Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 6

Exercice 1

Montrer que tout groupe fini G admet une représentation fidèle sur tout corps $\mathbb{k}$.

Solution 1

Première réponse possible : la représentation régulière de G sur $\mathbb{k}$ répond à la question.

Deuxième réponse possible : le théorème de Cayley assure que G se plonge dans le groupe des permutations de G et ce dernier groupe se plonge dans un groupe linéaire via les matrices de permutations.

Exercice 2

Montrer que si G est un groupe d'ordre fini n, si ρ est une représentation de G, alors pour tout g dans G $\rho(g)$ est diagonalisable et son spectre est inclus dans μ_n.

Solution 2

Soit G un groupe d'ordre fini n. Soit $\rho\colon \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(V)$, où V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension fini, une représentation de G.

Soit g un élément de G. L'ordre de g divise n ; en particulier g est d'ordre fini. L'automorphisme $\rho(g)$ est d'ordre fini puisque g l'est, *i.e.* il existe un entier k tel que $\rho(g)^k = \mathrm{Id}_V$. Alors :

$$X^k - 1 = \prod_{j=0}^{k-1}(X - \zeta^j) \in \mathbb{C}[X]$$

où ζ est une racine primitive $k$ième de l'unité, est un polynôme annulateur de $\rho(g)$ scindé à facteurs simples ; $\rho(g)$ est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont les racines $k$ième de l'unité.

Exercice 3

Soit G un groupe fini. Soit H un sous-groupe distingué de G. Notons $\pi\colon \mathrm{G} \to {}^{\mathrm{G}}\!/_{\mathrm{H}}$ la projection canonique. Soit ρ une représentation complexe de ${}^{\mathrm{G}}\!/_{\mathrm{H}}$.

a) Montrer que $\rho \circ \pi$ est une représentation de G.

b) Montrer que ρ est irréductible si et seulement si $\rho \circ \pi$ est irréductible.

Solution 3

Soit G un groupe fini. Soit H un sous-groupe distingué de G. Notons $\pi\colon \mathrm{G} \to {}^{\mathrm{G}}\!/_{\mathrm{H}}$ la projection canonique. Soit ρ une représentation complexe de ${}^{\mathrm{G}}\!/_{\mathrm{H}}$.

a) Montrons que $\rho \circ \pi$ est une représentation de G.

   La composée de deux morphismes de groupes étant un morphisme de groupes, $\rho \circ \pi$ est une représentation de G.

b) Montrons que ρ est irréductible si et seulement si $\rho \circ \pi$ est irréductible.

   - Commençons par montrer que si $\rho \circ \pi$ est irréductible alors ρ l'est.
     Plus généralement si $f\colon \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ est un morphisme de groupes et si ρ est une représentation de G', on a l'implication suivante

     si $\rho \circ f$ est irréductible (comme représentation) de G, alors ρ est irréductible.

     En effet tout sous-espace stable par G' est stable par G puisque l'action de G se factorise par G'.

- Montrons que si ρ est irréductible, alors $\rho \circ \pi$ est irréductible.
  Soit W un sous-espace strict stable par G. Pour tout $\overline{x} \in {}^{\mathrm{G}}\!/_{\mathrm{H}}$ il existe $g \in \mathrm{G}$ tel que $\pi(g) = \overline{x}$ (ρ est surjective, si elle ne l'était pas l'implication serait fausse). Comme W est stable par g, il est stable par $\overline{x}$. Ainsi W est stable par tout élément de ${}^{\mathrm{G}}\!/_{\mathrm{H}}$. La représentation ρ étant irréductible $W = 0$ et $\rho \circ \pi$ est irréductible.

Exercice 4

Soient V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, G un groupe et (V, ρ) une représentation de G. On suppose qu'il existe $v \in V$ tel que $\{\rho(g)v \mid g \in \mathrm{G}\}$ forme une base de V.

Montrer que (V, ρ) est isomorphe à la représentation régulière de G.

Solution 4

Soient V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, G un groupe et (V, ρ) une représentation de G. On suppose qu'il existe $v \in V$ tel que $\{\rho(g)v \mid g \in \mathrm{G}\}$ forme une base de V.

Montrons que (V, ρ) est isomorphe à la représentation régulière de G.

Soit W un espace vectoriel de base $\{e_j\}_{g \in \mathrm{G}}$; prendre par exemple $W = \mathbb{C}^G$ et e_g = indicatrice de g. Rappelons que la représentation régulière ρ_R de G opère sur W par

$$\rho_R(h)(e_g) = e_{hg}$$

Considérons l'application linéaire ϕ définie sur la base (e_g) oar

$$\phi \colon W \to V, \qquad\qquad e_g \mapsto \rho(g)v$$

Puisque par hypothèse $(\rho(g)(v))_{g \in \mathrm{G}}$ est une base de V ϕ est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. Par définition ϕ est G-équivariante, *i.e.* $\phi \circ \rho_R(g) = \rho(g) \circ \phi$. En effet d'une part

$$(\phi \circ \rho_R(g))(e_h) = \phi(e_{gh}) = \rho(gh)(v)$$

et d'autre part

$$(\rho(g) \circ \phi)(e_h) = \rho(g)(\phi(e_h)) = \rho(g)(\rho(h)(v)) = \rho(gh)(v)$$

Ainsi ϕ est un isomorphisme entre ρ et ρ_R.

Exercice 5

Soit $\mathrm{G} = \mathcal{S}_3$ et soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel possédant une base indexée par les éléments de G. Considérons l'application $T \colon \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(V)$ définie par

$$T(g)(e_\tau) = e_{g\tau g^{-1}}.$$

a) Montrer que T est une représentation de G.

b) Soit j une racine cubique primitive de 1. Soit W le sous-espace de V dont une base est

$$\alpha = e_{(1\,2)} + je_{(1\,3)} + j^2 e_{(2\,3)} \qquad\qquad \beta = e_{(1\,2)} + j^2 e_{(1\,3)} + je_{(2\,3)}$$

   Montrer que W est une sous-G-représentation de V. W est-il irréductible ?

c) Déterminer la décomposition de V en somme directe de sous-espaces irréductibles et expliciter l'action de G sur chacun de ses sous-espaces.

Solution 5

Soit $\mathrm{G} = \mathcal{S}_3$ et soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel possédant une base indexée par les éléments de G. Considérons l'application $T \colon \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(V)$ définie par

$$T(g)(e_\tau) = e_{g\tau g^{-1}}.$$

a) Montrons que T est une représentation de G.
   T est un morphisme de G dans $\mathrm{GL}(V)$: soient g et g' dans G on a d'une part

$$T(gg')(e_\tau) = e_{(gg')\tau(gg')^{-1}} = e_{gg'\tau g'^{-1}g^{-1}}$$

   et d'autre part

$$T(g) \circ T(g')(e_\tau) = T(g)(e_{g'\tau g'^{-1}}) = e_{gg'\tau g'^{-1}g^{-1}}$$

   d'où $T(gg') = T(g) \circ T(g')$.

b) Soit j une racine cubique primitive de 1. Soit W le sous-espace de V dont une base est

$$\alpha = e_{(1\,2)} + je_{(1\,3)} + j^2 e_{(2\,3)} \qquad\qquad \beta = e_{(1\,2)} + j^2 e_{(1\,3)} + je_{(2\,3)}$$

Montrons que W est une sous-G-représentation de V.
Le groupe $\mathcal{S}_3$ est engendré par (1 2) et (1 2 3). Il suffit donc de montrer que l'espace engendré par α et β est stable par $T((1\ 2))$ et $T((1\ 2\ 3))$. Un calcul montre que

$$T((1\ 2))(\alpha) = \beta, \qquad T((1\ 2\ 3))(\alpha) = j\alpha, \qquad T((1\ 2))(\beta) = \alpha, \qquad T((1\ 2\ 3))(\beta) = j^2\beta$$

W est-il irréductible ?
Un calcul montre qu'aucun sous-module de W de dimension 1 n'est stable par $\mathcal{S}_3$ donc W est irréductible.

c) Déterminons la décomposition de V en somme directe de sous-espaces irréductibles et expliciter l'action de G sur chacun de ses sous-espaces.
Remarquons que si C est une classe de conjugaison dans $\mathcal{S}_3$, alors $\sum_{g\in C} e_g$ est stable par T (c'est par définition même de T). On trouve ainsi trois sous-espaces stables sous $\mathcal{S}_3$ qui sont les droites

$$W_1 = \mathbb{C}\mathrm{id}, \qquad W_2 = \mathbb{C}(e_{(1\ 2)} + e_{(1\ 3)} + e_{(2\ 3)}), \qquad W_3 = \mathbb{C}(e_{(1\ 2\ 3)} + e_{(1\ 3\ 2)})$$

Enfin si on note sgn la signature on obtient

$$T(g)(e_{(1\ 2\ 3)} - e_{(1\ 3\ 2)}) = \mathrm{sgn}(g)(e_{(1\ 2\ 3)} - e_{(1\ 3\ 2)})$$

En effet d'une part

$$\begin{aligned} T((1\ 2))(e_{(1\ 2\ 3)} - e_{(1\ 3\ 2)}) &= e_{(1\ 2)(1\ 2\ 3)(1\ 2)} - e_{(1\ 2)(1\ 3\ 2)(1\ 2)} \\ &= e_{(1\ 3\ 2)} - e_{(1\ 2\ 3)} \\ &= -(e_{(1\ 2\ 3)} - e_{(1\ 3\ 2)}) \\ &= \mathrm{sgn}((1\ 2))(e_{(1\ 2\ 3)} - e_{(1\ 3\ 2)}) \end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned} T((1\ 2\ 3))(e_{(1\ 2\ 3)} - e_{(1\ 3\ 2)}) &= e_{(1\ 2\ 3)(1\ 2\ 3)(1\ 2\ 3)^{-1}} - e_{(1\ 2\ 3)(1\ 3\ 2)(1\ 2\ 3)^{-1}} \\ &= e_{(1\ 2\ 3)(1\ 2\ 3)(1\ 3\ 2)} - e_{(1\ 2\ 3)(1\ 3\ 2)(1\ 3\ 2)} \\ &= (e_{(1\ 2\ 3)} - e_{(1\ 3\ 2)}) \\ &= \mathrm{sgn}((1\ 2\ 3))(e_{(1\ 2\ 3)} - e_{(1\ 3\ 2)}) \end{aligned}$$

L'espace $W_4 = \mathbb{C}(e_{(1\ 2\ 3)} - e_{(1\ 3\ 2)})$ est donc stable par $\mathcal{S}_3$.
On a finalement $V = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4 \oplus W$ où W désigne l'unique représentation irréductible de dimension 2.

Exercice 6

Soit p un nombre premier. Soit $\Bbbk$ un corps algébriquement clos de caractéristique différente de p. Soit G un p-groupe.

Montrer que G possède une représentation non triviale de dimension 1 sur $\Bbbk$.

Solution 6

Soit p un nombre premier. Soit $\Bbbk$ un corps algébriquement clos de caractéristique différente de p. Soit G un p-groupe.

Montrons que G possède une représentation non triviale de dimension 1 sur $\Bbbk$.

Le groupe G admet un sous-groupe distingué H d'indice p. Par conséquent $\mathrm{G}/\mathrm{H} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Le corps $\Bbbk$ est algébriquement clos de caractéristique $\neq p$. Par suite le polynôme $X^p - 1$ est scindé à racines simples. Ainsi les racines p-ième de l'unité dans $\Bbbk^*$ forment un sous-groupe cyclique d'ordre p isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ d'où une injection de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans $\Bbbk^*$. Le morphisme

$$\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}/\mathrm{H} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \Bbbk^*$$

est donc une représentation non triviale de dimension 1 de G sur $\Bbbk$.

Exercice 7

Soit G un groupe fini et soit χ le caractère d'une représentation ρ de G vérifiant

$$\forall\, g \in \mathrm{G} \qquad g \neq e \Rightarrow \chi(g) = 0.$$

Montrer que χ est un multiple entier du caractère de la représentation régulière de G.

