Université Nice Côte d'Azur
Année 2020-2021

Fiche thématique :
Géométrie

Table des matières

Remarque. Pour alléger ce qui suit aucune démonstration n'est précisée ; vous pouvez en trouver sur
http ://deserti.perso.math.cnrs.fr/cours/prepa_agreg/groupes_et_geometrie.pdf.

1. Rappels de géométrie

1.1. Géométrie euclidienne.

1.1.1. *Isométrie euclidienne.* Considérons l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire $\langle\,,\,\rangle$ qui donne la norme euclidienne $||v|| = \sqrt{\langle\, v,\, v\rangle}$. La distance associée est donnée par $d(x,y) = ||x-y||$.

Définition 1.1. Une *isométrie euclidienne* φ est une application bijective de $\mathbb{R}^n$ qui préserve la norme euclidienne, *i.e.* qui vérifie

$$\forall\, x,\, y \in \mathbb{R}^n \qquad d(\varphi(x),\varphi(y)) = d(x,y).$$

Le *groupe des isométries euclidiennes* est $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, d)$.

Les translations et les élements du groupe orthogonal $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ sont des isométries euclidiennes. L'énoncé suivant donne toutes ces isométries :

***Théorème* 1.1.** — *Toute isométrie de $(\mathbb{R}^n, d)$ est une application affine.*

Toute isométrie de $(\mathbb{R}^n, d)$ qui fixe l'origine est donnée par un élément de $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$.

Le groupe $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ se décompose en un produit semi-direct de la façon suivante :

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{O}(n,\mathbb{R}) \ltimes (\mathbb{R}^n, +)$$

où $(\mathbb{R}^n, +)$ est identifié au groupe des translations de $\mathbb{R}^n$.

Rappelons qu'une application $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est *affine* s'il existe une application linéaire $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et un élément b de $\mathbb{R}^n$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on ait $f(x) = Ax + b$. Remarquons que le couple (A, b) est unique. En effet $b = f(0)$ et A est l'application linéaire $x \mapsto f(x) - f(0)$.

Pour $x \in \mathbb{R}^n$ nous notons τ_x la translation de vecteur x ; autrement dit $\tau_x(y) = y + x$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$.

Une notion importante en géométrie euclidienne est la notion d'angle. Soient A, B, C trois points de $\mathbb{R}^n$ tels que $A \neq B$, $C \neq B$; la *mesure de l'angle* $\widehat{ABC}$ est le nombre $\alpha \in [0, \pi]$ tel que

$$\cos\alpha = \frac{|\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\rangle|}{||\overrightarrow{BA}|| \cdot ||\overrightarrow{BC}||}. \tag{1}$$

Remarquons que nous parlons ici d'*angle géométrique* aussi appelé *angle non orienté*. Ce nombre est bien défini car $\frac{|\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\rangle|}{||\overrightarrow{BA}|| \cdot ||\overrightarrow{BC}||} \in [0, 1]$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

***Proposition* 1.2.** — *Les isométries de $\mathbb{R}^n$ préservent les angles. Autrement dit pour tout $g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$, pour tous A, B, $C \in \mathbb{R}^n$ avec $A \neq B$ et $C \neq B$ nous avons*

$$\widehat{g(A)g(B)g(C)} = \widehat{ABC}$$

Toute rotation plane est la composée de deux symétries ; ce résultat se généralise en dimension supérieure :

***Théorème* 1.3.** — *Le groupe $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ est engendré par les symétries orthogonales par rapport à des hyperplans affines.*

Plus exactement toute isométrie de $\mathbb{R}^n$ est la composée d'au plus $n+1$ telles symétries.

***Lemme* 1.4.** — *Soient $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ et $F \subset \mathbb{R}^n$ une partie finie. Si f préserve F (i.e. $f(F) = F$), alors f fixe l'isobarycentre de F.*

En particulier $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)}(F)$ est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$.

***Lemme* 1.5.** — *Soit f une isométrie donnée par $f(x) = Ax + b$ avec $A \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$.*

Alors f possède un point fixe si et seulement si b appartient à $\mathrm{Im}(A - \mathrm{id})$.

1.1.2. *Dimension* 2. Avant d'énoncer la classification des isométries en dimension deux rappelons la notion suivante.

Soient D une droite du plan et $\overrightarrow{v}$ un vecteur directeur de D. Une *symétrie glissée* d'axe D et de direction $\overrightarrow{v}$ est la composée de la réflexion d'axe D et de la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$. L'image d'un point M est donc obtenue en effectuant d'abord la symétrie orthogonale d'axe D, puis la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ (ou vice-versa).

***Proposition* 1.6.** — *Les éléments de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ sont :*
- *les translations,*
- *les rotations,*
- *les symétries axiales ou réflexions,*
- *les symétries glissées.*

Pour une preuve on renvoie à [Aud06] (l'idée est d'étudier les éventuels points fixes avec le Lemme 1.5).

Définitions 1.2. Soient $n \geq 2$ et A_1, A_2, ..., A_n des points du plan tels que $A_i \neq A_{i+1}$ pour $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

La *ligne polygonale* $\mathcal{L}$ associée à ces points est la suite $\big([A_1, A_2], [A_2, A_3], , \ldots, [A_n, A_1]\big)$.

Les segments $[A_i, A_{i+1}]$ sont les *côtés* de $\mathcal{L}$, les points A_i ses *sommets*.

La ligne polygonale $\mathcal{L}$ est *simple* si lorsque deux côtés s'intersectent alors ce sont deux côtés consécutifs (*i.e.* de la forme $[A_{i-1}, A_i]$ et $[A_i, A_{i+1}]$) et leur intersection est réduite à un point (nécessairement A_i).

***Théorème* 1.7** (Théorème de Jordan pour les polygones). — *Soit $\mathcal{L}$ une ligne polygonale simple. Le complémentaire de la réunion des côtés de $\mathcal{L}$ a deux composantes connexes, l'une bornée appelée intérieur et une non-bornée appelée extérieur.*

Définition 1.3. On appelle *polygone* la réunion des côtés d'une ligne polygonale simple et de son intérieur.

Un polygone est *convexe* si son intérieur l'est.

Définition 1.4. Un polygone convexe est *régulier* si tous ses côtés sont égaux et tous ses angles sont égaux.

***Théorème* 1.8.** — *Soit $P = A_1A_2 \ldots A_n$ un polygone convexe à n côtés. Les conditions sont équivalentes :*

- ◇ *P est régulier ;*
- ◇ *tous les côtés de P sont égaux et les points A_i sont cocycliques (i.e. sur un même cercle) ;*
- ◇ *les sommets de P sont sur un cercle de centre O et tous les angles au centre $\widehat{A_iOA_{i+1}}$ sont égaux ;*
- ◇ *le polygone est semblable à l'enveloppe convexe*[1] *de* $\left\{e^{2\mathbf{i}\pi k/n} \mid k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right\}$.

