gaison y est triviale ;

- pour $n=4$ il y a 8 cycles d'ordre 3 et ils ne peuvent pas tous être conjugués dans $\mathcal{A}_4$ sinon ils formeraient une orbite dont le cardinal devrait diviser 12 (rappel : $|\theta_x| = \frac{|G|}{|H_x|}$).

Une autre application au groupe symétrique

Proposition

Les classes de conjugaison de $\mathcal{S}_n$ sont en bijection avec les partitions de n :

$$n = k_1 + k_2 + \dots + k_r \,, \quad r \in \mathbb{N} \,, \quad 1 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_r$$

Le nombre de classes de conjugaison est donc égal au nombre de "partages" de l'entier n, et si la décomposition d'une permutation contient k_1 1-cycles (les points fixes), k_2 2-cycles, ..., k_m m-cycles, alors le nombre de ses

conjugués vaut
$$\frac{n!}{1^{k_1} k_1! \; 2^{k_2} k_2! \cdots m^{k_m} k_m!}$$

Démonstration

Rappelons que si $\sigma = (a_1 \; a_2 \dots a_k) \in \mathcal{S}_n$ est un k-cycle & τ un élément de $\mathcal{S}_n$ nous avons

$$(*) \qquad \tau \circ \sigma \circ \tau^{-1} = (\tau(a_1) \; \tau(a_2) \; \dots \; \tau(a_k))$$

Ecrivons $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_r$ comme un produit de cycles à supports disjoints de longueurs $k_1, k_2, \dots, k_r$ que nous pouvons ordonner de sorte que $1 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_r$. Alors

$$(**) \qquad \tau \circ \sigma \circ \tau^{-1} = (\tau \circ \sigma_1 \circ \tau^{-1}) \circ (\tau \circ \sigma_2 \circ \tau^{-1}) \circ \dots \circ (\tau \circ \sigma_r \circ \tau^{-1})$$

est encore un produit de cycles disjoints de mêmes longueurs $k_1, k_2, \dots, k_r$ que ceux de σ. Une classe de conjugaison détermine donc bien une partition de $n = k_1 + k_2 + \dots + k_r$.

Réciproquement compte tenu de $(*)$ et $(**)$ des permutations correspondant à la même partition sont conjuguées. ∎

Exemple Les deux partitions de 2 sont $1+1$ et 2. Les classes de conjugaison correspondants dans $\mathfrak{S}_2$ sont $\{id\}$ & $\{(1\ 2)\}$.

Exemple Les trois partitions de 3 sont $1+1+1$, $1+2$ et 3. Les classes de conjugaison correspondantes dans $\mathfrak{S}_3$ sont $\{id\}$, $\{(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\}$ & $\{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$.

Exemple Les cinq partitions de 4 sont $1+1+1+1$, $1+1+2$, $2+2$, $1+3$ et 4. Les classes de conjugaison correspondantes

$k_1 = 2$, $k_2 = 1$ dans $\mathfrak{S}_4$ sont $\{id\}$, les $\underbrace{\text{six}}$ transpositions, les $\underbrace{\text{trois}}$ doubles

$6 = \dfrac{4!}{1^2 2! 2^1 1!}$ transpositions, les $\underbrace{\text{huit}}$ 3-cycles et les $\underbrace{\text{six}}$ 4-cycles. $k_2 = 2 \to \dfrac{4!}{2^2 . 2!} = 3$

$8 = \dfrac{4!}{3^1 . 1} \leftarrow k_3 = 1$ $\qquad k_4 = 1 \to \dfrac{4!}{4^1 . 1!} = 6$

Exemple Les classes de conjugaison de $\mathfrak{A}_5$.

Le groupe $\mathfrak{A}_5$ a cinq classes de conjugaison :

- la classe C_1 de l'élément neutre de cardinal 1 ;

- la classe C_3 des 3-cycles (d'ordre 3) de cardinal 20 ;
- la classe $C_{2,2}$ des produits de deux transpositions à supports disjoints (d'ordre 2) de cardinal 15 ;
- deux classes C_5 & C'_5 de cardinal 12 dont la réunion est l'ensemble des 5-cycles (d'ordre 5). De plus si t est un 5-cycle alors t & t^2 ne sont pas dans la même classe. Désignons par exemple par C_5 la classe de $t_0 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ et par C'_5 la classe de $t'_0 = (1\ 3\ 5\ 2\ 4)$.

