x \mapsto f(xg)$.

- Montrer que W est une représentation de G . Quelle est sa dimension ?
- Si π est irréductible, W est-elle une représentation irréductible de G ?

Exercice 14 [Représentations et sous-groupes distingués, Peyre, l'algèbre discrète de la transformée de Fourier, pages 231-232]

Soit G un groupe fini dont e_G est l'élément neutre. Soient $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r$ un ensemble de représentants des classes d'isomorphismes de représentations irréductibles. Soient $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_r$ les caractères irréductibles associés. Posons

$$K_{\chi_i} = \{g \in G \mid \chi_i(g) = \chi_i(e_G)\}$$

- Soit $\rho: G \rightarrow GL(V)$ une représentation de caractère χ_V sur un espace V de dimension d . Soit g un élément d'ordre k de G . Alors
 - $\rho(g)$ est diagonalisable ;
 - χ_V est somme de $\chi_V(1) = \dim V = d$ racines k ième de l'unité ;
 - $|\chi_V(g)| \leq \chi_V(e_G) = d$;
 - $K_{\chi_V} = \{x \in G, \chi_V(x) = \chi_V(e_G)\}$ est un sous-groupe distingué de G . On l'appelle noyau de la représentation.
- Soit $N \triangleleft G$ un sous-groupe distingué de G . Soit ρ_U une représentation de G/N sur un espace vectoriel U . Il existe une représentation canonique de G sur U telle que les sous-représentations de U sous l'action de G/N soient exactement celles de U sous l'action de G .

- c) Soit V un espace vectoriel de dimension égale à l'ordre de G . Soit $(b_t)_{t \in G}$ une base de V . La représentation régulière de G est la représentation

$$\begin{aligned} \rho_{\text{reg}}: G &\rightarrow \text{GL}(V) \\ g &\mapsto \rho_{\text{reg}}(g): V \rightarrow V \\ &\quad b_t \mapsto b_{gt} \end{aligned}$$

Soit $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation de G . La représentation est fidèle si ρ est injectif.

Montrer que la représentation régulière est fidèle.

- d) Montrer que les sous-groupes distingués de G sont les

$$\bigcap_{i \in I} K_{\chi_i}$$

où $I \subset \{1, 2, 3, \dots, r\}$.

- e) Montrer que G est simple si et seulement si

$$\forall i \neq 1, \forall g \in G \quad \chi_i(g) \neq \chi_i(e_G).$$

Exercice 15

Le but de cet exercice est de montrer que le centre du groupe $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ est le groupe des homothéties.

Une représentation ρ du groupe $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ est donnée par son action naturelle sur $\mathbb{C}^n$.

1. Montrer que la représentation ρ est irréductible.
2. Montrer que tout élément du centre de $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ est un morphisme de la représentation ρ , *i.e.* montrer que pour tout élément h du centre et pour tout élément M de $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ on a

$$\rho(M) \circ h = Mh = hM = h \circ \rho(M).$$

3. Conclure en utilisant le Lemme de SCHUR.

Exercice 16

Soit G un groupe abélien.

1. Si $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ est une représentation de G , montrer que tout élément G de G définit un G -morphisme $V \rightarrow V$.
2. En déduire que toute représentation irréductible de G est de dimension 1.
3. Donner toutes les représentations irréductibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 17

Soit G un groupe fini. Soit H un sous-groupe abélien de G .

Montrer que toute représentation irréductible de G est de dimension au plus $[G : H]$.

Indication : si V est une représentation irréductible de G , c'est aussi une représentation de H . On pourra considérer la représentation de G engendrée par une sous-représentation de H .

Exercice 18

Montrer que tout groupe non abélien admet une représentation irréductible de dimension > 1 .

Exercice 19

Montrer que si V est une représentation d'un groupe fini vérifiant $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 2$, alors V est somme de deux représentations irréductibles.

Exercice 20

Soit $\mathcal{S}_3$ le groupe des permutations de $\{1, 2, 3\}$.

Notons e , s et t les trois classes de conjugaison de $\mathcal{S}_3$ où e est la classe de conjugaison de l'identité, s celle des transpositions et t celle des 3-cycles.