Le point O du théorème est alors le *centre circonscrit* au polygone P.

Si $E \subset \mathbb{R}^n$, nous notons $\mathrm{Isom}(E)$ le sous-groupe de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ qui préserve E. Nous notons aussi $\mathrm{Isom}^+(E)$ le sous-groupe de $\mathrm{Isom}(E)$ des isométries qui préservent l'orientation.

***Théorème* 1.9.** — *Si $P_n = A_0A_1 \ldots A_{n-1}$ est un polygone régulier à n côtés, alors* $\mathrm{Isom}(P_n) \simeq \mathrm{D}_{2n}$.

1.1.3. *Dimension* 3. Avant d'énoncer la classification des isométries en dimension trois rappelons qu'un *vissage* (ou *rotation glissée*) est un déplacement dans un espace affine euclidien qui est la composée commutative d'une rotation et d'une translation selon un vecteur dirigeant l'axe de rotation (si la rotation n'est pas l'identité). Une *anti-rotation* est un type particulier d'antidéplacement (*i.e.* d'isométrie qui renverse l'orientation) de l'espace euclidien de dimension 3 (espace affine euclidien ou espace vectoriel euclidien, suivant le contexte) : c'est la composée commutative d'une rotation d'angle ϑ autour d'un axe Δ et d'une réflexion par rapport à un plan perpendiculaire à Δ.

***Théorème* 1.10.** — *Les éléments de* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$ *sont :*

---

1. Soit A une partie de E. L'*enveloppe convexe* de A est l'intersection de toutes les parties convexes de E qui contiennent A. Une caractérisation de A est la suivante : l'enveloppe convexe de A est la plus petite partie convexe de E qui contient A.

- ◇ *les translations,*
- ◇ *les rotations,*
- ◇ *les rotations glissées (appelées aussi vissages),*
- ◇ *les symétries orthogonales par rapport à un plan,*
- ◇ *les symétries glissées,*
- ◇ *les anti-rotations.*

Pour une preuve on renvoie à [Aud06].

Rappelons que $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ est le groupe des rotations de l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^3$. Le théorème suivant montre que le groupe $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ est simple :

***Théorème* 1.11.** — *Le groupe* $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ *est simple.*

Définitions 1.5. Un *polyèdre convexe* P est un compact d'intérieur non vide tel que P est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces délimités par des plans affines H_1, H_2, ..., H_n.

Les *faces* de P sont les intersections de P avec les H_i. Ce sont des polygones convexes. Leurs arêtes sont appelées *arêtes* de P et leurs sommets sont appelés *sommets*.

***Proposition* 1.12.** — *Soit* P *un polyèdre convexe.*

- ◇ *Le nombre de côtés d'une face est au moins* 3.
- ◇ *Le nombre d'arêtes issues d'un sommet est égal au nombre de faces qui contiennent ce sommet et ce nombre est au moins* 3.
- ◇ *Une arête appartient à exactement deux faces.*
- ◇ *La somme des angles en un sommet est strictement inférieure à* 2π.

Pour une démonstration de cet énoncé voir par exemple [Ber77].

Définitions 1.6. Un polyèdre convexe est *régulier* si toutes ces faces sont des polygones réguliers à p côtés et tous ses sommets appartiennent à exactement q faces.

Le couple (p,q) est appelé *symbole de Schläfli* du polyèdre régulier.

***Théorème* 1.13.** — *Il existe exactement cinq types de polyèdres convexes réguliers correspondant aux symboles de Schläfli suivants :*

polyèdre	*symbole de Schläfli*
tétraèdre régulier	$(3,3)$
cube	$(4,3)$
octaèdre régulier	$(3,4)$
isocaèdre régulier	$(3,5)$
dodécaèdre régulier	$(5,3)$

La liste des polyèdres réguliers étant établie, nous nous intéressons à leurs groupes d'isométries. Le *dual* d'un polyèdre est l'enveloppe convexe des milieux de ses faces. Par exemple le dual du cube est un octaèdre. Plus généralement le dual du polyèdre régulier de symbole (p,q) est le polyèdre régulier de symbole (q,p). Le passage au polyèdre dual échange les faces et les sommets. On peut vérifier qu'un polyèdre et son dual ont le même groupe d'isométries.

***Proposition* 1.14.** — *Soit* $X \subset \mathbb{R}^3$. *Désignons par* $\mathrm{Isom}(X)$ *le groupe des isométries de* $\mathbb{R}^3$ *qui préservent* X.

Si O est le centre de symétrie de X et si g est une isométrie de X, *alors $g(O) = O$.*
De plus $\mathrm{Isom}(X) \simeq \mathrm{Isom}^+(X) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

***Proposition* 1.15.** — *Le groupe d'isométries du tétraèdre régulier Δ_4 est isomorphe à $\mathcal{S}_4$.*
Le groupe d'isométries directes du tétraèdre régulier Δ_4 est isomorphe à $\mathcal{A}_4$.

***Proposition* 1.16.** — *Le groupe d'isométries directes du cube est isomorphe à $\mathcal{S}_4$.*
Le groupe d'isométries du cube est isomorphe à $\mathcal{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
Par dualité le groupe d'isométries directes de l'octaèdre régulier est isomorphe à $\mathcal{S}_4$ et le groupe d'isométries de l'octaèdre régulier est isomorphe à $\mathcal{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

***Proposition* 1.17.** — *Le groupe d'isométries du dodécaèdre est isomorphe à $\mathcal{A}_5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*
Le groupe d'isométries directes du dodécaèdre est isomorphe à $\mathcal{A}_5$.
Par dualité le groupe d'isométries de l'icosaèdre est isomorphe à $\mathcal{A}_5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et son groupe d'isométries directes est isomorphe à $\mathcal{A}_5$.

1.2. **Les sous-groupes finis de** $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ **(*voir par exemple*** [CG17, chap. 12]**,** [CG15, chap. 9]**,** [Szp09, p. 434-437]**).**

***Théorème* 1.18.** — *Tout sous-groupe fini de* $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ *est isomorphe à* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, D_{2n}, $\mathcal{A}_4$, $\mathcal{S}_4$ *ou* $\mathcal{A}_5$.
Plus précisément si G *est un sous-groupe fini de* $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$, *alors* G *est conjugué au groupe des rotations préservant l'un des polyèdres suivants* (*les cas $n = 1$, 2 mis à part*)

- $\diamond$ Isom^+(*pyramide de base un polygone régulier à n côtés*) $\simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *;*
- $\diamond$ Isom^+(*double pyramide de base un polygone régulier à n côtés*) $\simeq \mathrm{D}_{2n}$ *;*
- $\diamond$ Isom^+(*tétraèdre régulier*) $\simeq \mathcal{A}_4$ *;*
- $\diamond$ Isom^+(*cube*) $\simeq \mathcal{S}_4$ *;*
- $\diamond$ Isom^+(*icosaèdre régulier*) $\simeq \mathcal{A}_5$.

