UE2 Groupes et Géométrie — Université de Nice
2019-2020

GROUPES D'ORDRE pq

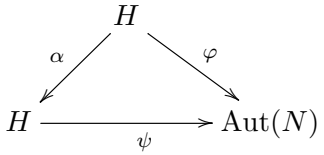
Référence : Perrin, Cours d'algèbre, pages 27-28.

Théorème 1. *Soient p et q des nombres premiers avec $p < q$.*

- *Si p ne divise pas $q-1$, alors tout groupe d'ordre pq est cyclique.*
- *Si p divise $q-1$, il y a deux groupes d'ordre pq non isomorphes : le groupe cyclique et un produit semi-direct non abélien.*

Énonçons le résultat suivant dont nous aurons besoin :

Lemme 2. *Soient* H *et* N *deux groupes. Soient φ et ψ deux opérations de* H *sur* N *et α un automorphisme de* H *tels que le diagramme suivant commute*



i.e. $\varphi = \psi \circ \alpha$.

L'application $(n,h) \mapsto (n, \alpha(h))$ est un isomorphisme de $\mathrm{N} \rtimes_\psi \mathrm{H}$ *sur* $\mathrm{N} \rtimes_\varphi \mathrm{H}$.

Démonstration du Théorème 1. Soit G un groupe d'ordre pq où p et q désignent des nombres premiers tels que $p < q$. Soit Q un q-Sylow de G.

D'après les théorèmes de Sylow

$$\begin{cases} n_q \text{ divise } p \\ n_q \equiv 1 \bmod q \end{cases}$$

où n_q est le nombre de q-Sylow de G. Par suite $n_q = 1$ et Q est distingué dans G.

Puique p est premier, $\mathbb{Q} \simeq \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. De même $\mathrm{G}/\mathrm{Q} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Si P est un p-Sylow quelconque il fournit un relèvement de G/Q et donc

$$\mathrm{G} \simeq \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

Calculons ces produits. On a $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$ ([Perrin, Cours d'algèbre, page 24]). L'opération de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ correspond donc à un morphisme

$$\varphi \colon \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}.$$

On a l'alternative suivante :

- p ne divise pas $q-1$, alors φ est trivial, le produit est direct et $\mathrm{G} \simeq \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$ est cyclique.
- p divise $q-1$, $\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$ possède un unique sous-groupe d'ordre p, il y a donc une opération non triviale. De plus deux telles opérations diffèrent d'un automorphisme de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Le lemme 2 assure que les produits correspondants sont isomorphes.

□