Solution 7

Soit G un groupe fini et soit χ le caractère d'une représentation ρ de G vérifiant

$$\forall\, g \in \mathrm{G} \qquad g \neq e \Rightarrow \chi(g) = 0.$$

Montrons que χ est un multiple entier du caractère de la représentation régulière de G.

Rappel : le caractère de la représentation régulière est donné par

$$\chi_{\rho_R}(g) = \begin{cases} |\mathrm{G}| \text{ si } g = e \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Il suffit de montrer que $|\mathrm{G}|$ divise $\chi(e)$. Notons χ_{triv} le caractère de la représentation triviale de G. On a

$$\langle \chi, \chi_{\mathrm{triv}} \rangle = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{g \in \mathrm{G}} \chi(g)\overline{\chi_{\mathrm{triv}}(g)}$$

Comme $\chi(g) = 0$ pour tout $g \neq e$ on a $\displaystyle\sum_{g \in \mathrm{G}} \chi(g)\overline{\chi_{\mathrm{triv}}(g)} = \chi(e)\overline{\chi_{\mathrm{triv}}(e)} = \chi(e)$ autrement dit

$$\langle \chi, \chi_{\mathrm{triv}} \rangle = \frac{1}{|\mathrm{G}|}\chi(e)$$

et

$$|\mathrm{G}|\langle \chi, \chi_{\mathrm{triv}} \rangle = \chi(e).$$

Remarquons

- ◇ d'une part que $\chi(e)$ est un entier : pour toute représentation ρ nous avons $\chi_\rho(e) = \mathrm{tr}(\rho(e)) = \mathrm{tr}(\mathrm{id}_{\mathrm{GL}(V)}) = \dim V$;
- ◇ d'autre part que $\langle \chi, \chi_{\mathrm{triv}} \rangle$ est un entier : la représentation ρ s'écrit $\rho = \oplus \rho_i^{n_i}$ où les ρ_i désignent les représentations irréductibles de G et les n_i des entiers naturels uniquement déterminés par ρ. Quitte à réindicer les ρ_i on peut supposer $\rho_1 = \rho_{\mathrm{triv}}$, *i.e.* $\rho = \rho_{\mathrm{triv}}^{n_1} \oplus \left(\bigoplus_i \rho_i^{n_i}\right)$. Ainsi $\langle \chi, \chi_{\mathrm{triv}} \rangle = n_1 \in \mathbb{N}$.

Il en résulte que χ est un multiple entier du caractère de la représentation régulière de G.

Exercice 8

Soit $\mathbb{H}_8 := \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ le groupe des quaternions. Ecrire la table de caractères de $\mathbb{H}_8$ et décrire les représentations irréductibles.

Indication : On rappelle que $\mathbb{H}_8$ s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$ en posant : $I = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ et $K = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$.

Solution 8

On peut vérifier que $\mathbb{H}_8$ admet cinq classes de conjugaison qui sont

$$\{1\}, \quad \{-1\}, \quad \{\pm i\}, \quad \{\pm j\}, \quad \{\pm k\}$$

Le groupe dérivé $D(\mathbb{H}_8)$ de $\mathbb{H}_8$ est donné par : $D(\mathbb{H}_8) = \{\pm 1\}$. Par conséquent

$$\mathbb{H}_8/D(\mathbb{H}_8) = \langle \bar{i}, \bar{j} \,|\, \bar{i}^2 = \bar{j}^2 = 1, \overline{ij} = \overline{ji} \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Ainsi $\mathbb{H}_8$ admet quatre représentations de dimension 1 correspondant aux quatre morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$. Il s'en suit que la cinquième représentation irréductible de $\mathbb{H}_8$ est de dimension 2. Son caractère se déduit des caractères précédents par orthogonalité.

La table des caractères de $\mathbb{H}_8$ est

$\mathbb{H}_8$	1	1	2	2	2
	$\{1\}$	$\{-1\}$	$\{\pm i\}$	$\{\pm j\}$	$\{\pm k\}$
χ_{triv}	1	1	1	1	1
χ_1	1	1	-1	1	-1
χ_2	1	1	1	-1	-1
$\chi_3 = \chi_1\chi_2$	1	1	-1	-1	1
χ_ρ	2	-2	0	0	0

Notons que les tables de $\mathbb{H}_8$ et D_8 sont les mêmes. La table de caractères ne détermine donc pas la classe d'isomorphisme d'un groupe fini.

Exercice 9

Décrire les représentations irréductibles du groupe symétrique $\mathcal{S}_3$ et écrire sa table de caractères.

Solution 9

Les classes de conjugaison de $\mathcal{S}_3$ sont

$$C_1 = \{\mathrm{id}\}, \qquad C_2 = \{(1\ 2),\ (1\ 3),\ (2\ 3)\}, \qquad C_3 = \{(1\ 2\ 3),\ (1\ 3\ 2)\}.$$

Ainsi $\mathcal{S}_3$ a trois représentations irréductibles à équivalence près. Il y a la représentation triviale ρ_{triv} qui est irréductible. On a aussi la représentation signature

$$\mathrm{sgn}\colon \mathcal{S}_3 \to \mathrm{GL}(1,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^*, \qquad \sigma \mapsto \mathrm{sgn}(\sigma)$$

qui est de degré 1 ; elle est irréductible car

$$\langle \chi_{\mathrm{sgn}},\, \chi_{\mathrm{sgn}}\rangle = \frac{1}{6}\Big(\underbrace{1}_{\#C_1} \times \underbrace{1}_{\chi_{\mathrm{sgn}}((\mathrm{id}))} \times \overline{1} + \underbrace{3}_{\#C_2} \times \underbrace{(-1)}_{\chi_{\mathrm{sgn}}((1\ 2))} \times \overline{(-1)} + \underbrace{2}_{\#C_3} \times \underbrace{1}_{\chi_{\mathrm{sgn}}((1\ 2\ 3))} \times \overline{1}\Big) = 1$$

Enfin on a la représentation standard et notée ρ_S. Notons que

$$(\deg \rho_{\mathrm{triv}})^2 + (\deg \mathrm{sgn})^2 + (\deg \rho_S)^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$$

autrement dit $(\deg \rho_{\mathrm{triv}})^2 + (\deg \mathrm{sgn})^2 + (\deg \rho_S)^2 = |\mathcal{S}_3|$.

Ainsi la table de caractères de $\mathcal{S}_3$ est

	C_1	C_2	C_3
$\chi_{\rho_{\mathrm{triv}}}$	1	1	1
sgn	1	-1	1
χ_{ρ_S}	2	0	-1

A noter que les colonnes sont bien orthogonales.

Exercice 10 [Table de caractères du groupe symétrique $\mathcal{S}_4$]

a) Décrire les représentations irréductibles de $\mathcal{S}_4$ et dresser sa table des caractères.
b) Déterminer les sous-groupes distingués de $\mathcal{S}_4$ à partir de sa table des caractères.
c) On rappelle que $\mathcal{S}_4$ s'identifie au groupe des isométries directes d'un cube (ou d'un octaèdre) et également au groupe des isométries (directes et indirectes) d'un tétraèdre. Que pensez-vous des représentations de dimension 3 associées ?

Solution 10

Le groupe symétrique $\mathcal{S}_4$ possède cinq classes de conjugaison :

$$\begin{aligned}
&C_1 = \big\{\mathrm{id}\big\},\\
&C_2 = \big\{(1\ 2),\ (1\ 3),\ (1\ 4),\ (2\ 3),\ (2\ 4),\ (3\ 4)\big\},\\
&C_3 = \big\{(1\ 2)(3\ 4),\ (1\ 3)(2\ 4),\ (1\ 4)(2\ 3)\big\},\\
&C_4 = \big\{(1\ 2\ 3),\ (1\ 3\ 2),\ (1\ 2\ 4),\ (1\ 4\ 2),\ (1\ 3\ 4),\ (1\ 4\ 3),\ (2\ 3\ 4),\ (2\ 4\ 3)\big\},\\
&C_5 = \big\{(1\ 2\ 3\ 4),\ (1\ 2\ 4\ 3),\ (1\ 3\ 2\ 4),\ (1\ 3\ 4\ 2),\ (1\ 4\ 2\ 3),\ (1\ 4\ 3\ 2)\big\}.
\end{aligned}$$

Il y a donc cinq représetntations irréductibles à équivalence près. On peut déjà donner deux représentations de degré 1

◇ la représentation triviale ρ_{triv} ;
◇ la représentation signature sgn.

Intéressons-nous à la représentation par permutations. Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{C}^4$. On définit la représentation par permutations par

$$\rho_P \colon \mathcal{S}_4 \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^4) \qquad \sigma \mapsto (e_i \mapsto e_{\sigma(i)}).$$

Cette représentation laisse stable $\mathrm{Vect}(1, 1, 1, 1)$ dont

$$H = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 \,|\, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

est un supplémentaitre stable. Elle induit une représentation ρ_S appelée représentation standard sur H. Comme ρ_P induit la représentation triviale sur $\mathrm{Vect}(1, 1, 1, 1)$ nous avons la relation $\chi_{\rho_P} = \chi_{\rho_{\text{triv}}} + \chi_{\rho_S}$. Reste à savoir si χ_{ρ_S} est irréductible, *i.e.* si $\langle\chi_{\rho_S}, \chi_{\rho_S}\rangle = 1$. Mais $\chi_{\rho_P}(\sigma)$ est le nombre de 1 sur la diagonale de la matrice de permutations σ, c'est-à-dire le nombre de points fixes de σ. Ainsi

$$\chi_{\rho_P}(\mathrm{id}) = 4, \qquad \chi_{\rho_P}((1\ 2)) = 2, \qquad \chi_{\rho_P}((1\ 2)(3\ 4)) = 0, \qquad \chi_{\rho_P}((1\ 2\ 3)) = 1, \qquad \chi_{\rho_P}((1\ 2\ 3\ 4)) = 0$$

(en effet $\mathrm{Fix}(\mathrm{id}) = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $\mathrm{Fix}((1\ 2)) = \{3,\ 4\}$, $\mathrm{Fix}((1\ 2)(3\ 4)) = \emptyset$, $\mathrm{Fix}((1\ 2\ 3)) = \{4\}$ et $\mathrm{Fix}((1\ 2\ 3\ 4)) = \emptyset$) d'où (puisque $\chi_{\rho_S}(g) = \chi_{\rho_P}(g) - \chi_{\rho_{\text{triv}}}(g) = \chi_{\rho_P}(g) - 1$)

$$\chi_{\rho_S}(\mathrm{id}) = 3, \qquad \chi_{\rho_S}((1\ 2)) = 1, \qquad \chi_{\rho_S}((1\ 2)(3\ 4)) = -1, \qquad \chi_{\rho_S}((1\ 2\ 3)) = 0, \qquad \chi_{\rho_S}((1\ 2\ 3\ 4)) = -1.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}\langle\chi_{\rho_S}, \chi_{\rho_S}\rangle &= \frac{1}{|\mathcal{S}_4|}\Big(1 \times 3 \times \overline{3} + 6 \times 1 \times \overline{1} + 3 \times (-1) \times \overline{(-1)} + 8 \times 0 \times \overline{0} + 6 \times (-1) \times \overline{(-1)}\Big) \\ &= \frac{1}{24}(9 + 6 + 3 + 6)\end{aligned}$$

Nous en déduisons que ρ_S est une représentation irréductible de degré 3. Nous la notons ρ_4.

Déterminons les deux autres représentations irréductibles de $\mathcal{A}_4$ notées ρ_3 et ρ_5. Commençons par déterminer leurs degrés : l'identité

$$(\deg \rho_{\text{triv}})^2 + (\deg \mathrm{sgn})^2 + (\deg \rho_3^2)^2 + (\deg \rho_4^2)^2 + (\deg \rho_5^2)^2 = |\mathcal{S}_4|$$

conduit à

$$24 - (\deg \rho_{\text{triv}})^2 - (\deg \mathrm{sgn})^2 - (\deg \rho_4)^2 = (\deg \rho_3)^2 + (\deg \rho_5)^2$$

soit $13 = (\deg \rho_3)^2 + (\deg \rho_5)^2$. Nous en déduisons que $\{\deg \rho_3,\ \deg \rho_5\} = \{2,\ 3\}$.