Remarque 1.1. Le groupe $\mathcal{S}_4$ intervient à la fois comme $\mathrm{Isom}^+(\text{cube})$ et comme Isom(tétraèdre). On peut transposer dans chacun de ces trois points de vue tout ce que l'on sait sur ce groupe (classe de conjugaison, sous-groupes d'ordre donné, etc)

1.3. **Géométrie affine.**

1.3.1. *Espaces affines.* Rappelons qu'une action d'un groupe G sur un ensemble E est simplement transitive si elle est transitive et libre, *i.e.* si pour tous x, y dans E il existe un unique $g \in \mathrm{G}$ tel que $gx = y$.

Définition 1.7. Soit E un espace vectoriel. Un *espace affine* $\mathcal{A}$ est un ensemble muni d'une action simplement transitive de $(E, +)$.
L'espace vectoriel E est appelé *la direction de* $\mathcal{A}$.
La *dimension* de $\mathcal{A}$ est la dimension de E.

Soit $\alpha\colon E \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ l'action ci-dessus. Notons $\tau_v(A) = \alpha(v, A)$. L'application $A \mapsto \tau_v(A)$ est appelée *translation de vecteur* v. On note aussi $\tau_v(A) = A + v$. Étant donnée que α est une action, nous avons

$$\tau_v \circ \tau_u = \tau_{u+v}$$

ce qui correspond à $(A + u) + v = A + (u + v)$.

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine de direction E. Soient A, B deux éléments de $\mathcal{A}$. Il existe un unique $v \in E$ tel que $B = A + v$. Nous désignons v par $\overrightarrow{AB} \in E$.

***Lemme* 1.19** (Relation de Chasles). — *Soient A, B et C trois points d'un espace affine. Alors*

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

Définitions 1.8. Soit $\mathcal{A}$ un espace affine de direction E. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

Un *sous-espace affine* $\mathcal{F}$ de direction F est un ensemble tel qu'il existe $A \in \mathcal{F}$ avec $\mathcal{F} = \{A + v \mid v \in F\}$.

En particulier nous appelons *droite affine* un sous-espace affine de dimension 1 et *plan affine* un sous-espace affine de dimension 2.

***Lemme* 1.20.** — *Soit $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ une collection de sous-espaces affines de direction $(F_i)_{i\in I}$.*

L'intersection $\bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ est vide ou un sous-espace affine de direction $\bigcap_{i\in I} F_i$.

Définition 1.9. Soient $\mathcal{A}$ un espace affine et $P \subset \mathcal{A}$ un sous-espace non vide.

Le *sous-espace engendré par P* est l'intersection de tous les sous-espaces affines qui contiennent P. C'est le plus petit sous-espace affine (au sens de l'inclusion) qui contient P.

Exemple 1.1. Soient E un $\Bbbk$-espace vectoriel et $\mathcal{A}$ un espace affine de direction E. Soient A et B deux points distincts de $\mathcal{A}$. Le sous-espace affine engendré par A et B est la droite $(AB) = \{A + \lambda\overrightarrow{AB} \mid \lambda \in \Bbbk\}$.

Définition 1.10. Deux sous-espaces affines sont *parallèles* s'ils ont même direction.

Définition 1.11. Soient $\mathcal{A}$ un espace affine et O un point de $\mathcal{A}$. L'application

$$E \to \mathcal{A}, \qquad\qquad v \mapsto O + v$$

est une bijection permettant de transporter la structure d'espace vectoriel de E à $\mathcal{A}$.

L'espace vectoriel obtenu est appelé le *vectorialisé* de $\mathcal{A}$ en O.

Exemple 1.2. Un espace vectoriel E possède une structure canonique d'espace affine obtenue en faisant agir $(E, +)$ sur lui-même par translations.

Remarque 1.2. Attention la structure d'espace vectoriel ainsi construite dépend du point O choisi.

Ainsi un espace vectoriel est la donnée d'un espace affine et d'une origine. En oubliant l'origine d'un espace vectoriel nous obtenons un espace affine et en rajoutant une origine à un espace affine nous obtenons un espace vectoriel.

Définition 1.12. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ deux espaces affines de directions E et E', espaces vectoriels sur un même corps.

Une application $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ est *affine* s'il existe une application linéaire $L\colon E \to E'$ telle que

$$\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = L(\overrightarrow{AB}) \quad \forall\, A,\ B \in \mathcal{A}.$$

***Proposition* 1.21.** — *L'image directe d'un sous-espace affine par une application affine est un sous-espace affine.*

L'image réciproque d'un sous-espace affine par une application affine est un sous-espace affine.

Rappelons que trois points sont *alignés* s'il existe une droite affine les contenant tous les trois.

***Corollaire* 1.22.** — *Les applications affines préservent l'alignement.*

1.3.2. *Groupe affine.*

***Lemme* 1.23.** — *Soit $\mathcal{A}$ un espace affine de direction E.*
Soient φ et φ' deux applications affines de parties linéaires L et L'.
La composée $\varphi' \circ \varphi$ est affine de partie linéaire $L' \circ L$.
Si φ est affine inversible de partie linéaire L, alors φ^{-1} est affine de partie linéaire L^{-1}.

***Théorème* 1.24.** — *Soit $\mathcal{A}$ un espace affine de direction E.*
Les transformations affines inversibles forment un groupe appelé groupe affine $\mathrm{GA}(\mathcal{A})$.
De plus

$$\mathrm{GA}(\mathcal{A}) \simeq \mathrm{GL}(E) \ltimes E.$$

Remarque 1.3. Dans l'identification $\mathrm{GA}(\mathcal{A}) \simeq \mathrm{GL}(E) \ltimes E$ nous utilisons une origine. L'identification n'est pas canonique puisqu'elle dépend de ce choix.

1.3.3. *Théorème fondamental de la géométrie affine.* Une bijection φ d'un espace affine $\mathcal{A}$ *préserve l'alignement* si pour tout triplet de points A, B, C ces points sont alignés si et seulement si les points $\varphi(A)$, $\varphi(B)$ et $\varphi(C)$ sont alignés.