1. Montrer (sans les construire) que $\mathcal{S}_3$ a deux représentations irréductibles de dimension 1 et une de dimension 2.
2. Notons χ_1 le caractère de la représentation triviale, χ_2 celui de la signature sgn qui est l'autre représentation de dimension 1 et θ celui de la représentation W de dimension 2. De quelle représentation $\psi = \chi_1 + \chi_2 + 2\theta$ est-il le caractère ? Compléter la table

	e	s	t
χ_1			
χ_2			
$\chi_1 + \chi_2 + 2\theta$			
θ			

3. Faisons agir $\mathcal{S}_3$ sur lui-même par conjugaison intérieure ($g \cdot x = gxg^{-1}$). Notons V la représentation de permutation associée et χ son caractère. Calculer χ . En déduire les multiplicités de la représentation triviale, de la représentation sgn et de la représentation W dans la décomposition de V .

Exercice 21

On se propose d'établir la table des caractères du groupe $\mathcal{S}_4$ des permutations de $\{1, 2, 3, 4\}$. Les partitions de 4 sont

$$4 \qquad 3+1 \qquad 2+2 \qquad 2+1+1 \qquad 1+1+1+1;$$

il en résulte que le groupe $\mathcal{S}_4$ a 5 classes de conjugaison : la classe C_1 de l'élément neutre (1 élément), celle C_2 des transpositions (6 éléments), celle $C_{2,2}$ des produits de deux transpositions de supports disjoints (3 éléments), celle C_3 des 3-cycles (8 éléments), celle C_4 des 4-cycles (6 éléments) ;

	1	6	3	8	6
	C_1	C_2	$C_{2,2}$	C_3	C_4
$\chi_{\rho_{\text{triv}}}$	1	1	1	1	1
sgn	1	-1	1	1	-1
θ	2	0	2	-1	0
χ_1	3	1	-1	0	-1
χ_2	3	-1	-1	0	1

1. Soit V la représentation de permutation associée à l'action de $\mathcal{S}_4$ sur $\{1, 2, 3, 4\}$.
 - a) Calculer χ_V et $\langle \chi_V, \chi_V \rangle$. En déduire que V est la somme directe $V_1 \oplus V_2$ de deux représentations irréductibles V_1, V_2 non isomorphes.
 - b) Déterminer les sous-espaces V_1 et V_2 de V et montrer, en revenant à la définition, que ce sont des représentations irréductibles de $\mathcal{S}_4$.
 - c) Calculer les caractères de V_1 et V_2 . Quelles lignes de la table cela permet-il de remplir ?
2. Quelle est la seconde représentation de dimension 1 ? Comment peut-on obtenir la seconde de dimension 3 (pourquoi est-elle irréductible et différente de celle déjà construite ?) ?
3. Comment peut-on compléter la table des caractères de $\mathcal{S}_4$?

Exercice 22

Soit $\mathbb{k}$ un corps. Soit $G \subset \text{GL}(2, \mathbb{k})$ le sous-groupe des $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{k}^*$ et $b \in \mathbb{k}$. Faisons agir G sur $\mathbb{k}$ par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = ax + b.$$

1. Calculer

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

En déduire que les classes de conjugaison de G sont

$$C_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{k} \setminus \{0\} \right\}$$

et les

$$D_a = C_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{k} \right\}$$

pour $a \in \mathbb{k}^* \setminus \{1\}$.

- Supposons désormais que $\mathbb{k}$ est fini, de cardinal q et donc que $|\mathbf{G}| = q(q-1)$ et $\mathbf{G}$ compte q classes de conjugaison. Désignons par V la représentation de permutation de $\mathbf{G}$ associée à l'action de $\mathbf{G}$ sur $\mathbb{k}$ et W l'hyperplan de V défini par

$$W = \left\{ \sum_{x \in \mathbb{k}} \lambda_x e_x, \sum_{x \in \mathbb{k}} \lambda_x = 0 \right\}$$

Montrer que W est une sous-représentation de V .

- Calculer χ_W ; en déduire que W est irréductible.
- Quelles sont les dimensions des autres représentations irréductibles de $\mathbf{G}$?
- Comment peut-on construire un caractère linéaire de $\mathbf{G}$ à partir d'un caractère linéaire de $\mathbb{k}^*$?