Considérons la représentation

$$\rho_5 \colon \mathcal{S}_4 \to \mathrm{GL}(H), \qquad \sigma \mapsto \mathrm{sgn}(\sigma)\rho_4(\sigma).$$

Alors $\chi_{\rho_5} = \mathrm{sgn}\chi_{\rho_4}$ d'où

$$\begin{aligned}&\chi_{\rho_S}(\mathrm{id}) = 1 \times 3 = 3, && \chi_{\rho_S}((1\ 2)) = (-1) \times 1 = -1,\\ &\chi_{\rho_S}((1\ 2)(3\ 4)) = 1 \times (-1) = -1, && \chi_{\rho_S}((1\ 2\ 3)) = 1 \times 0 = 0,\\ &\chi_{\rho_S}((1\ 2\ 3\ 4)) = (-1) \times (-1) = 1.\end{aligned}$$

En particulier

$$\langle\chi_{\rho_5}, \chi_{\rho_5}\rangle = \frac{1}{24}\Big(1 \times 3 \times 3 + 6 \times (-1) \times (-1) + 3 \times (-1) \times (-1) + 8 \times 0 \times 0 + 6 \times 1 \times 1\Big) = \frac{1}{24}\Big(9 + 6 + 3 + 6\Big) = 1.$$

Il s'ensuit que ρ_5 est irréductible. De plus $\deg \rho_5 = \dim H = 3$.

Remarque — On peut donner une interprétation géométrique de ρ_5 : c'est la représentation de $\mathcal{S}_4$ comme $\mathrm{Isom}^+(C_6)$.

Commençons à écrire la table de caractères de $\mathcal{S}_4$:

	$C(\mathrm{id})$	$C((1\ 2))$	$C((1\ 2)(3\ 4))$	$C((1\ 2\ 3))$	$C((1\ 2\ 3\ 4))$
$\chi_{\rho_{\text{triv}}}$	1	1	1	1	1
χ_{sgn}	1	-1	1	1	-1
χ_{ρ_3}	2	?	?	?	?
χ_{ρ_4}	3	1	-1	0	-1
χ_{ρ_5}	3	-1	-1	0	1

où $C(g)$ désigne la classe de conjugaison de $g \in \mathcal{S}_4$.

En utilisant que les colonnes de la table de $\mathcal{S}_4$ sont orthogonales nous obtenons

	$C(\text{id})$	$C((1\ 2))$	$C((1\ 2)(3\ 4))$	$C((1\ 2\ 3))$	$C((1\ 2\ 3\ 4))$
$\chi_{\rho_{\text{triv}}}$	1	1	1	1	1
χ_{sgn}	1	-1	1	1	-1
χ_{ρ_3}	2	0	2	-1	0
χ_{ρ_4}	3	1	-1	0	-1
χ_{ρ_5}	3	-1	-1	0	1

Rappelons que les sous-groupes distingués de $\mathcal{S}_4$ sont les intersections $\displaystyle\bigcap_{i\in I} \ker\chi_{\rho_i}$ où $I \subset [\text{triv, sgn, } 3,\ 4,\ 5]$. La table des caractères de $\mathcal{S}_4$ assure que

$$\begin{aligned}
&\ker\chi_{\rho_{\text{triv}}} = \mathcal{S}_4\\
&\ker\chi_{\rho_{\text{sgn}}} = \{\text{id},\ C((1\ 2)(3\ 4)),\ C(1\ 2\ 3)\} = \mathcal{A}_4\\
&\ker\chi_{\rho_3} = \{\text{id},\ C((1\ 2)(3\ 4))\} \simeq \mathcal{K}\\
&\ker\chi_{\rho_4} = \{\text{id}\}\\
&\ker\chi_{\rho_5} = \{\text{id}\}
\end{aligned}$$

Par suite les sous-groupes distingués de $\mathcal{S}_4$ sont

$$\mathcal{S}_4, \qquad \{\text{id}\}, \qquad \mathcal{A}_4, \qquad \{\text{id},\ (1\ 2)(3\ 4),\ (1\ 3)(2\ 4),\ (1\ 4)(2\ 3)\} \simeq \mathcal{K}$$

(on rappelle que $\mathcal{K}$ désigne le groupe de Klein).

Explicitons ρ_3. Nous avons la décomposition en produit semi-direct

$$\mathcal{S}_4 \simeq \mathcal{K} \rtimes \mathcal{S}_3.$$

À cette décomposition correspond un morphisme surjectif de groupes

$$\pi\colon \mathcal{S}_4 \to {}^{\mathcal{S}_4}\!/_{\mathcal{K}} \simeq \mathcal{S}_3$$

d'où par composition avec la représentation standard $\widetilde{\rho_S}$ de $\mathcal{S}_3$ une représentation de degré 2

$$\rho_3\colon \mathcal{S}_4 \xrightarrow{\pi} \mathcal{S}_3 \xrightarrow{\widetilde{\rho_S}} \mathrm{GL}(\widetilde{H})$$

où $\widetilde{H}$ désigne l'hyperplan de $\mathbb{C}^3$ d'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$ et $\widetilde{\rho_S}\colon \mathcal{S}_3 \to \mathrm{GL}(\widetilde{H})$ la représentation standard de $\mathcal{S}_3$ induite par la représentation par permutation

$$\widetilde{\rho_P}\colon \mathcal{S}_3 \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^3), \qquad \sigma \mapsto (e_i \mapsto e_{\sigma(i)}).$$

Pour tout σ dans $\mathcal{S}_4$ nous avons

$$\chi_{\rho_3}(\sigma) = \chi_{\widetilde{\rho_S}}(\pi(\sigma))$$

soit

$$\begin{aligned}
&\chi_{\rho_3}\big(\text{id}\big) = 2\\
&\chi_{\rho_3}\big((1\ 2)\big) = 0\\
&\chi_{\rho_3}\big((1\ 2)(3\ 4)\big) = 2\\
&\chi_{\rho_3}\big((1\ 2\ 3)\big) = -1\\
&\chi_{\rho_3}\big((1\ 2\ 3\ 4)\big) = \chi_{\rho_3}\big((1\ 4)(1\ 2\ 3)\big) = 0
\end{aligned}$$

De plus

$$\langle\chi_{\rho_3},\ \chi_{\rho_3}\rangle = \frac{1}{24}\Big(1\times 2\times 2 + 6\times 0\times 0 + 3\times 2\times 2 + 8\times(-1)\times(-1) + 6\times 0\times 0\Big) = \frac{1}{24}\Big(4+12+8\Big) = 1$$

autrement dit χ_{ρ_3} est irréductible.

Exercice 11

Décrire les représentations irréductibles du groupe $\mathcal{A}_4$ et écrire sa table de caractères.

Solution 11

Nous allons établir la table des caractères de $\mathcal{A}_4$. Il y a plusieurs façons d'arriver au résultat. La manière la plus systématique consiste à déterminer les classes de conjugaison de $\mathcal{A}_4$, construire toutes les représentations irréductibles de $\mathcal{A}_4$ et calculer la valeur de leurs caractères sur les classes de conjugaison. C'est ce que nous allons faire avant de montrer que certains des résultats démontrés précédemment permettent quelques raccourcis.

a) Désignons par t le 3-cycle $(1\ 2\ 3)$. Notons que $t^2 = (1\ 3\ 2)$ et que comme t est d'ordre 3, le sous-groupe $\mathrm{T} = \langle t\rangle = \{\mathrm{id},\, t,\, t^2\}$ de $\mathcal{A}_4$ engendré par t est d'ordre 3.

b) Le sous-groupe $\mathrm{H} = \{\mathrm{id},\, s_2,\, s_3,\, s_4\}$ de $\mathcal{A}_4$ est abélien et distingué dans $\mathcal{A}_4$. En effet un 2-Sylow de $\mathcal{A}_4$ est d'ordre 4 et comme H est d'ordre 4 et contient tous les éléments de $\mathcal{A}_4$ d'ordre divisant 4 cela montre qu'il n'y a qu'un seul 2-Sylow qui est par conséquent distingué dans $\mathcal{A}_4$ et que ce 2-Sylow est H.
De plus tous les éléments de H sont d'ordre divisant 2 donc H est abélien [1].

c) Tout élément de $\mathcal{A}_4$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $t^\ell h$ avec $\ell \in \{0,\, 1,\, 2\}$ et $h \in \mathrm{H}$.
Considérons

$$\varphi\colon \mathrm{T}\times\mathrm{H} \to \mathcal{A}_4, \qquad\qquad (c,h) \mapsto ch.$$

C'est une injection de $\mathrm{T}\times\mathrm{H}$ dans $\mathcal{A}_4$. En effet soient (c_1,h_1) et (c_2,h_2) dans $\mathrm{T}\times\mathrm{H}$ tels que $c_1h_1 = c_2h_2$. Alors $c_2^{-1}c_1 = h_2h_1^{-1}$; en particulier puisque $c_2^{-1}c_1$ appartient à T et $h_2h_1^{-1}$ appartient à H, les éléments $c_2c_1^{-1}$ et $h_2h_1^{-1}$ appartiennent à $\mathrm{T}\cap\mathrm{H}$. Or $\mathrm{T}\cap\mathrm{H} = \big\{\mathrm{id}\big\}$ donc $(c_1,h_1) = (c_2,h_2)$. Remarquons que $|\mathrm{T}\times\mathrm{H}| = |\mathcal{A}_4|$; il en résulte que φ est une bijection ce qui permet de conclure.

d) On peut vérifier que les 3-cycles t et t^2 ne commutent à aucun élément de $\mathrm{H}\smallsetminus\{\mathrm{id}\}$ par un calcul direct.

e) Montrons que les classes de conjugaison de $\mathcal{A}_4$ sont

$$C_1 = \big\{\mathrm{id}\big\}, \qquad C_2 = \mathrm{H}\smallsetminus\big\{\mathrm{id}\big\}, \qquad C_3 = t\mathrm{H}, \qquad C_4 = t^2\mathrm{H}.$$

Comme dans tout groupe la classe de conjugaison de l'élément neutre a un seul élément C_1 appartient à l'ensemble $\mathrm{conj}(\mathcal{A}_4)$ des classes de conjugaison de $\mathcal{A}_4$.
Si s appartient à C_2 et si t^ah, avec $a \in \{0,\, 1,\, 2\}$ et $h \in \mathrm{H}$, commute à s, alors $t^ahs = st^ah$ donc $t^ahsh = st^ah^2$. Comme H est abélien et $h^2 = \mathrm{id}$ nous obtenons $t^as = st^a$ ce qui entraîne $a = 0$. Le centralisateur de s est donc G et le cardinal de la classe de conjugaison de s est égal à $\frac{|\mathcal{A}_4|}{|\mathrm{H}|} = 3$. Puisqu'un conjugué de s est d'ordre 2, cette classe de conjugaison est incluse dans C_2 et lui est égale pour des raisons de cardinal.
Enfin le centralisateur de t et t^2 est T ; en effet si $t^aht = tt^ah$ alors $ht = th$ et donc $h = \mathrm{id}$. Il s'ensuit que la classe de conjugaison de t est de cardinal $\frac{|\mathcal{A}_4|}{|\mathrm{T}|} = 4$. Or

$$(t^ah)t(t^ah)^{-1} = t^ahth^{-1}t^{-a} = t(t^{a-1}ht^{1-a})(t^ah^{-1}t^{-a}) \in t\mathrm{H}$$

car H est distingué dans $\mathcal{A}_4$. Donc $t^{a-1}ht^{1-a}$ et $t^ah^{-1}t^{-a}$ appartiennent à H. La classe de conjugaison de t est donc contenue dans C_3 et lui est égale pour des raisons de cardinalité. On obtient de la même façon que la classe de conjugaison de t^2 est C_4.