***Théorème* 1.25** (Théorème fondamental de la géométrie affine)**.** — *Soit $\mathcal{A}$ un espace affine réel de dimension finie ≥ 2.*
Toute bijection de $\mathcal{A}$ qui préserve l'alignement est une transformation affine.

Remarque 1.4. Cet énoncé est propre au cas réel. Sa démonstration fait en particulier appel aux résultats suivants :

***Proposition* 1.26.** — *Le seul automorphisme du corps $(\mathbb{R}, +, \times)$ est l'identité.*

***Lemme* 1.27.** — *Soient A, B, C trois points non alignés dans un espace affine $\mathcal{A}$. Le plan engendré par ces trois points est la réunion des droites (DE) avec $D \in (AB)$ et $E \in (AC)$.*

2. Rappels sur les produits semi-directs

Soient G, H et N trois groupes. Soient $i\colon \mathrm{N} \to \mathrm{G}$ et $p\colon \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ deux morphismes de groupes. Si

- ⋄ i est injectif,
- ⋄ p est surjectif,
- ⋄ $\operatorname{im} i = \ker p$,

on parle de *suite exacte* et on note

$$1 \longrightarrow \mathrm{N} \xrightarrow{i} \mathrm{G} \xrightarrow{p} \mathrm{H} \longrightarrow 1.$$

Exemple 2.1. Le groupe symétrique $\mathcal{S}_3$ compte six éléments

$$\mathrm{id},\qquad (1\ 2),\qquad (1\ 3),\qquad (2\ 3),\qquad \sigma=(1\ 2\ 3),\qquad \sigma^2=\sigma^{-1}=(1\ 3\ 2).$$

Il contient un sous-groupe distingué d'ordre 3

$$\langle\sigma\rangle=\{1,\,\sigma,\,\sigma^2\}=\mathcal{A}_3$$

isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et on a la suite exacte suivante

$$1\longrightarrow\mathcal{A}_3\simeq\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\longrightarrow\mathcal{S}_3\xrightarrow{\mathrm{sgn}}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\longrightarrow 1.$$

Soient G un groupe, $\mathrm{N}\lhd\mathrm{G}$ un sous-groupe distingué et G/N le groupe quotient. Connaissant N et G/N nous cherchons à reconstituer G. Plus généralement étant donnés deux groupes N et H nous cherchons tous les groupes G tels qu'on ait une suite exacte

$$1\longrightarrow\mathrm{N}\longrightarrow\mathrm{G}\longrightarrow\mathrm{H}\longrightarrow 1.$$

Un tel groupe G est une *extension* de N par H. Le problème général est délicat et nous en étudions deux cas particuliers : les produits directs et les produits semi-directs.

2.1. **Produits directs.** Soient N et H deux groupes. Le *produit direct* $\mathrm{G}=\mathrm{N}\times\mathrm{H}$ est le produit cartésien de N et H muni de la loi produit :

$$(n,h)(n',h')=(nn',hh').$$

On a alors une projection $p\colon\mathrm{G}\to\mathrm{H}$ définie par $p(n,h)=h$. C'est un morphisme de groupes surjectif de noyau le sous-groupe distingué

$$\overline{\mathrm{N}}=\big\{(n,1)\,|\,n\in\mathrm{N}\big\}.$$

Considérons $i\colon\mathrm{N}\to\mathrm{N}\times\mathrm{H}$, $n\mapsto(n,1)$. On a la suite exacte

$$1\longrightarrow\mathrm{N}\xrightarrow{\ i\ }\mathrm{N}\times\mathrm{H}\xrightarrow{\ p\ }\mathrm{H}\longrightarrow 1.$$

Notons que les groupes N et H jouent des rôles symétriques. Le sous-groupe

$$\overline{\mathrm{H}}=\big\{(1,h)\,|\,h\in\mathrm{H}\big\}$$

noyau de la projection sur N est tel que

- ◇ la restriction de la projection $p_{|\overline{\mathrm{H}}}\colon\overline{\mathrm{H}}\to\mathrm{H}$ est un isomorphisme,
- ◇ $\overline{\mathrm{H}}$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{N}\times\mathrm{H}$.

Un exemple classique de produit direct est donné par le lemme chinois :

***Lemme* 2.1** (Lemme chinois). — *Si p et q sont premiers entre eux, alors*

$$\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}\simeq\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}.$$

2.2. **Produits semi-directs.** Le produit semi-direct est une variante affaiblie du produit direct.

Soient G un groupe et N un sous-groupe distingué de G. Si i est l'inclusion on a une suite exacte

$$1\longrightarrow\mathrm{N}\xrightarrow{\ i\ }\mathrm{G}\xrightarrow{\ p\ }\mathrm{G}/\mathrm{N}\longrightarrow 1.$$

Supposons que comme dans le cas du produit direct, il existe un sous-groupe H de G tel que $p_{|\mathrm{H}}$ induise un isomorphisme de H sur G/N. Contrairement au cas du produit direct H n'est pas distingué a priori. Par conséquent

- ◇ $\mathrm{N}\cap\mathrm{H}=\{e\}$;

◇ $\mathrm{G} = \mathrm{NH} = \{nh \mid n \in \mathrm{N},\ h \in \mathrm{H}\}$.

Nous avons les deux propriétés suivantes :

◇ comme dans le cas du produit direct G est en bijection avec le produit ensembliste $\mathrm{N} \times \mathrm{H}$;

◇ la multiplication n'est pas celle du produit direct, elle est "tordue" au moyen de l'opération de H sur N par conjugaison $h \cdot n = hnh^{-1}$; on a

$$(n,h)(n',h') = (n(h \cdot n'), hh').$$

Cette opération de H sur N n'est pas seulement ensembliste, le groupe H opère sur N par automorphismes de groupes.

En effet

◇ si $g \in \mathrm{G}$ et si $\overline{g} = p(g)$, il existe $h \in \mathrm{H}$ tel que $p(h) = \overline{g}$ donc gh^{-1} appartient à N. L'écriture de g sous la forme nh est unique (en effet supposons que $nh = n'h'$, soit que ${n'}^{-1}n = h'h^{-1}$; puisque $\mathrm{N} \cap \mathrm{H} = \{e\}$ on a ${n'}^{-1}n = h'h^{-1} = e$, *i.e.* $(n,h) = (n',h')$) de sorte que G est en bijection avec NH.

◇ Si on calcule le produit de deux éléments de G, alors

$$(nh)(n'h') = nhn'h' = n\underbrace{hn'h^{-1}}_{h\cdot n'}hh'$$

avec $hn'h^{-1}$ appartient à N car N est distingué dans G.

On définit donc le produit semi-direct comme suit.