En effet les classes de conjugaison de $\mathcal{A}_5$ peuvent se déduire de celles de $\mathcal{S}_5$. Rappel : si G est un groupe, g un élément de G et

$$Z_g = \{ h \in G \mid hg = gh \}$$

le centralisateur de g, alors la classe de conjugaison de g

est en bijection avec G/Z_g via $h \mapsto hgh^{-1}$. En particulier elle est de cardinal $\frac{|G|}{|Z_g|}$. Ainsi comprendre ce que devient une classe de conjugaison de $\mathfrak{S}_5$ dans $\mathfrak{A}_5$ revient à comprendre le lien du centralisateur Z_g de g dans $\mathfrak{S}_5$ avec son centralisateur $Z_g \cap \mathfrak{A}_5$ dans $\mathfrak{A}_5$.

Rappelons que $\mathfrak{A}_5$ est le noyau du morphisme

$$sgn : \mathfrak{S}_5 \longrightarrow \{1, -1\}$$

Par suite si H est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_5$, alors ou bien H est contenu dans $\mathfrak{A}_5$, ou bien $sgn_{|H} : H \to \{1,-1\}$ est surjective et donc $H \cap \mathfrak{A}_5$ qui en est le noyau est de cardinal $\frac{|H|}{2}$.

Si $C \cap \mathfrak{A}_5 \neq \emptyset$, alors $C \subset \mathfrak{A}_5$ (en effet si $C \cap \mathfrak{A}_5 \neq \emptyset$, il existe $\sigma \in C \cap \mathfrak{A}_5$ et $sgn(\sigma) = 1$; soit $\tau \in C$ alors τ s'écrit $g\sigma g^{-1}$ et

$$sgn(\tau) = sgn(g\sigma g^{-1}) = sgn(g)\, sgn(\sigma)\, sgn(g)^{-1} = sgn(\sigma) = 1$$

Si g appartient à C, la classe de conjugaison C_g de g dans $\mathcal{A}_5$ est incluse dans C et si Z_g est son centralisateur dans $\mathcal{S}_5$ alors

- ou bien $Z_g \subset \mathcal{A}_5$ & alors

$$|C_g| = \frac{|\mathcal{A}_5|}{|Z_g|} = \frac{1}{2}\frac{|\mathcal{S}_5|}{|Z_g|} = \frac{1}{2}|C|$$

et C se scinde en deux classes de conjugaison dans $\mathcal{A}_5$;

- ou bien Z_g contient un élément de signature -1 et alors $|Z_g \cap \mathcal{A}_5| = \frac{1}{2}|Z_g|$ donc

$$|C_g| = \frac{|\mathcal{A}_5|}{|Z_g \cap \mathcal{A}_5|} = \frac{\frac{|\mathcal{S}_5|}{2}}{\frac{|Z_g|}{2}} = \frac{|\mathcal{S}_5|}{|Z_g|} = |C|$$

et $C = C_g$; en particulier C est une classe de conjugaison dans $\mathcal{A}_5$.

Puisque $(4\ 5)$ commute à $(1\ 2\ 3)$ la classe des 3-cycles reste une classe de conjugaison de $\mathcal{A}_5$.

De même la transposition $(1\ 2)$ commute à la double transposition $(1\ 2)(3\ 4)$ donc $C_{2,2}$ est une classe de conjugaison de $\mathcal{A}_5$.

Intéressons-nous maintenant aux 5-cycles. Ils sont au nombre de 24 ; comme 24 ne divise pas $|\mathcal{A}_5| = 60$ la classe des 5-cycles se scinde nécessairement en deux dans $\mathcal{A}_5$. Considérons le 4-cycle $\sigma = (2\ 3\ 5\ 4) \in \mathfrak{S}_5 \setminus \mathcal{A}_5$. À partir de

$$(1\ 3\ 5\ 2\ 4) = \sigma (1\ 2\ 3\ 4\ 5) \sigma^{-1}$$

nous obtenons que t_0 & t_0^2 ne sont pas dans la même classe de conjugaison de $\mathcal{A}_5$. Puisque les 5-cycles sont tous conjugués dans $\mathfrak{S}_5$ pour tout 5-cycle t, les 5-cycles t & t^2 ne sont pas dans la même classe.