f) Soit $\zeta = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$ une racine primitive 3ième de l'unité. Rappelons que μ_n désigne l'ensemble des racines $n$ième de l'unité. Pour $0 \leqslant j \leqslant 2$ on définit $\eta^j\colon \mathcal{A}_4 \to \mu_3$ par $\eta^j(t^ah) = \zeta^{ja}$ si $0 \leqslant a \leqslant 2$ et $h \in \mathrm{H}$. Alors $\eta^0 = \mathrm{id}$, η et η^2 sont des caractères linéaires distincts de $\mathcal{A}_4$.
En effet si $0 \leqslant a,\, b \leqslant 2$ et si h, g appartiennent à H, alors $t^aht^bg = t^{a+b}(t^{-b}ht^b)g$. Puisque H est distingué dans $\mathcal{A}_4$, on a $t^{-b}ht^b$ appartient à H et donc $(t^{-b}ht^b)g$ appartient à H. De plus $\eta^j(t^aht^bg) = \zeta^{j(a+b)} = \zeta^{ja}\zeta^{jb} = \eta^j(t^ah)\eta^j(t^bg)$.

g) Soit V la représentation de permutation associée à l'action naturelle de $\mathcal{A}_4$ sur $\{1,\, 2,\, 3,\, 4\}$. Rappelons que cette représentation est $\mathbb{C}^4$ muni de l'action de $\mathcal{A}_4$ définie dans la base canonique $(e_1,\, e_2,\, e_3,\, e_4)$ par $g(e_i) = e_{g(i)}$. L'hyperplan W d'équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ est stable par $\mathcal{A}_4$ et la représentation obtenue est irréductible de caractère :

$$\chi_W(\mathrm{id}) = 3, \qquad \chi_W(g) = -1 \text{ si } g \in \mathrm{H}\smallsetminus\{\mathrm{id}\}, \qquad \chi_W(g) = 0 \text{ si } g \notin \mathrm{H}.$$

1. En effet soit G un groupe dont tous les éléments sont d'ordre divisant 2 ; si g et h sont deux éléments de G, alors d'une part $(gh)^2 = e$ et d'autre part $g^2h^2 = e$ d'où $(gh)^2 = g^2h^2$ soit $ghgh = gghh$ et $gh = gh$.

En effet la représentation V se décompose sous la forme $V' \oplus W$ où V' est la droite engendrée par $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$. Puisque V est une repésentation de permutation $\chi_V(g)$ est le nombre de points fixes de g agissant sur $\{1, 2, 3, 4\}$. Nous avons donc

$$\chi_V(\mathrm{id}) = 4, \qquad \chi_V(g) = 0 \text{ si } g \in \mathrm{H} \smallsetminus \{\mathrm{id}\}, \qquad \chi_V(g) = 1 \text{ si } g \notin \mathrm{H}.$$

Nous en déduisons le caractère de W car $\chi_V = \chi_{V'} + \chi_W$ et $\chi_{V'}(g) = 1$ pour tout $g \in \mathcal{A}_4$ (en effet $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ est fixe par $\mathcal{A}_4$ donc $\chi_{V'} \simeq \chi_{\rho_{\mathrm{triv}}}$). Par suite

$$\chi_W(\mathrm{id}) = 3, \qquad \chi_W(g) = -1 \text{ si } g \in \mathrm{H} \smallsetminus \{\mathrm{id}\}, \qquad \chi_W(g) = 0 \text{ si } g \notin \mathrm{H}.$$

Montrons que W est irréductible. Commençons par constater que si g appartient à $\mathcal{A}_4$ et si $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ appartient à $\mathbb{C}^4$, alors

$$g \cdot v = x_1 e_{g(1)} + x_2 e_{g(2)} + x_3 e_{g(3)} + x_4 e_{g(4)} = (x_{g^{-1}(1)}, x_{g^{-1}(2)}, x_{g^{-1}(3)}, x_{g^{-1}(4)}).$$

Supposons que v appartienne à $W \smallsetminus \{0\}$; soit W' le sous-espace de W engendré par les $g \cdot v$ pour $g \in \mathcal{A}_4$. Montrons que $W = W'$ quel que soit v. Il existe donc $i \neq j$ tel que $x_i \neq x_j$; sans perdre de généralité on peut supposer que $x_1 \neq x_2$. L'image de v par le 3-cycle t est alors (x_3, x_1, x_2, x_4) ; il s'ensuit que W' qui contient $t \cdot v$ et v contient $w = t \cdot v - v = (x_3 - x_1, x_1 - x_2, x_2 - x_3, 0)$. Le sous-espace W' contient aussi $w + g \cdot w$ si $g = (1\ 3)(2\ 4)$, et comme

$$w + g \cdot w = (x_1 - x_2)(e_2 + e_4 - e_1 - e_3)$$

et $x_1 - x_2 \neq 0$ il contient le vecteur $f_1 = e_1 - e_2 + e_3 - e_4$. Il contient donc aussi les images $f_2 = e_1 + e_2 - e_3 - e_4$ et $f_3 = e_1 - e_2 - e_3 + e_4$ de f_1 par les 3-cycles $(2\ 4\ 3)$ et $(2\ 3\ 4)$. Puisque f_1, f_2 et f_3 forment une base de W nous avons l'égalité recherchée $W = W'$.

h) Le groupe $\mathcal{A}_4$ compte quatre classes de conjugaison, il a donc quatre représentations irréductibles à isomorphismes près qui sont les trois caractères linéaires ρ_{triv}, η et η^2 et la représentation W de dimension 3. Les valeurs des caractères de ces représentations ont été calculées ci-dessus d'où la table des caractères de $\mathcal{A}_4$:

	C_1	C_2	C_3	C_4
$\chi_{\rho_{\mathrm{triv}}}$	1	1	1	1
χ_η	1	1	ζ	ζ^2
χ_{η^2}	1	1	ζ^2	ζ
χ_W	3	-1	0	0

Exercice 12

Soit G un groupe fini. Soit H un sous-groupe de G. Soit π une représentation de G de caractère χ.

a) Montrer que la restriction de π à H a pour caractère la restriction $\chi_{|\mathrm{H}}$.

b) Si π est irréductible, est-ce que $\chi_{|\mathrm{H}}$ est un caractère irréductible ?

Solution 12

a) Montrons que la restriction de π à H a pour caractère la restriction $\chi_{|\mathrm{H}}$. Pour tout $h \in H$ on a

$$\chi_{\pi_{|\mathrm{H}}}(h) = \mathrm{tr}(\pi_{|\mathrm{H}}(h)) = \mathrm{tr}(\pi(h)) = \chi(h) = \chi_{|\mathrm{H}}(h).$$

b) Si π est irréductible, $\chi_{|\mathrm{H}}$ n'est pas nécessairement un caractère irréductible. En effet soit G un groupe fini non abélien. Soit $H = \{e_{\mathrm{G}}\}$ le sous-groupe trivial de G et soit π une représentation complexe irréductible de G de dimension $\geqslant 2$ (une telle représentation existe). Alors toute droite de π est un sous-espace strict non nul de π stable par H donc $\chi_{|\mathrm{H}}$ n'est pas irréductible.

Exercice 13

Soit G un groupe fini. Soit H un sous-groupe de G. Soit (π, V) une représentation de H. On pose

$$W = \big\{ f \colon \mathrm{G} \to V \mid \forall\, x \in \mathrm{G}\, \forall\, h \in H \quad f(hx) = \pi(h) f(x) \big\}$$

avec une action de G donnée par $g(f) \colon x \mapsto f(xg)$.

a) Montrer que W est une représentation de G. Quelle est sa dimension ?

b) Si π est irréductible, W est-elle une représentation irréductible de G ?

Solution 13

a) Montrons que W est une représentation de G. On peut vérifier que
- W est un sous-espace vectoriel de V^{G} ;
- la formule $(g, f) \mapsto g(f)$ définit une action de groupes linéaire de G sur W ;
- pour tout $g \in \mathrm{G}$ et pour tout $f \in W$, on a $f(g)$ appartient à W. En effet, pour tout $h \in H$ et pour tout $x \in \mathrm{G}$ on a
$$g(f)(hx) = f(h(xg)) = \pi(h)f(xg) = \pi(h)g(f)(x).$$

Ces trois points assurent que W est naturellement une représentation de G.

Précisons la dimension de W.
Si $R \subset G$ désigne l'ensemble des représentants de G modulo H l'application
$$W \to V^R \qquad\qquad f \mapsto f_{|R}$$
est une application linéaire. C'est un isomorphisme par définition de W : un élément de W est entièrement déterminé par l'image des éléments de R. Par suite $\dim W = |R| \dim V$, *i.e.* $\dim W = [\mathrm{G} : \mathrm{H}] \dim V$.

b) Si π est irréductible, W n'est pas nécessairement une représentation irréductible de G. Considérons un groupe G non trivial et $H = \{e_{\mathrm{G}}\}$ le sous-groupe trivial. La représentation triviale de H, notée triv, est irréductible. On peut vérifier que $W(\mathrm{triv}) \simeq K[\mathrm{G}]$ où $K[\mathrm{G}]$ désigne la représentation régulière de G. Or cette dernière est irréductible si et seulement si $|\mathrm{G}| = 1$ ce que l'on a exclu.

Exercice 14 [Représentations et sous-groupes distingués, Peyre, l'algèbre discrète de la transformée de Fourier, pages 231-232]

Soit G un groupe fini dont e_{G} est l'élément neutre. Soient ρ_1, ρ_2, …, ρ_r un ensemble de représentants des classes d'isomorphies de représentations irréductibles. Soient χ_1, χ_2, …, χ_r les caractères irréductibles associés. Posons
$$K_{\chi_i} = \big\{g \in \mathrm{G} \,|\, \chi_i(g) = \chi_i(e_{\mathrm{G}})\big\}$$

a) Soit $\rho\colon \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation de caractère χ_V sur un $\mathbb{C}$-espace V de dimension d. Soit g un élément d'ordre k de G. Alors
   (i) $\rho(g)$ est diagonalisable ;
   (ii) χ_V est somme de $\chi_V(1) = \dim V = d$ racines $k$ième de l'unité ;
   (iii) $|\chi_V(g)| \leqslant \chi_V(e_{\mathrm{G}}) = d$;
   (iv) $K_{\chi_V} = \big\{x \in \mathrm{G}, |\, \chi_V(x) = \chi_V(e_{\mathrm{G}})\big\}$ est un sous-groupe distingué de G. On l'appelle noyau de la représentation.

b) Soit $N \triangleleft \mathrm{G}$ un sous-groupe distingué de G. Soit ρ_U une représentation de ${}^{\mathrm{G}}\!/_{\mathrm{N}}$ sur un espace vectoriel U. Il existe une représentation canonique de G sur U telle que les sous-représentations de U sous l'action de ${}^{\mathrm{G}}\!/_{\mathrm{N}}$ soient exactement celles de U sous l'action de G.

c) Soit V un espace vectoriel de dimension égale à l'ordre de G. Soit $(b_t)_{t\in\mathrm{G}}$ une base de V. La représentation régulière de G est la représentation
$$\begin{array}{rcl} \rho_{\mathrm{reg}}\colon \mathrm{G} & \to & \mathrm{GL}(V) \\ g & \mapsto & \rho_{\mathrm{reg}}(g)\colon V \to V \\ & & \qquad\qquad b_t \mapsto b_{gt} \end{array}$$

Soit $\rho\colon \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation de G. La représentation est fidèle si ρ est injectif.
Montrer que la représentation régulière est fidèle.

d) Montrer que les sous-groupes distingués de G sont les
$$\bigcap_{i\in I} K_{\chi_i}$$
où $I \subset \{1, 2, 3, \ldots, r\}$.

e) Montrer que G est simple si et seulement si

$$\forall\, i \neq 1, \forall\, g \in \mathrm{G} \qquad \chi_i(g) \neq \chi_i(e_{\mathrm{G}}).$$

Solution 14

a) (i) Puisque $g^k = 1$, on a $\rho(g)^k = \mathrm{id}$. Le polynôme minimal de $\rho(g)$ divise donc $X^k - 1$ qui est scindé à racines simples.