Proposition-Définition 2.2. — ◇ *Soient* N *et* H *deux groupes. Soit* $\mathrm{Aut}(\mathrm{N})$ *le groupe des automorphismes de groupe de* N. *Soit* $\varphi\colon \mathrm{H} \to \mathrm{Aut}(\mathrm{N})$ *un morphisme qui définit une opération de* H *sur* N *par la formule* $h\cdot n = \varphi(h)(n)$.

On définit sur l'ensemble produit $\mathrm{N} \times \mathrm{H}$ *une loi par*

$$(n,h)(n',h') = \big(n(h \cdot n'), hh'\big).$$

Alors $\mathrm{N} \times \mathrm{H}$, *muni de cette loi, est un groupe appelé produit semi-direct de* N *par* H *relativement à* φ *et noté* $\mathrm{N} \rtimes_\varphi \mathrm{H}$ *ou plus simplement* $\mathrm{N} \rtimes \mathrm{H}$.

◇ *On a la suite exacte*

$$1 \longrightarrow \mathrm{N} \xrightarrow{i} \mathrm{N} \rtimes \mathrm{H} \xrightarrow{p} \mathrm{H} \longrightarrow 1$$

où $i\colon n \mapsto (n,1)$ *et* $p\colon (n,h) \mapsto h$, *de sorte que* $\mathrm{N} \rtimes \mathrm{H}$ *est une extension de* N *par* H.

Remarques 2.1. ◇ Le groupe $\mathrm{N} \rtimes \mathrm{H}$ contient deux sous-groupes isomorphes respectivement à N et H

$$\overline{\mathrm{N}} = \{(n,1) \mid n \in \mathrm{N}\}, \qquad \overline{\mathrm{H}} = \{(1,h) \mid h \in \mathrm{H}\}.$$

◇ Nous avons $\overline{\mathrm{N}} \cap \overline{\mathrm{H}} = \{e\}$ et $\mathrm{N} \rtimes \mathrm{H} = \overline{\mathrm{N}}\,\overline{\mathrm{H}}$ car $(n,1)(1,h) = (n,h)$.

◇ Si φ n'est pas trivial, alors le groupe obtenu n'est pas abélien ($(1,h)(n,1) = (h \cdot n, h)$ est en général distinct de (n,h)).

◇ Si nous identifions N et H à $\overline{\mathrm{N}}$ et $\overline{\mathrm{H}}$, alors $\varphi\colon h \mapsto h\cdot n = \varphi(h)(n)\colon n \mapsto hnh^{-1}$.

Donnons des conditions permettant d'assurer que G est un produit.

Proposition 2.3. — *a) Si on a une suite exacte*

$$1 \longrightarrow \mathrm{N} \xrightarrow{i} \mathrm{G} \xrightarrow{p} \mathrm{H} \longrightarrow 1$$

et s'il existe un relèvement $\overline{\mathrm{H}}$ *de* H, *c'est-à-dire un sous-groupe* $\overline{\mathrm{H}}$ *de* G *tel que la restriction de la projection* p *à* $\overline{\mathrm{H}}$ *soit un isomorphisme de* $\overline{\mathrm{H}}$ *sur* H, *le groupe* G *est isomorphe à un produit semi-direct* $\mathrm{N} \rtimes \mathrm{H}$. *Cela revient à dire que* p *possède une section, i.e. qu'il existe un morphisme* $s\colon \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *tel que* $p \circ s = \mathrm{id}_{\mathrm{H}}$. *L'extension est alors dite scindée.*

b) *Soit* G *un groupe. Soient* N *et* H *deux sous-groupes de* G *tels que*
- $\diamond$ $\mathrm{N} \triangleleft \mathrm{G}$,
- $\diamond$ $\mathrm{N} \cap \mathrm{H} = \{e\}$,
- $\diamond$ $\mathrm{G} = \mathrm{NH}$.

Alors $\mathrm{G} \simeq \mathrm{N} \rtimes \mathrm{H}$.

On peut caractériser les produits directs parmi les produits semi-directs :

***Proposition* 2.4.** — *Soient* N *et* H *deux groupes. Soit* $\mathrm{Aut}(\mathrm{N})$ *le groupe des automorphismes de groupe de* N. *Soit* $\varphi\colon \mathrm{H} \to \mathrm{Aut}(\mathrm{N})$ *un morphisme qui définit une opération de* H *sur* N *par la formule* $h \cdot n = \varphi(h)(n)$.

Soit $\mathrm{G} = \mathrm{N} \rtimes_\varphi \mathrm{H}$. *Soit* $\overline{\mathrm{H}}$ *le sous-groupe des éléments* $(1, h)$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :
- — φ *est trivial (i.e. nous avons* $\varphi(h) = \mathrm{id}_{\mathrm{N}}$ *pour tout* $h \in \mathrm{H}$*) ;*
- — *le sous-groupe* $\overline{\mathrm{H}}$ *est distingué dans* G *;*
- — *la loi de groupe sur* G *est celle du produit direct.*

(C'est le cas en particulier si l'extension est centrale, i.e. si $\mathrm{N} \subset Z(\mathrm{G})$*).*

Remarques 2.2. $\diamond$ Soient N et H deux groupes. Soient $\varphi\colon \mathrm{H} \to \mathrm{Aut}(\mathrm{N})$ et $\psi\colon \mathrm{H} \to \mathrm{Aut}(\mathrm{N})$ deux morphismes. S'il existe $u \in \mathrm{Aut}(\mathrm{N})$ tel que $\psi(h) = u \circ \varphi(h) \circ u^{-1}$ ("actions conjuguées") alors $\mathrm{N} \rtimes_\varphi \mathrm{H} \simeq \mathrm{N} \rtimes_\psi \mathrm{H}$.

$\diamond$ Soient N et H deux groupes. Soient $\varphi\colon \mathrm{H} \to \mathrm{Aut}(\mathrm{N})$ et $\psi\colon \mathrm{H} \to \mathrm{Aut}(\mathrm{N})$ deux morphismes. S'il existe $\alpha \in \mathrm{Aut}(H)$ tel que $\varphi = \psi \circ \alpha$, alors $\mathrm{N} \rtimes_\varphi \mathrm{H} \simeq \mathrm{N} \rtimes_\psi \mathrm{H}$ (envoyer $nh \in \mathrm{N} \rtimes_\varphi \mathrm{H}$ sur $n\alpha(h) \in \mathrm{N} \rtimes_\psi \mathrm{H}$).