En déduire que si $\mathbb{k} = \mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, alors la table des caractères de $\mathbf{G}$ est la suivante

	C_1	N	D_2	D_4	D_3
χ_{triv}	1	1	1	1	1
η	1	1	-1	1	-1
η^2	1	1	1	-1	-1
η^3	1	1	-1	-1	1
χ_W	2	-2	0	0	0

- Supposons que $q = 4$. Établir la table des caractères de $\mathbf{G}$. Cette table vous rappelle-t-elle quelque chose? Pouvez-vous expliquer cette coïncidence?

Exercice 23

Soit V une représentation de degré fini d'un groupe $\mathbf{G}$ (non nécessairement fini).

- On suppose qu'il existe une forme hermitienne H sur V invariante par $\mathbf{G}$, c'est-à-dire

$$H(u, v) = H(g \cdot u, g \cdot v) \quad \forall u, v \in V \quad \forall g \in \mathbf{G}.$$

Montrer que toute sous-représentation de V admet une sous-représentation supplémentaire.

- Montrer que si $\mathbf{G}$ est fini, alors il existe toujours une telle forme hermitienne $\mathbf{G}$ -invariante.
- On suppose V irréductible. Montrer que deux formes hermitiennes $\mathbf{G}$ -invariantes sont multiples l'une de l'autre (c'est-à-dire $H_1 = \mu H_2$).

Exercice 24

Soient p un nombre premier et $\mathbf{G}$ un groupe d'ordre p^3 non abélien. On note $\mathbb{U}_p = \{z \in \mathbb{C} \mid z^p = 1\}$.

- Montrer que les représentations irréductibles de $\mathbf{G}$ ont dimension 1 ou p . Que peut-on dire du nombre des représentations de $\mathbf{G}$ dans $\mathbb{C}$?
- Montrer que le nombre de classes d'isomorphie de représentations irréductibles de dimension p de $\mathbf{G}$ est $p-1$ et donner l'ordre de l'abélianisé de $\mathbf{G}$.

Soit $g \in \mathbf{G} \setminus D(\mathbf{G})$.

- Montrer que pour tout $\zeta \in \mathbb{U}_p$ il existe une représentation V de dimension 1 de $\mathbf{G}$ telle que $\chi_V(g) = \zeta$.
- Déduire de ce qui précède et du fait que si $\mathbf{G}$ est un groupe fini le produit d'un caractère irréductible de $\mathbf{G}$ par un caractère de degré 1 est un caractère irréductible de $\mathbf{G}$ de même degré que si V est une représentation irréductible de dimension p de $\mathbf{G}$, alors $\chi_V(g) = 0$.
- Montrer que si V est une représentation de $\mathbf{G}$ de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$) alors l'un des nombres $\chi_V(g)$, $\chi_V(g^2)$, ..., $\chi_V(g^n)$ est non nul (on pourra considérer la somme $\sum_{\lambda} C(\lambda)$, où C désigne le polynôme caractéristique de $v \cdot gv$, et λ parcourt ses n valeurs propres).
- Déduire des questions 4. et 5. que l'abélianisé de $\mathbf{G}$ n'est pas cyclique. à quel groupe est-il isomorphe?
- Montrer à l'aide de la question 4. que si $g' \in D(\mathbf{G})$ et si (V, ρ) est une représentation irréductible de $\mathbf{G}$ alors $|\chi_V(g')| = \dim V$. Préciser les endomorphismes $\rho(g')$ pour g' parcourant $D(\mathbf{G})$.

8. Décrire le centre de G et donner le cardinal des différentes classes de conjugaison de G .
9. Donner explicitement la table des caractères de G lorsque $p = 3$.

Exercice 25

1. Soit G un groupe abélien fini. Pour $g \in G$ notons δ_g l'élément de $\mathbb{C}[G]$ qui vaut 1 en g et 0 sur $G \setminus \{g\}$.
 - a) Énoncer la formule d'inversion de Fourier et l'appliquer aux éléments δ_g de $\mathbb{C}[G]$.
 - b) En déduire que le morphisme naturel de G dans son bidual $\widehat{\widehat{G}}$ est injectif.
2. Soit V une représentation d'un groupe fini G qui est somme directe de r représentations irréductibles deux à deux non isomorphes.
 - a) Décrire l'algèbre $\text{End}_G(V)$ des G -endomorphismes de V .
 - b) Déterminer toutes les sous-représentations de V .
3. Soit G un groupe fini. Montrer que le produit d'un caractère irréductible de G par un caractère de degré 1 est un caractère irréductible de G de même degré.