(ii) Soient λ_1, λ_2, …, λ_d les valeurs propres de $\rho(g)$ qui sont des racines $k$ièmes de l'unité. On a $\chi_V(g) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_d$.

(iii) On a $|\chi_V(g)| \leqslant |\lambda_1| + |\lambda_2| + \ldots + |\lambda_d| = d$.

(iv) Si $|\chi_V(g)| = d$, alors d'après (iii) les nombres complexes λ_i sont positivement liés sur $\mathbb{R}$; comme ils sont de module 1, ils sont tous égaux. Si $\chi_V(g) = d$, alors nécessairement $\lambda_i = 1$ donc $\rho(g) = \mathrm{id}$. Ainsi $K_{\chi_V} = \ker\rho$ est bien un sous-groupe distingué.

b) Désignons par $\pi\colon \mathrm{G} \to {}^{\mathrm{G}}\!/_{\mathrm{N}}$ la projection canonique. La représentation $\widetilde{\rho}_U$ définie par

$$\forall\, g \in \mathrm{G} \qquad \widetilde{\rho}_U(g) = \rho_U \circ \pi(g)$$

convient.

c) Direct.

d) Soit $\mathrm{N} \lhd \mathrm{G}$ un sous-groupe distingué de G. Désignons par ρ_U la représentation régulière de ${}^{\mathrm{G}}\!/_{\mathrm{N}}$. Autrement dit U est un espace vectoriel de dimension égale à $|{}^{\mathrm{G}}\!/_{\mathrm{N}}| = \frac{|\mathrm{G}|}{|\mathrm{N}|}$ de base $(e_g)_{g \in {}^{\mathrm{G}}\!/_{\mathrm{N}}}$ et $\rho_U(h)(e_{\mathrm{G}}) = e_{hg}$. La représentation régulière est fidèle (c)) donc ρ_U est injective. Le b) permet d'étendre cette représentation en une représentation $\widetilde{\rho}_U\colon \mathrm{G} \to U$. Notons χ le caractère de la représentation $\widetilde{\rho}_U$. On a $\ker\widetilde{\rho}_U = \ker(\rho_U \circ \pi) = \mathrm{N}$ D'où $\mathrm{N} = K_\chi$. Ecrivons la décomposition de la représentation $\widetilde{\rho}_U$ en fonction des représentations irréductibles

$$\chi = a_1\chi_1 + a_2\chi_2 + \ldots + a_r\chi_r$$

D'après la troisième assertion de a) on a

$$\forall\, g \in \mathrm{G} \qquad |\chi(g)| \leqslant \sum_{i=1}^{r} a_i|\chi_i(g)| \leqslant \sum_{i=1}^{r} a_i|\chi_i(e_{\mathrm{G}})| = \chi(e_{\mathrm{G}}).$$

On a donc l'égalité $\chi(g) = \chi(e_{\mathrm{G}})$, *i.e.* $g \in K_\chi$, si et seulement si

$$\forall\, g \in \mathrm{G} \qquad |\chi(g)| = \sum_{i=1}^{r} a_i|\chi_i(g)| = \sum_{i=1}^{r} a_i|\chi_i(e_{\mathrm{G}})| = \chi(e_{\mathrm{G}})$$

autrement dit si et seulement si

$$\forall\, i \qquad a_i\chi_i(g) = a_i\chi_i(e_{\mathrm{G}}).$$

Ceci est finalement équivalent à

$$\forall\, i \qquad a_i > 0 \Rightarrow g \in K_{\chi_i}.$$

On obtient donc le résultat voulu avec $I = \big\{i \,|\, a_i > 0\big\}$.

Réciproquement comme les K_{χ_i} sont distingués tout sous-groupe du type $\displaystyle\bigcap_{i \in I} K_{\chi_i}$ l'est aussi.

e) Supposons qu'il existe un élément de $\mathrm{G} \setminus \{e_{\mathrm{G}}\}$ tel que $\chi_i(g) = \chi_i(e_{\mathrm{G}})$; alors $K_{\chi_i} \subset \mathrm{G}$ est un sous-groupe distingué non trivial et G n'est pas simple.

Réciproquement si G n'est pas simple, il existe $g \neq e_{\mathrm{G}}$ dans un certain sous-groupe distingué $\mathrm{N} \lhd \mathrm{G}$ non trivial. Le d) assure que $\mathrm{N} = \displaystyle\bigcap_{i \in I} K_{\chi_i}$ donc g appartient à K_{χ_i} pour $i \in I \subset \{2, 3, \ldots, r\}$. Ceci signifie bien que $\chi_i(g) = \chi_i(e_{\mathrm{G}})$.

Exercice 15

Le but de cet exercice est de montrer que le centre du groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est le groupe des homothéties.

Une représentation ρ du groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est donnée par son action naturelle sur $\mathbb{C}^n$.

1. Montrer que la représentation ρ est irréductible.
2. Montrer que tout élément du centre de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ est un morphisme de la représentation ρ, *i.e.* montrer que pour tout élément h du centre et pour tout élément M de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ on a
$$\rho(M)\circ h = Mh = hM = h\circ\rho(M).$$
3. Conclure en utilisant le Lemme de Schur.

Solution 15

Puisque ρ est l'action naturelle de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}^n$, ρ est l'identité de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$.

1. Si un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{C}^n$ est stable par tous les éléments de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, alors $V=\{0\}$ ou $V=\mathbb{C}^n$, *i.e.* ρ est irréductible.
2. Soit h un élément du centre de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. Pour tout M dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ on a
$$\rho(M)\circ h = Mh = hM = h\circ\rho(M)$$
ainsi h est bien un morphisme de la représentation ρ.
3. Comme ρ est irréductible, le Lemme de Schur assure que $h=\lambda\mathrm{id}$ avec $\lambda\in\mathbb{C}^*$, *i.e.* h est une homothétie.

Exercice 16

Soit G un groupe abélien.

1. Si $\rho\colon \mathrm{G}\to\mathrm{GL}(V)$ est une représentation de G, montrer que tout élément G de G définit un G-morphisme $V\to V$.
2. En déduire que toute représentation irréductible de G est de dimension 1.
3. Donner toutes les représentations irréductibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Solution 16

1. Pour tous g, h et x dans G on a
$$g\cdot(h\cdot x)=(gh)\cdot x=(hg)\cdot x=h\cdot(g\cdot x)$$
c'est-à-dire l'application $\rho(g)\colon x\mapsto g\cdot x$ est un G-morphisme pour tout $g\in\mathrm{G}$.
2. On suppose que V est une représentation irréductible de G. Si $g\in\mathrm{G}$, alors, d'après 1. et le Lemme de Schur, $\rho(g)=\lambda\mathrm{id}$. De plus comme $\rho(g)\in\mathrm{GL}(V)$, λ est non nul. Par conséquent tout sous-espace vectoriel de V est stable par G donc est une sous-représentation de G. Puisque V est irréductible, $\dim V=1$.
3. D'après 1. une représentation irréductible de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un morphisme de groupes
$$\rho\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\to\mathrm{GL}(1,\mathbb{C})=\mathbb{C}^*$$
Tout élément k de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est d'ordre divisant n ; par suite $\rho(k)$ est aussi d'ordre divisant n, *i.e.* $\rho(k)^n=1$. Réciproquement pour tout racine $n$ième de l'unité ω l'application
$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\to\mathbb{C}^*, \qquad k\mapsto\omega^k$$
est une représentation de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On les obtient donc toutes ainsi.
Notons aussi que l'espace des représentations irréductibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ peut être muni d'une structure de groupe qui le rend isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 17

Soit G un groupe fini. Soit H un sous-groupe abélien de G.

Montrer que toute représentation irréductible de G est de dimension au plus $[\mathrm{G}:\mathrm{H}]$.

Indication : si V est une représentation irréductible de G*, c'est aussi une représentation de* H*. On pourra considérer la représentation de* G *engendrée par une sous-représentation de* H*.*

Solution 17

Soit V une représentation irréductible de G. C'est aussi par restriction une représentation irréductible de H. Puisque H est abélien, V vu comme représentation de H se décompose en somme directe de représentations de H de degré 1. Soit v un vecteur directeur d'une de ces représentations et soit V' le sous-espace vectoriel de V engendré par les vecteurs de la forme $g \cdot v$ où g parcourt G. Il est clair que $V' \neq \{0\}$ est une sous-représentation de V du groupe G ; ainsi $V' = V$. Or si $g' = gh$ avec h dans H, alors par définition de v, $g' \cdot v$ et $g \cdot v$ sont colinéaires. Par conséquent V' est engendré par [G : H] vecteurs, et est donc de dimension au plus [G : H].

Exercice 18

Montrer que tout groupe non abélien admet une représentation irréductible de dimension > 1.

Solution 18

Soit G un groupe dont toutes les représentations irréductibles sont de degré 1. La somme des carrés des dimensions des représentations irréductibles de G est égale au cardinal de G ; par suite les classes de conjugaisons de G sont toutes réduites à un élément. Autrement dit G est abélien.

Exercice 19

Montrer que si V est une représentation d'un groupe fini vérifiant $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 2$, alors V est somme de deux représentations irréductibles.

Solution 19

Si $V = \oplus V_i^{a_i}$, alors $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 2$ si et seulement si deux a_i distincts sont non nuls et égaux à 1.

Exercice 20

Soit $\mathcal{S}_3$ le groupe des permutations de $\{1, 2, 3\}$.

Notons e, s et t les trois classes de conjugaison de $\mathcal{S}_3$ où e est la classe de conjugaison de l'identité, s celle des transpositions et t celle des 3-cycles.

1. Montrer (sans les construire) que $\mathcal{S}_3$ a deux représentations irréductibles de dimension 1 et une de dimension 2.
2. Notons χ_1 le caractère de la représentation triviale, χ_2 celui de la signature sgn qui est l'autre représentation de dimension 1 et θ celui de la représentation W de dimension 2. De quelle représentation $\psi = \chi_1 + \chi_2 + 2\theta$ est-il le caractère ? Compléter la table

	e	s	t
χ_1			
χ_2			
$\chi_1 + \chi_2 + 2\theta$			
θ			

3. Faisons agir $\mathcal{S}_3$ sur lui-même par conjugaison intérieure ($g \cdot x = gxg^{-1}$). Notons V la représentation de permutation associée et χ son caractère. Calculer χ. En déduire les multiplicités de la représentation triviale, de la représentation sgn et de la représentation W dans la décomposition de V.

Solution 20

1. Puisque le groupe $\mathcal{S}_3$ a trois classes de conjugaison, il a trois représentations irréductibles ; nous les notons W_1, W_2 et W_3. Comme $(\dim W_1)^2 + (\dim W_2)^2 + (\dim W_3)^2 = 6$ la seule possibilité est que deux des dimensions valent 1 et la troisième 2.
2. La première colonne des première, deuxième et quatrième lignes correspond aux dimensions des W_i.

   Les seconde et troisième colonnes des deux premières lignes s'obtiennent directement.

   Les seconde et troisième colonnes de la troisième ligne s'obtient par orthogonalité des colonnes (si on note a (resp. b) le coefficient de la seconde (resp. troisième) colonne, on a $1 \times 1 + 1 \times (-1) + 2 \times a = 0$ soit $a = 0$ et $1 \times 1 + 1 \times 1 + 2 \times b = 0$ soit $b = -1$).

   La troisième ligne s'obtient à partir des première, seconde et quatrième lignes.

   Finalement on a

	e	s	t
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
$\chi_1+\chi_2+2\theta$	6	0	0
θ	2	0	-1

Enfin $\chi_1+\chi_2+2\theta$ est le caractère de la représentation régulière [2].