Exemple 2.2 (Le groupe linéaire)**.** Soit $\Bbbk$ un corps. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathrm{SL}(n, \Bbbk) \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \Bbbk) \stackrel{\det}{\longrightarrow} \Bbbk^* \longrightarrow 1$$

est scindée (envoyer $\lambda \in \Bbbk^*$ sur la matrice $\mathrm{diag}(\lambda, 1, 1, \ldots, 1)$). Par conséquent $\mathrm{GL}(n, \Bbbk) \simeq \mathrm{SL}(n, \Bbbk) \rtimes \Bbbk^*$.

Exemple 2.3 (Le groupe affine)**.** Soit L le groupe affine de $\mathbb{R}$ constitué des applications de la forme $x \mapsto ax + b$ avec $a \neq 0$. Soit H le groupe des translations $x \mapsto x + b$, isomorphe à $\mathbb{R}$, et soit K le sous-groupe des homothéties de centre 0

$$\mathrm{K} = \left\{x \mapsto ax \,|\, a \in \mathbb{R}^*\right\}$$

isomorphe à $\mathbb{R}^*$. Le groupe affine est donc isomorphe au produit semi-direct $\mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}^*$ dans lequel le produit s'écrit

$$(b, a)(b', a') = (b + ab', aa').$$

En effet tout élément $f\colon x \mapsto ax + b$ de L s'écrit $g \circ h$ où g désigne l'élément de H donné par $x \mapsto x + b$ et h désigne l'élément de K donné par $x \mapsto ax$. Considérons maintenant $f\colon x \mapsto ax + b$ et $g\colon x \mapsto a'x + b'$ dans L, alors

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(a'x + b') = a(a'x + b') + b = aa'x + (ab' + b).$$

Exemple 2.4 (Le groupe symétrique)**.** Nous avons la suite exacte suivante définie par la signature

$$1 \longrightarrow \mathcal{A}_n \longrightarrow \mathcal{S}_n \stackrel{\mathrm{sgn}}{\longrightarrow} \{-1,\, 1\} \to 1.$$

Si τ est une transposition, nous avons une section s de sgn en posant $s(1) = \mathrm{id}$ et $s(-1) = \tau$. La Proposition 2.3 assure que

$$\mathcal{S}_n \simeq \mathcal{A}_n \rtimes \{-1,\, 1\} \simeq \mathcal{A}_n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

et le produit n'est pas direct.

Exemple 2.5 (Le groupe cyclique $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$)**.** Le groupe cyclique $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ n'est pas de la forme $\mathrm{N} \rtimes \mathrm{H}$. En effet comme $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ est abélien, le produit serait direct. Or $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ n'est isomorphe ni à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ni à $\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^3$ qui sont les seuls possibles.

Exemple 2.6 (Le groupe diédral, v1)**.** Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Rappelons que le groupe diédral D_{2n} d'ordre $2n$ est le sous-groupe de $\mathrm{O}(2, \mathbb{R})$ engendré par la rotation ρ d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et la symétrie σ autour de l'axe des abscisses dans $\mathbb{R}^2$. Autrement dit il s'agit du groupe engendré par les matrices

$$\rho = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix} \qquad\qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Puisque ρ et σ laissent invariant l'ensemble des sommets du polyèdre régulier à n côtés, noté P_n, le groupe D_{2n} laisse invariant ce polyèdre régulier.

La rotation ρ engendre le groupe des rotations d'angle $\frac{2k\pi}{n}$ avec $0 \leq k \leq n-1$ et donc $\langle\rho\rangle \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. De plus $\sigma^2 = \mathrm{id}$ ainsi $\langle\sigma\rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Un calcul montre que

$$\sigma\rho\sigma^{-1} = \sigma\rho\sigma = \rho^{-1}$$

et par récurrence nous obtenons

$$\sigma\rho^k\sigma^{-1} = \rho^{-k}.$$

Par suite tous les éléments de $\langle\rho,\, \sigma\rangle$ sont de la forme ρ^k ou $\rho^k\sigma$. Par conséquent

$$\mathrm{D}_{2n} = \left\{\rho^k,\, \rho^k\sigma \,|\, 0 \leq k \leq n-1\right\}.$$

ce groupe se décompose en produit semi-direct

$$\mathrm{D}_{2n} \simeq \langle\rho\rangle \rtimes \langle\sigma\rangle.$$

En effet
- $\langle\rho\rangle \cap \langle\sigma\rangle = \{\mathrm{id}\}$,
- tout élément de D_{2n} est le produit d'un élément de $\langle\rho\rangle$ par un élément de $\langle\sigma\rangle$
- comme $\sigma\rho^k\sigma^{-1} = \rho^{-k}$ le sous-groupe $\langle\rho\rangle$ est distingué.

Nous pouvons penser à ce produit semi-direct comme suit : puisque $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un groupe abélien, $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1} = g^{-1}h^{-1}$, *i.e.* l'application $g \mapsto g^{-1}$ est un isomorphisme de groupes. Ainsi l'application

$$\varphi\colon \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +\right) \to \mathrm{Aut}\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +\right)$$

donnée par

$$\varphi(0) = \mathrm{id} \qquad\qquad \varphi(1)(m) = -m$$

est un morphisme de groupes et la description précédente montre que

$$\mathrm{D}_{2n} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ltimes_\varphi \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Exemple 2.7 (Le groupe diédral infini)**.** Remplaçons les sommets d'un polyèdre régulier par les entiers sur l'axe réel. Pour $n \in \mathbb{Z}$ notons τ_n la translation de n ;

$$\tau_n \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \qquad m \mapsto m+n.$$

Pour simplifier posons $\tau = \tau_1$ et notons σ la symétrie en 0, c'est-à-dire $\sigma(m) = -m$. Le *groupe diédral infini* D_∞ est le sous-groupe $\langle \tau, \sigma \rangle$ des bijections de $\mathbb{Z}$ dans lui-même.

Remarquons que $\sigma^2 = \mathrm{id}$ et $\sigma\tau_m\sigma = \tau_{-m}$. Comme pour le groupe diédral nous pouvons montrer que

$$\mathrm{D}_\infty \simeq \langle \tau \rangle \rtimes \langle \sigma \rangle.$$

En identifiant $\langle \tau \rangle$ à $(\mathbb{Z}, +)$ via l'isomorphisme $n \mapsto \tau_n = \tau^n$ et $\langle \sigma \rangle$ à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ via $i \mapsto \sigma^i$ nous obtenons la décomposition en produit semi-direct

$$\mathrm{D}_\infty \simeq \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Exemple 2.8. Soient p et q des nombres premiers avec $p < q$.

Les groupes d'ordre pq sont tous cycliques si p ne divise pas $q-1$ (c'est une application classique des théorèmes de Sylow).

Si par contre p divise $q-1$ nous avons un produit semi-direct non commutatif $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ via le fait qu'il y a des morphismes non triviaux $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}\left(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}\right) \simeq \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$.

3. Exercices

Exercice 1 Montrer que le groupe affine $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$ de l'espace affine dont l'espace vectoriel associé est E est isomorphe à un produit semi-direct de E et $\mathrm{GL}(E)$.

Exercice 2 Déterminer la composée de deux symétries vectorielles orthogonales planes.

Déterminer l'ordre de cette composée.

Exercice 3 Montrer que toute rotation plane se décompose en le produit de deux symétries.

Que pouvons-nous dire pour les rotations de l'espace ?

Exercice 4 Déterminer le groupe des isométries du plan qui conservent un rectangle non carré.

Établir la table de ce groupe.

Exercice 5 Quelle est la matrice de la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'angle θ autour de l'axe $\mathbb{R}e_2$?

Exercice 6 Soit $M \in \mathrm{O}(3, \mathbb{R})$ de déterminant -1.

Montrer que -1 est valeur propre de M.

Exercice 7 Soit M une matrice orthogonale 2×2 et de déterminant -1.

Montrer que M est la matrice d'une symétrie orthogonale.

Exercice 8 Soit $M \in \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ la rotation d'angle θ. Montrer que

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Tr}\, M - 1\right).$$

Solution 1 Si M est la matrice d'une rotation d'angle θ, alors M est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par suite $\operatorname{Tr} M = 2\cos\theta - 1$ et $\cos\theta = \frac{1}{2}\Big(\operatorname{Tr} M - 1\Big)$.

Exercice 9 Soit s une symétrie plane d'axe $\mathcal{D}$.

(1) Soit t une translation de vecteur $\overrightarrow{v}$. Montrer que la composée $t \circ s$ (resp. $s \circ t$) est une symétrie si et seulement si $\overrightarrow{v}$ est normal à $\mathcal{D}$.

(2) Soit r une rotation de centre C. Montrer que la composée $r \circ s$ (resp. $s \circ r$) est une symétrie si et seulement si C appartient à $\mathcal{D}$.

(3) Soient s' et s'' deux symétries axiales. Montrer que $s \circ s' \circ s''$ est une symétrie si et seulement si les axes de s' et s'' sont parallèles à $\mathcal{D}$ ou se rencontrent en un point de $\mathcal{D}$.

Exercice 10 Montrer que pour une translation t de vecteur $\overrightarrow{u}$ et une symétrie s d'axe $\mathcal{D}$ nous avons $t \circ s = s \circ t$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ est dans la direction de $\mathcal{D}$.

Exercice 11 Soit $\mathcal{R}$ le réseau plan des points à coordonnées entières dans un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Quelles sont les isométries affines qui conservent $\mathcal{R}$?

Quelles sont les centres des rotations affines qui conservent $\mathcal{R}$?

Exercice 12 Soit $\mathfrak{S}$ la représentation graphique dans un repère orthonormal de la fonction sinus.

Quelles sont les isométries affines qui conservent la figure $\mathfrak{S}$?

Exercice 13 Déterminer les isométries affines qui conservent l'ensemble $\mathfrak{F}$ des points de coordonnées $(n, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$, dans un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan affine euclidien.

Exercice 14 Notons $\mathrm{OA}(2, \mathbb{R})$ le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^2$. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{OA}(2, \mathbb{R})$ qui contient les rotations centrées en deux points distincts.

Montrer que G contient une translation.

Exercice 15 Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$. Déterminer l'orbite d'un point A de $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ quand G est le sous-groupe engendré par :

(1) une symétrie par rapport à une droite ;

(2) une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$;

(3) une rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ ($n > 0$ entier) ;

(4) une rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ ($n > 0$ entier) et une symétrie par rapport à une droite D (penser à distinguer deux cas).

Exercice 16 Rappelons que $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ désigne le groupe des applications linéaires de déterminant 1 de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même.

Rappelons aussi que $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ désigne le groupe des applications linéaires orthogonales directes de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même.

Notons $x \cdot y$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$.

(1) Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Soit $g \in \mathrm{G}$. Soit $\varphi_g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par
$$\varphi_g(x,y) = g(x) \cdot g(y).$$
Montrer que $\psi = \sum_{g \in \mathrm{G}} \varphi_g$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $\mathbb{R}^2$.

(2) Montrer que pour $g \in \mathrm{G}$ nous avons $\psi(g(x), g(y)) = \psi(x,y)$.

Montrer que la matrice d'un élément de G dans la base $\{e_1,\, e_2\}$ orthonormée pour ψ est de la forme
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
En déduire que G est un sous-groupe fini de $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$.

(3) Quel est l'ordre d'un élément g de G ? En déduire que g est une rotation d'angle $\frac{2k\pi}{n}$ avec k et n convenables.

(4) Montrer que G est cyclique.

Exercice 17 [Quelques propriétés de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$]Désignons par $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ le groupe des matrices carrées de taille 2×2 à coefficients réels et de déterminant 1.

Pour $u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ notons $t_u = a + d$.

(1) Quel est le polynôme caractéristique P_u de u ? Quelles sont ses valeurs propres ?

(2) Montrer que $P_u(u) = 0$.

(3) Si P_u admet une racine double, montrer qu'alors
— ou bien $u = \mathrm{Id}$, ou bien $u = -\mathrm{Id}$;
— ou bien il existe $v \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ tel que
$$vuv^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad vuv^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
— ou bien il existe $w \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ tel que
$$wuw^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad wuw^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(4) Si P_u admet deux racines distinctes réelles, montrer qu'il existe $v \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}^*$ tels que $vuv^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$. Y a-t-il une réciproque ?

(5) Si P_u admet deux racines complexes non réelles distinctes montrer qu'il existe $v \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ et $a,\, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, tels que $a^2 + b^2 = 1$ et $vuv^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

(6) En déduire pour tout $u \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ l'équivalence, si $n \notin \{1, 2\}$, entre les deux assertions suivantes :
— u est d'ordre n ;
— il existe $k \in \mathbb{N}$ premier avec n tel que $t_u = 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$.

(7) Soit $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ le sous-groupe de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ formé des matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Montrer que dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ il y a :
— un élément d'ordre 2 ;
— une infinité d'éléments d'ordre 4, explicitez-les ;
— une infinité d'éléments d'ordre 3, explicitez-les ;
— une infinité d'éléments d'ordre 6, explicitez-les ;
— aucun élément d'ordre n si $n \notin \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

Exercice 18 Soit D_{2n} le groupe diédral d'ordre $2n$ engendré par r d'ordre n et s d'ordre 2 tels que $rs = sr^{-1}$. Autrement dit

$$\mathrm{D}_{2n} = \langle r,\, s \,|\, r^n = s^2 = rsrs = \mathrm{id}\rangle.$$

Exprimer $r^2sr^{-1}s^{-1}r^3s^3$ sous la forme r^is.