3. Comme V est une représentation de permutation, $\chi(g)$ est le nombre de points fixes de g, *i.e.* le nombre d'éléments h de $\mathcal{S}_3$ tels que $ghg^{-1}=h$, ou encore le nombre d'éléments de $\mathcal{S}_3$ qui commutent avec g. Nous avons donc $\chi(g)=|Z_g|=|\mathcal{S}_3|\cdot|C_g|^{-1}$ où Z_g désigne l'ensemble des éléments de $\mathcal{S}_3$ qui commutent à g et C_g la classe de conjugaison de g. Nous en déduisons que $\chi(e)=6$, $\chi(s)=2$ et $\chi(t)=3$.
   Si W' est une représentation irréductible, alors la multiplicité de W' dans V est $\langle\chi_{W'},\chi\rangle$. Comme
   $$\langle\chi_1,\chi\rangle=\frac{1}{6}\Big(6+3\times(1\times2)+2\times(1\times3)\Big)=3$$
   $$\langle\chi_2,\chi\rangle=\frac{1}{6}\Big(6+2\times(-1\times2)+2\times(1\times3)\Big)=1$$
   $$\langle\theta,\chi\rangle=\frac{1}{6}\Big(2\times6+3\times(0\times2)+2\times(-1\times3)\Big)=1$$
   nous avons $V=3\rho_{\text{triv}}\oplus\text{sgn}\oplus W$.

Exercice 21

On se propose d'établir la table des caractères du groupe $\mathcal{S}_4$ des permutations de $\{1,\,2,\,3,\,4\}$. Les partitions de 4 sont

$$4 \qquad 3+1 \qquad 2+2 \qquad 2+1+1 \qquad 1+1+1+1;$$

il en résulte que le groupe $\mathcal{S}_4$ a 5 classes de conjugaison : la classe C_1 de l'élément neutre (1 élément), celle C_2 des transpositions (6 éléments), celle $C_{2,2}$ des produits de deux transpositions de supports disjoints (3 éléments), celle C_3 des 3-cycles (8 éléments), celle C_4 des 4-cycles (6 éléments) ;

	1	6	3	8	6
	C_1	C_2	$C_{2,2}$	C_3	C_4
$\chi_{\rho_{\text{triv}}}$	1	1	1	1	1
sgn	1	-1	1	1	-1
θ	2	0	2	-1	0
χ_1	3	1	-1	0	-1
χ_2	3	-1	-1	0	1

1. Soit V la représentation de permutation associée à l'action de $\mathcal{S}_4$ sur $\{1,\,2,\,3,\,4\}$.
   a) Calculer χ_V et $\langle\chi_V,\,\chi_V\rangle$. En déduire que V est la somme directe $V_1\oplus V_2$ de deux représentations irréductibles V_1, V_2 non isomorphes.
   b) Déterminer les sous-espaces V_1 et V_2 de V et montrer, en revenant à la définition, que ce sont des représentations irréductibles de $\mathcal{S}_4$.
   c) Calculer les caractères de V_1 et V_2. Quelles lignes de la table cela permet-il de remplir ?
2. Quelle est la seconde représentation de dimension 1 ? Comment peut-on obtenir la seconde de dimension 3 (pourquoi est-elle irréductible et différente de celle déjà construite ?) ?
3. Comment peut-on compléter la table des caractères de $\mathcal{S}_4$?

Solution 21

1. a) Puisque V est une représentation de permutation, $\chi_V(\sigma)$ est le nombre de points fixes de σ agissant sur $\{1,\,2,\,3,\,4\}$. Par conséquent nous avons
   $$\chi_V(C_1)=4, \qquad \chi_V(C_2)=2, \qquad \chi_V(C_{2,2})=0, \qquad \chi_V(C_3)=1, \qquad \chi_V(C_4)=0.$$

2. Rappelons que si G est fini, si $E=\mathrm{G}$ et si l'action de G est donnée par la multiplication à gauche, alors la représentation régulière est donnée par : $\chi(1)=|\mathrm{G}|$ et $\chi(g)=0$ si $g\in\mathrm{G}\smallsetminus\{1\}$.

Par suite
$$\langle \chi_V, \chi_V \rangle = \frac{1}{24}\Big(4^2 + 6\times 2^2 + 3\times 0^2 + 8\times 1^2 + 6\times 0^2\Big) = 2.$$
Si $V = \bigoplus_{W\in \mathrm{Irr}(\mathcal{S}_4)} m_W W$, $\langle \chi_V, \chi_V\rangle$ est aussi égal à $\displaystyle\sum_{W\in\mathrm{Irr}(\mathcal{S}_4)} m_W^2$ puisque les χ_W forment une famille orthonormale. Étant donné que la seule écriture de 2 comme somme de deux carrés est 1^2+1^2 nous en déduisons que $m_W = 1$ pour exactement deux représentations irréductibles W de $\mathcal{S}_4$ et $m_W = 0$ pour les autres ce qui permet de conclure.

b) La droite V_1 engendrée par $e_1+e_2+e_3+e_4$ et l'hyperplan V_2 d'équation $x_1+x_2+x_3+x_4 = 0$ sont stables par $\mathcal{S}_4$.
Puisque V_1 est de dimension 1 elle est automatiquement irréductible.
Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in V_2$ non nul. Il s'agit de démontrer que le sous-espace vectoriel U_x de V_2 engendré par les $\sigma\cdot x$, pour $\sigma\in\mathcal{S}_4$, est égal à V_2. Il existe $i\neq j$ tels que $x_i \neq x_j$. Soit τ la transposition $(i\ j)$. Alors $x - \tau\cdot x$ est un multiple non nul de $e_i - e_j$. Il en résulte que $e_i - e_j$ appartient à U_x et donc que $\sigma\cdot(e_i - e_j) = e_{\sigma(i)} - e_{\sigma(j)}$ appartient à U_x pour tout $\sigma\in\mathcal{S}_4$. Mais $(\sigma(i), \sigma(j))$ décrit les couples d'éléments distincts de $\{1, 2, 3, 4\}$ quand σ décrit $\mathcal{S}_4$; ainsi U_x contient $e_1 - e_2$, $e_1 - e_3$ et $e_1 - e_4$. Ces vecteurs engendrant V_2 cela permet de conclure.

c) La représentation V_1 est la représentation triviale ; par conséquent $\chi_{V_1}(C) = 1$ pour toute classe de conjugaison C de $\mathcal{S}_4$. Nous pouvons donc remplir la première ligne de la table.
Par ailleurs $\chi_V = \chi_{V_1} + \chi_{V_2}$, cela permet donc de déterminer χ_{V_2}. Nous pouvons donc remplir la quatrième ligne de la table.

2. La seconde représentation de dimension 1 est la signature sgn. Ses valeurs sont bien celles reportées dans la seconde ligne. La seconde représentation de dimension 3 est $V_1\otimes\mathrm{sgn}$. Si elle pouvait se décomposer sous la forme $V_1\otimes\mathrm{sgn} = W_1\oplus W_2$, alors $V_1 = (V_1\otimes\mathrm{sgn})\otimes\mathrm{sgn}$ pourrait se décompose sous la forme $(W_1\otimes\mathrm{sgn})\oplus(W_2\otimes\mathrm{sgn})$ ce qui est absurde. Nous avons $\chi_{V_1\otimes\mathrm{sgn}}(g) = \chi_{V_1}(g)\mathrm{sgn}(g)$; ainsi $\chi_{V_1\otimes\mathrm{sgn}}(C_2) = -1$ est différent de $\chi_{V_1}(C_2) = 1$. Les représentations $V_1\otimes\mathrm{sgn}$ et V_1 ne sont donc pas isomorphes (leurs caractères sont distincts).

3. Le groupe $\mathcal{S}_4$ ayant cinq classes de conjugaison, il y a cinq représentations irréductibles. Soient d la dimension de la représentation manquante et θ son caractère. La formule de Burnside assure que
$$24 = 1^2 + 1^2 + 3^2 + 3^2 + d^2$$
d'où $d = 2$.
Pour remplier la dernière ligne on utilise le fait que $\chi_{\rho_{\mathrm{triv}}} + \mathrm{sgn} + 2\theta + 3\chi_1 + 3\chi_2$ est le caractère de la représentation régulière qui est connu [3].

Exercice 22

Soit $\Bbbk$ un corps. Soit $\mathrm{G}\subset\mathrm{GL}(2,\Bbbk)$ le sous-groupe des $\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ avec $a\in\Bbbk^*$ et $b\in\Bbbk$. Faisons agir G sur $\Bbbk$ par
$$\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot x = ax + b.$$

1. Calculer
$$\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}.$$
En déduire que les classes de conjugaison de G sont
$$C_1 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\} \qquad N = \left\{\begin{pmatrix} 1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix} \mid b\in\Bbbk\smallsetminus\{0\}\right\}$$
et les
$$D_a = \left\{\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix} \mid b\in\Bbbk\right\}$$
pour $a\in\Bbbk^*\smallsetminus\{1\}$.

3. Rappelons que si G est fini, si $E = \mathrm{G}$ et si l'action de G est donnée par la multiplication à gauche, alors la représentation régulière est donnée par : $\chi(1) = |\mathrm{G}|$ et $\chi(g) = 0$ si $g\in\mathrm{G}\smallsetminus\{1\}$.

2. Supposons désormais que $\mathbb{k}$ est fini, de cardinal q et donc que $|\mathrm{G}| = q(q-1)$ et G compte q classes de conjugaison. Désignons par V la représentation de permutation de G associée à l'action de G sur $\mathbb{k}$ et W l'hyperplan de V défini par
$$W = \Big\{\sum_{x\in\mathbb{k}} \lambda_x e_x,\ \sum_{x\in\mathbb{k}} \lambda_x = 0\Big\}$$
Montrer que W est une sous-représentation de V.
3. Calculer χ_W ; en déduire que W est irréductible.
4. Quelles sont les dimensions des autres représentations irréductibles de G ?
5. Comment peut-on construire un caractère linéaire de G à partir d'un caractère linéaire de $\mathbb{k}^*$?
En déduire que si $\mathbb{k} = \mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, alors la table des caractères de G est la suivante

	C_1	N	D_2	D_4	D_3
χ_{triv}	1	1	1	1	1
η	1	1	-1	1	-1
η^2	1	1	1	-1	-1
η^3	1	1	-1	-1	1
χ_W	2	-2	0	0	0

6. Supposons que $q = 4$. Établir la table des caracères de G. Cette table vous rappelle-t-elle quelque chose ? Pouvez-vous expliquer cette coïncidence ?

Solution 22

1. Nous avons
$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} c & ad+(1-c)b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Par suite un conjugué de $\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est de la forme $\begin{pmatrix} c & d' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et tout élément de cette forme est un conjugué de $\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ si $c \neq 1$.
Les D_a, pour $a \in \mathbb{k}^* \smallsetminus \{1\}$ forment donc des classes de conjugaison.
Par ailleurs C_1 est la classe de conjugaison de l'élément neutre et N est la classe de conjugaison de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ car pour $a \neq 0$
$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
2. Nous avons
$$g\cdot\Big(\sum_{x\in\mathbb{k}} \lambda_x e_x\Big) = \sum_{x\in\mathbb{k}} \lambda_x e_{g\cdot x} = \sum_{x\in\mathbb{k}} \lambda_{g^{-1}\cdot x} e_x.$$
Or $x \mapsto g^{-1}\cdot x$ est une bijection de $\mathbb{k}$ donc $\displaystyle\sum_{x\in\mathbb{k}} \lambda_{g^{-1}\cdot x} = \sum_{x\in\mathbb{k}} \lambda_x$ ce qui montre que $g\cdot v = \displaystyle\sum_{x\in\mathbb{k}} \lambda_{g^{-1}\cdot x} e_x$ appartient à W si $v = \displaystyle\sum_{x\in\mathbb{k}} \lambda_x e_x \in W$.
3. V est une représentation de permutation ; par conséquent $\chi_V(g)$ est le nombre de points fixes de g agissant sur $\mathbb{k}$. Nous sommes donc ramenés à calculer le nombre de solutions de l'équation $ax+b = x$ dans $\mathbb{k}$ ce qui conduit à
$$\chi_V(C_1) = q, \qquad \chi_V(N) = 0, \qquad \chi_V(D_a) = 1 \text{ si } a \in \mathbb{k}^* \smallsetminus \{1\}.$$
Maintenant V est la somme directe de W et de la droite engendrée par $\displaystyle\sum_{x\in\mathbb{k}} e_x$ sur laquelle G agit trivialement. Nous en déduisons $\chi_V(g) = \chi_W(g) + 1$ ce qui conduit à
$$\chi_W(C_1) = q-1, \qquad \chi_W(N) = -1, \qquad \chi_W(D_a) = 0 \text{ si } a \in \mathbb{k}^* \smallsetminus \{1\}.$$

Alors

$$\langle \chi_W, \chi_W \rangle = \frac{1}{q(q-1)}\Big((q-1)^2 + |N| \times 1^2 + \sum_{a\in\Bbbk^*\smallsetminus\{1\}} |D_a| \times 0^2\Big) = \frac{1}{q(q-1)}\Big((q-1)^2 + (q-1)\Big) = 1$$

ce qui assure l'irréductibilité de W [4].