Exercice 19 Faire la liste de tous les sous-groupes de D_8.

Exercice 20 Caractériser géométriquement l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 21 Soient A et B deux éléments de $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$. Donner une condition géométrique nécessaire et suffisante pour que A et B commutent (cette conditions fait intervenir des droites particulières de $\mathbb{R}^3$ associées à A et B).

Exercice 22 Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 et S sa sphère unité. Si D est une droite vectorielle de E, on note σ_D la rotation d'angle π autour de D (appelée aussi demi-tour). Par conséquent σ_D appartient au groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(E)$ dont on rappelle qu'il est engendré par les demi-tours.

(1) Soit D une droite vectoriel, soit g un élément de $\mathrm{SO}(E)$. Reconnaître l'endomorphisme $g \circ \sigma_D \circ g^{-1}$.

(2) Soit $g \in \mathrm{SO}(E)$. Montrer que g est un demi-tour si et seulement s'il existe $x \in S$ tel que $g(x) = -x$.

Dans les deux questions suivantes, nous nous donnons un sous-groupe G de $\mathrm{SO}(E)$ agissant transitivement sur S.

(3) Montrer que G contient un demi-tour.

(4) En déduire que $\mathrm{G} = \mathrm{SO}(E)$.

Exercice 23 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit G le sous-ensemble de $M(n+1,\mathbb{R})$ donné par les matrices de la forme

$$M = \left(\begin{array}{c|c} & x_1 \\ A & \vdots \\ & x_n \\ \hline 0\dots 0 & 1 \end{array}\right)$$

où $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ et $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

(1) Montrer que G est un groupe.

(2) Expliciter de quelle manière le groupe affine $\mathrm{GA}(\mathbb{R}^n)$ de R^n est isomorphe au groupe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$. En particulier explique comment effectuer la composée de φ, $\varphi' \in \mathrm{GA}(\mathbb{R}^n)$ où φ (resp. φ') pour partie linéaire $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ (resp. $A' \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$) et vecteur de translation $v \in \mathbb{R}^n$ (resp. $v' \in \mathbb{R}^n$).

(3) Montrer que G est isomorphe à $\mathrm{GA}(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 24 Soit E un espace affine euclidien de dimension n. On appelle similitude de E toute transformation affine bijective de E dans lui-même dont la partie linéaire est la composée d'une homothétie et d'une isométrie linéaire.

(1) Montrer que les similitudes forment un groupe.

(2) Soit φ une similitude. Démontrer que si L est la partie linéaire de φ, alors L s'écrit de matrice unique sous la forme $L = HR$ où H est une homothétie linéaire et R un élément de $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ et que de plus H et R commutent.

Soit φ une bijection de E. On dit que φ préserve les angles (non-orientés) si pour tous points $A \neq B$, $C \in E$, $\widehat{\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)} = \widehat{ABC}$. Nous allons montrer que les similitudes sont extactement les transformations qui préservent les angles.

(3) Montrer que les similitudes préservent les angles.

Soit φ une bijection de E qui préservent les angles.

(4) Montrer que φ préserve l'alignement.

(5) Montrer que φ est affine.

(6) Choisissons une origine O dans E. Trouver une translation τ tells que $(\tau^{-1} \circ \varphi)(O) = O$. Posons $\varphi' = \tau^{-1} \circ \varphi$.

(7) Soit $A \neq O$. Posons $\lambda = \frac{||\overrightarrow{O\varphi'(A)}||}{||\overrightarrow{OA}||}$. Si h_λ est l'homothétie de rapport λ et de centre O, montrer que $\psi = h_\lambda^{-1} \circ \varphi'$ préserve le produit scalaire et la norme. On pourra utiliser des triangles isométriques.

(8) En déduire que ψ est une isométrie et conclure.

Exercice 25 [Le groupe diédral]

Considérons un polygone régulier ayant un sommet P de coordonnées $(1,0)$ et centré à l'origine du repère.

(1) Déterminer le groupe D_6 des isométries du plan qui conservent un triangle équilatéral. Établir la table de D_6.

(2) Déterminer le groupe D_8 des isométries du plan qui conservent carré. Déterminer les ordres des éléments de D_8. Établir la table de D_8.

(3) Déterminer le groupe D_{2n} des isométries du plan qui conservent un polygone régulier à n côtés.

(4) Soit $n \geq 2$ un entier. Considérons le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et un générateur $[a]$ de ce groupe. Soit $\tau \in \mathrm{Aut}\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)$ défini par $\tau([c]) = -[c]$.

Soit $\rho\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)$ défini par

$$\rho([0]) = \mathrm{id} \qquad\qquad \rho([1]) = \tau.$$

Montrer que D_{2n} est isomorphe au produit semi-direct de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ le long de ρ.

Exercice 26 Soit $\tau \in \mathrm{Aut}\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)$ défini par $\tau([a],[b]) = ([b],[a])$.

Soit $\rho\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)$ défini par

$$\rho([0]) = \mathrm{id} \qquad\qquad \rho([1]) = \tau.$$

Montrer que D_8 est isomorphe au produit semi-direct de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ le long de ρ.

Exercice 27 Quel est le centre de $\mathcal{S}_3$? de D_8 ? de D_{12} ? de D_{4n} ?

Exercice 28 Soit $n \geq 3$; le sous-ensemble $\left\{g \in \mathrm{D}_{2n} \,\middle|\, g^2 = \mathrm{id}\right\}$ de D_{2n} est-il un sous-groupe de D_{2n} ?

Exercice 29 Les actions considérées ci-après sont les actions naturelles.

(1) Montrer que l'action de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$ n'est pas transitive mais qu'elle définit sur l'ensemble des bases de $\mathbb{R}^n$ une action transitive.

(2) Montrer que $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ agit transitivement sur le cercle unité de $\mathbb{R}^2$.

(3) Montrer que $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ agit transitivement sur la sphère unitée de $\mathbb{R}^3$.

Références

[Aud06] M. Audin. *Géométrie.* EDP Sciences. 2006.

[Ber77] M. Berger. *Géométrie. Vol. 2.* CEDIC, Paris ; Nathan Information, Paris, 1977. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères.

[CG15] P. Caldero and J. Germoni. *Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries-Tome 2.* Calvage et Mounet, 2015.

[CG17] P. Caldero and J. Germoni. *Nouvelles Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries.* Calvage et Mounet, 2017.

[Szp09] A. Szpirglas. *Mathématiques L3 : Algèbre.* Pearson, 2009.