4. Puisque
   - ◇ le nombre de classes de conjugaison de G coïncide avec le nombre de représentations irréductibles de G
   - ◇ G compte q classes de conjugaison

   il y a $q-1$ autres représentaitons irréductibles. Notons d_1, d_2, …, d_{q-1} leurs dimensions. La formule de Burnside assure que

   $$q(q-1) = |\mathrm{G}| = (\dim W)^2 + \sum_{i=1}^{q-1} d_i^2;$$

   comme $\dim W = q-1$ nous obtenons

   $$\sum_{i=1}^{q-1} d_i^2 = q(q-1) - (q-1)^2 = q-1.$$

   Une somme de $q-1$ entiers $\geqslant 1$ ne pouvant être égale à $q-1$ que si tous les entiers sont égaux à 1 nous obtenons que les $q-1$ autres représentations de G sont de dimension 1 (*i.e.* sont des caractères linéaires).
5. Si χ est un caractère linéaire de $\Bbbk^*$, alors $\chi \circ \det$ est un caractère linéaire de G. Le groupe $\mathbb{F}_5^*$ est cyclique d'ordre 4 engendré par 2 (en effet $2^2 = 4$, $2^3 = 8 = 3$ et $2^3 = 16 = 1$). Un caractère de $\mathbb{F}_5^*$ est donc déterminé par sa valeur en 2 qui doit être une racine 4-ième de l'unité, c'est-à-dire 1, -1, $\mathbf{i}$ ou $-\mathbf{i}$. On compte donc quatre tels caractères. Si on note η celui pour lequel $\eta(2) = \mathbf{i}$ les autres sont η^2, η^3 et η^4 qui n'est autre que le caractère trivial. Les quatre caractères de G recherchés sont donc exactement les $\eta^j \circ \det$, pour $0 \leqslant j \leqslant 3$, ce qui fournit bien la table annoncée.
6. Le groupe $\Bbbk^*$ est d'ordre 3 ; il est donc cyclique, engendré par n'importe quel $a \neq 1$ (en effet si K est un corps fini, alors K^* est toujours cyclique ; dans le cas présent si $a \in K^* \smallsetminus \{1\}$, alors l'ordre du sous-groupe engendré par a divise $|K^*| = 3$, et donc vaut 3 ce qui fait que ce sous-groupe est K^*). Un caractère linéaire de $\Bbbk^*$ est donc déterminé par sa valeur en a qui est une racine cubique de l'unité. Il y a trois tels caractères. Si on note η celui pour lequel $\eta(a) = \mathbf{j} = \exp\left(\frac{2\mathbf{i}\pi}{3}\right)$ les autres sont η^2 et η^3 qui n'est autre que le caractère trivial. Nous obtenons donc la table

	C_1	N	D_a	D_{a^2}
χ_{triv}	1	1	1	1
η	1	1	j	j^2
η^2	1	1	j^2	j
χ_W	3	-1	0	0

   Nous reconnaissons la table des caractères de $\mathcal{A}_4$ ce qui n'est pas étonnant car G est isomorphe à $\mathcal{A}_4$. En effet le choix d'une bijection entre $\Bbbk$ et $\{1, 2, 3, 4\}$ transforme l'action de G sur $\Bbbk$ en une action de G sur $\{1, 2, 3, 4\}$ et fournit donc une injection de G dans $\mathcal{S}_4$. L'image H de cette injection est donc un sous-groupe de $\mathcal{S}_4$, isomorphe à G. Un tel groupe est distingué dans $\mathcal{S}_4$; en effet si g n'appartient pas à H nous avons $g\mathrm{H} = \mathrm{H}g = \mathcal{S}_4 \smallsetminus \mathrm{H}$ pour des raisons d'ordre ($|\mathrm{H}| = |\mathrm{G}| = 12 = |\mathcal{A}_4|$ et $|\mathcal{S}_4| = 24 = 2|\mathrm{H}|$) et donc $g\mathrm{H}g^{-1} = \mathrm{H}gg^{-1} = \mathrm{H}$. Le quotient G/H est de cardinal 2 et donc isomorphe à $\{\pm\mathrm{id}\}$ ce qui fournit un caractère linéaire $\eta\colon \mathcal{S}_4 \to \{\pm\mathrm{id}\}$. La restriction de η à $\mathcal{A}_4$ est encore un caractère linéaire mais les caractères de $\mathcal{A}_4$ sont à valeurs dans $\mu_3 = \{z \in \mathbb{C}^* \mid z^3 = 1\}$ ce qui implique $\eta = 1$ sur $\mathcal{A}_4$. Autrement dit $\mathcal{A}_4$ est inclus dans le noyau H de η et lui est donc égal pour des raisons d'ordre. Ainsi $\mathrm{G} \simeq \mathcal{A}_4$.

Exercice 23

Soit V une représentation de degré fini d'un groupe G (non nécessairement fini).

1. On suppose qu'il existe une forme hermitienne H sur V invariante par G, c'est-à-dire

$$H(u, v) = H(g \cdot u, g \cdot v) \qquad \forall\, u,\, v \in V \quad \forall\, g \in \mathrm{G}.$$

   Montrer que toute sous-représentation de V admet une sous-représentation supplémentaire.

4. Nous utilisons ici le critère d'irréductibilité suivant : une représentation V de G est irréductible si et seulement si $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$.

2. Montrer que si G est fini, alors il existe toujours une telle forme hermitienne G-invariante.
3. On suppose V irréductible. Montrer que deux formes hermitiennes G-invariantes sont multiples l'une de l'autre (c'est-à-dire $H_1 = \mu H_2$).

Solution 23

Cet exercice est une (re)démonstration du théorème de Maschke.

1. Soit W une sous-représentation de V. La forme hermitienne H nous donne un moyen canonique de trouver un supplémentaire de W : on prend son orthogonal. Comme H est invariante par G, on en déduit que $W^\perp$ est une sous-représentation de G par le calcul suivant
$$\forall g \in \mathrm{G} \quad \forall v \in W \quad \forall w \in W^\perp \quad H(v, g \cdot w) = H(g^{-1} \cdot v, w) = 0.$$
2. Soit H_0 une forme hermitienne sur V. Puisque G est fini, on peut définir une forme hermitienne H G-invariante en « moyennant » H_0 par G :
$$H(v,w) = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{g \in \mathrm{G}} H_0(g \cdot v, g \cdot w)$$
Remarque : dans une base adéquate, une représentation d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est donc unitaire. En particulier, tous les automorphismes linéaires sont diagonalisables.
3. Soient H et H' deux formes hermitiennes G-invariantes sur V. Alors H induit une bijection anti-linéaire
$$\varphi_H : V \to V^* \qquad\qquad v \mapsto (w \to H(w,v)).$$
De plus, comme H est G-invariante, $\varphi_H(g \cdot v) = g \cdot \varphi_H(v)$. L'application $\varphi_{H'}^{-1} \circ \varphi_H$ est donc un G-automorphisme linéaire de V, donc d'après le Lemme de Schur, $\varphi_{H'}^{-1} \circ \varphi_H = \mu \mathrm{id}$, c'est-à-dire $H = \mu H'$.

Exercice 24

Soient p un nombre premier et G un groupe d'ordre p^3 non abélien. On note $\mathbb{U}_p = \{z \in \mathbb{C} \mid z^p = 1\}$.

1. Montrer que les représentations irréductibles de G ont dimension 1 ou p. Que peut-on dire du nombre des représentations de G dans $\mathbb{C}$?
2. Montrer que le nombre de classes d'isomorphie de représentations irréductibles de dimension p de G est $p-1$ et donner l'ordre de l'abélianisé de G.
Soit $g \in \mathrm{G} \setminus D(\mathrm{G})$.
3. Montrer que pour tout $\zeta \in \mathbb{U}_p$ il existe une représentation V de dimension 1 de G telle que $\chi_V(g) = \zeta$.
4. Déduire de ce qui précède et du fait que si G est un groupe fini le produit d'un caractère irréductible de G par un caractère de degré 1 est un caractère irréductible de G de même degré que si V est une représentation irréductible de dimension p de G, alors $\chi_V(g) = 0$.
5. Montrer que si V est une représentation de G de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$) alors l'un des nombres $\chi_V(g)$, $\chi_V(g^2)$, …, $\chi_V(g^n)$ est non nul (on pourra considérer la somme $\sum_\lambda C(\lambda)$, où C désigne le polynôme caractéristique de $v \cdot gv$, et λ parcourt ses n valeurs propres).
6. Déduire des questions 4. et 5. que l'abélianisé de G n'est pas cyclique. à quel groupe est-il isomorphe ?
7. Montrer à l'aide de la question 4. que si $g' \in D(\mathrm{G})$ et si (V, ρ) est une représentation irréductible de G alors $|\chi_V(g')| = \dim V$. Préciser les endomorphismes $\rho(g')$ pour g' parcourant $D(\mathrm{G})$.
8. Décrire le centre de G et donner le cardinal des différentes classes de conjugaison de G.
9. Donner explicitement la table des caractères de G lorsque $p = 3$.

Solution 24

Soient p un nombre premier et G un groupe d'ordre p^3 non abélien. On note $\mathbb{U}_p = \{z \in \mathbb{C} \mid z^p = 1\}$.

1. La dimension des représentations irréductibles de G divise l'ordre de G, donc p^3 ; par la formule de Burnside, la somme des carrés de ces dimensions vaut l'ordre, p^3. Donc les seules valeurs possibles sont 1 et p. On sait que 1 est la dimension de la représentation triviale, irréductible. Et que G possède une représentation irréductible de dimension > 1, car il est non abélien (cours). Donc $\{1, p\}$ est l'ensemble des dimensions des représentations irréductibles de G. On sait qu'une représentation de G dans $\mathbb{C}$ est donnée précisément par un morphisme de G dans $\mathbb{C}^\times$ (*i.e.* un élément du dual G) et que leur nombre est l'ordre de l'abélianisé G_{ab}. En particulier ce nombre divise $|\mathrm{G}| = p^3$.

2. On écrit la formule de Burnside pour G : si r est le nombre de classes d'isomorphie de représentations irréductibles de dimension p de G, on obtient : $p^3 = |\mathrm{G}_{\mathrm{ab}}| + rp^2$. Par suite p^2 divise G_{ab}, qui divise lui-même p^3. Or G n'est pas abélien, donc l'ordre de G_{ab} n'est pas p^3, et c'est p^2. Il suit de la formule que $r = p - 1$.

   Soit $g \in \mathrm{G} \setminus D(\mathrm{G})$.
3. Toute représentation (V, χ) de dimension 1 de G factorise par G_{ab}, d'ordre p^2. Puisque $g \notin D(\mathrm{G})$ on sait qu'il existe χ un caractère de degré 1 tel que $\chi(g) \neq 1$. On a $\chi(g)^{p^2} = 1$; si $\chi(g)$ est d'ordre p dans $\mathbb{C}^\times$, alors il engendre $\mathbb{U}_p$, donc tout $\zeta \in \mathbb{U}_p$ s'écrit $\zeta = \chi(g)^k = \chi^k(g)$ et la représentation $(\mathbb{C}, \chi^k)$ convient pour V. Sinon, $\chi^p(g)$ est d'ordre p, on remplace χ par le caractère χ^p dans l'argument.
4. Supposons $\chi_V(g) \neq 0$. Alors en multipliant χ_V par les p caractères de degré 1 obtenus en 3), on obtient par I 3. p caractères irréductibles de degré p distincts, car leur valeur en g diffère. Or par 2) G n'admet que $p - 1$ caractères irréductibles de degré p, contradiction.
5. Si on note λ_1, λ_2, …, λ_n les n valeurs propres de $\rho_V(g)$ (diagonalisable), alors celles de $\rho_V(g^k)$ sont λ_1^k, λ_2^k, …, λ_n^k. De plus $\rho_V(g)$ est inversible, donc de déterminant d_g non nul. La somme proposée par l'énoncé $\sum_\lambda C(\lambda)$, qui est nulle par définition, s'écrit donc aussi
$$\sum_{k=1}^{n} a_k \chi_V(g^k) + n a_0,$$
   où on note $C(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ ($a_n = 1$, $a_0 = \pm d_g$). Le fait que na_0 soit non nul entraîne ainsi que l'un des $\chi_V(g^k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, l'est également.
6. Si l'abélianisé de G était cyclique, il serait engendré par la classe, d'ordre p^2, d'un certain élément g de $\mathrm{G} \setminus D(\mathrm{G})$. On applique alors 5) à g et V une représentation irréductible de G de dimension p : avec 4) on en déduit que l'un des g^i, $1 \leqslant i \leqslant p$ est dans $D(\mathrm{G})$. Mais alors l'ordre de la classe de g dans l'abélianisé serait majorée par $i \leqslant p$, contradiction. Par suite G_{ab} est un groupe abélien d'ordre p^2, non cyclique. Par le théorème de structure des groupes abéliens finis, on a $\mathrm{G}_{\mathrm{ab}} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
7. Si $\dim V = 1$, alors $\chi_V(g') = 1$ pour tout $g' \in D(\mathrm{G})$ car χ_V est un morphisme dans $\mathbb{C}^\times$ abélien. Sinon, $\dim V = p$ et on écrit que le carré hermitien de χ_V vaut 1 : d'après 4), on trouve $\sum_{g' \in D(\mathrm{G})} |\chi_V(g')|^2 = p^3$.

   Or pour tout g' on sait que $|\chi_V(g')| \leqslant p = \dim V$. Puisque $|D(\mathrm{G})| = p$, ceci entraîne l'égalité $|\chi_V(g')| = p$ pour tout g'. Le cours montre que l'égalité $|\chi_V(g')| = \dim V$ a lieu si et seulement si $\rho_V(g')$ est une homothétie. Or si $g' \neq 1$, g' est d'ordre p donc l'ordre de $\rho_V(g')$ est 1 ou p. Si c'était 1, alors g' et donc $D(\mathrm{G})$ seraient dans le noyau de ρ_V ; ainsi ρ_V factoriserait en un morphisme de G_{ab} abélien dans $\mathrm{GL}(V)$, ce qui contredit le fait que V est irréductible de dimension > 1. Donc $\rho_V(g')$ est une homothétie d'ordre p, de rapport une racine primitive $p$ième ζ de 1. Alors on a $D(\mathrm{G}) = \{g'^{\ell} \mid 0 \leqslant \ell \leqslant p - 1\}$, et chaque $\rho(g'^{\ell})$ est l'homothétie de V de rapport ζ^ℓ.
8. D'après 7., les p éléments de $D(\mathrm{G})$ ont pour carré hermitien de leur colonne associée dans la table de caractères de G la valeur $|\mathrm{G}| = p^3$ obtenue (Burnside) pour la colonne de 1, donc leur centralisateur est G, *i.e.* ils sont dans le centre de G. Soit $g \in \mathrm{G} \setminus D(\mathrm{G})$. Par 4., g n'est pas dans le centre car il n'agit pas comme une homothétie sur V irréductible de dimension p (en effet, on sait que $\rho_V(g)$ est alors un G–morphisme, donc par Schur une homothétie). Or le centralisateur de g contient g et $D(\mathrm{G})$, donc ce sous-groupe a cardinal $> p$, et distinct de p^3, soit exactement p^2 par Lagrange. Le cardinal de la classe de conjugaison de g est donc $\frac{p^3}{p^2} = p$ (toute la classe a même image dans l'abélianisé, par cardinalité elle coïncide donc avec la classe à droite $gD(\mathrm{G})$). On obtient en particulier que le centre de G est égal à $D(\mathrm{G})$.
9. On note x un générateur de $D(\mathrm{G})$ (d'ordre 3), et g_{ij} un élément de $\mathrm{G} \setminus D(\mathrm{G})$ qui s'envoie sur $(\bar{i}, \bar{j})$ dans le quotient G_{ab}, identifié au groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. On a $Z(\mathrm{G}) = D(\mathrm{G})$, et la classe de conjugaison de g_{ij} dans G est $g_{ij}\langle x \rangle$ (cf. 8.). Ainsi la partie haute de la table privée des colonnes de x et x^2 est la table de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (groupe abélien, donc isomorphe à son groupe dual). Les deux représentations de degré 3, duales l'une de l'autre, correspondent sur $Z(\mathrm{G}) = D(\mathrm{G})$ à une action fidèle par homothéties, et on a $\rho(x^2) = \rho(x)^2$. Leurs caractères sont conjugués.

	1	x	x^2	g_{10}	g_{20}	g_{01}	g_{02}	g_{11}	g_{22}	g_{12}	g_{21}
χ_{00}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_{10}	1	1	1	$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}^2$	1	1	$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}^2$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}^2$
χ_{20}	1	1	1	$\mathbf{j}^2$	$\mathbf{j}$	1	1	$\mathbf{j}^2$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}^2$	$\mathbf{j}$
χ_{01}	1	1	1	1	1	$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}^2$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}^2$	$\mathbf{j}^2$	$\mathbf{j}$
χ_{02}	1	1	1	1	1	$\mathbf{j}^2$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}^2$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}^2$
χ_{11}	1	1	1	$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}^2$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}^2$	$\mathbf{j}^2$	$\mathbf{j}$	1	1
χ_{22}	1	1	1	$\mathbf{j}^2$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}^2$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}^2$	1	1
χ_{12}	1	1	1	$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}^2$	$\mathbf{j}^2$	$\mathbf{j}$	1	1	$\mathbf{j}^2$	$\mathbf{j}$
χ_{21}	1	1	1	$\mathbf{j}^2$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}^2$	1	1	$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}^2$
χ'	3	$3\mathbf{j}$	$3\mathbf{j}^2$	0	0	0	0	0	0	0	0
χ''	3	$3\mathbf{j}^2$	$3\mathbf{j}$	0	0	0	0	0	0	0	0

Exercice 25

1. Soit G un groupe abélien fini. Pour $g \in \mathrm{G}$ notons δ_g l'élément de $\mathbb{C}[\mathrm{G}]$ qui vaut 1 en g et 0 sur $\mathrm{G} \smallsetminus \{g\}$.
   a) Énoncer la formule d'inversion de Fourier et l'appliquer aux éléments δ_g de $\mathbb{C}[\mathrm{G}]$.
   b) En déduire que le morphisme naturel de G dans son bidual $\widehat{\widehat{\mathrm{G}}}$ est injectif.
2. Soit V une représentation d'un groupe fini G qui est somme directe de r représentations irréductibles deux à deux non isomorphes.
   a) Décrire l'algèbre $\mathrm{End}_{\mathrm{G}}(V)$ des G-endomorphismes de V.
   b) Déterminer toutes les sous–représentations de V.
3. Soit G un groupe fini. Montrer que le produit d'un caractère irréductible de G par un caractère de degré 1 est un caractère irréductible de G de même degré.

Solution 25

1. Soit G un groupe abélien fini. Pour $g \in \mathrm{G}$ notons δ_g l'élément de $\mathbb{C}[\mathrm{G}]$ qui vaut 1 en g et 0 sur $\mathrm{G} \smallsetminus \{g\}$.
   a) Pour toute f dans $\mathbb{C}[\mathrm{G}]$, nous avons
   $$f = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{\xi \in \widehat{\mathrm{G}}} \widehat{f}(\chi)\chi^{-1}$$
   Et
   $$\widehat{\delta_g}(\chi) = \sum_{g'} \delta_g(g')\chi(g') = \chi(g).$$
   Ainsi
   $$\delta_g = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{\chi \in \widehat{\mathrm{G}}} \chi(g)\chi^{-1}.$$
   b) Soit $g \in \mathrm{G}$. Par a), la transformée de Fourier de δ_g est l'application $\chi \mapsto \chi(g)$. Elle s'identifie donc à l'image naturelle de g dans son bidual. Un élément g est dans le noyau de ce morphisme naturel d'évaluation si et seulement si tous les caractères $\chi \in \widehat{\mathrm{G}}$ y valent 1, c'est-à-dire si et seulement si g a même transformée de Fourier que 1. Par la formule d'inversion ceci équivaut à $g = 1$.
2. Soit V une représentation d'un groupe fini G qui est somme directe de r représentations irréductibles deux à deux non isomorphes.
   a) Si $V = \bigoplus_{i=1}^{r} V_i$, alors chaque élément de $\mathrm{End}_{\mathrm{G}}(V)$ se « décompose » en une somme directe de G-morphismes de V_i dans V_j, pour (i, j) variant dans $\{1, \ldots, r\} \times \{1, \ldots, r\}$. Par le lemme de Schur, les G-morphismes entre irréductibles non isomorphes sont nuls, et $\mathrm{End}_{\mathrm{G}}(V_i) = \mathbb{C}\mathrm{id}_{V_i}$. Nous en déduisons que l'algèbre $\mathrm{End}_{\mathrm{G}}(V)$ s'identifie au produit des algèbres $\mathbb{C}\mathrm{id}_{V_i}$ (blocs diagonaux d'une homothétie sur chaque V_i).
   b) On utilise l'unicité de la décomposition canonique de V : par l'hypothèse, toutes les composantes isotypiques de V sont irréductibles, et les sous-représentations sont toutes les sommes (directes) de certaines de ces composantes. (Attention, si une représentation irréductible apparaissait dans V avec multiplicité > 1, la composante isotypique correspondante, et par suite V, possèderait une infinité de sous-représentations irréductibles, toutes isomorphes !)

3. Soit G un groupe fini.

   Le produit des caractères de deux représentations V et (W, ρ) est le caractère de la représentation $\mathrm{Hom}(V^*, W)$, où V^* est la représentation duale de V. Ou encore : si $\dim V = 1$, ce produit est le caractère de la représention $\chi_V \cdot \rho$ de G sur W $(g \cdot w =: \chi_V(g) \cdot \rho(g)(w) \in W)$. Le degré de ce caractère produit est sa valeur en 1, donc clairement le degré de χ_W. L'irréductibilité du produit (valable si $\dim V = 1$!) s'obtient facilement en calculant le carré hermitien de $\chi_V \chi_W$, égal à celui de χ_W (car χ_V, morphisme de G dans $\mathbb{C}^\times$, a pour valeurs des racines de l'unité donc de module 1), donc ce carré hermitien vaut 1 par l'irréductibilité de χ_W. On peut aussi remarquer qu'une sous–représentation de $(W, \chi_V \cdot \rho)$, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel stable pour l'action correspondante de G, est une sous–représentation de (W, ρ), donc $\{0\}$ ou W.