

LES GROUPES $SU_2/\{\pm \text{id}\}$ ET SO_3 SONT ISOMORPHES

Référence : Caldero-Germoni, Histoires hédonistes de groupes et de géométries, tome premier, pages 232-234

Leçons possibles :

182 : Applications des nombres complexes à la géométrie.

108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

183 : Utilisation des groupes en géométrie.

103 : Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

Soit $E = \mathbb{R}^n$ et soit q la forme quadratique canonique $q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_k^2$. L'ensemble des éléments f du groupe linéaire $GL(\mathbb{R}^n)$ tels que $q(f(x)) = q(x)$ pour tout $x \in E$ est un groupe appelé groupe orthogonal standard. Il s'identifie canoniquement au groupe des matrices orthogonales $n \times n$

$$O_n = \{A \in GL_n \mid {}^tAA = A{}^tA = \text{Id}\}$$

où tA est la matrice transposée de A . Le déterminant d'un élément de O_n appartient à $\{1, -1\}$. Le sous-groupe $SO_n = O_n \cap SL_n$ des éléments de O_n dont le déterminant est 1 est un sous-groupe de O_n .

Rappelons que le groupe unitaire est

$$U_n = \{A \in GL_n \mid A^*A = AA^* = \text{Id}\}$$

où la matrice adjointe de A est notée A^* (i.e. $A^* = \overline{{}^tA}$). Le groupe spécial unitaire est par définition $SU_n = U_n \cap SL_n$; il est formé des matrices unitaires de déterminant 1. Pour $n = 2$ on a

$$SU_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \mid |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}.$$

Théorème 1. *Les groupes $SU_2/\{\pm \text{id}\}$ et SO_3 sont isomorphes :*

$$SU_2/\{\pm \text{id}\} \simeq SO_3$$

Lemme 2. *Les retournements, i.e. les rotations d'angle π , engendrent SO_3 .*

Démonstration. Tout élément de SO_3 est la composition d'un nombre pair de réflexions. Il suffit donc de montrer que la composée de deux réflexions est une composée de deux retournements.

Soient x et y deux points de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. On désigne par τ_x et τ_y les réflexions respectives par rapport à $x^\perp$ et $y^\perp$. On a

$$\tau_x \circ \tau_y = (-\tau_x) \circ (-\tau_y)$$

et $-\tau_x$ et $-\tau_y$ sont des retournements. □

Démonstration du Théorème 1. Rappelons que

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 4 dont la base canonique est $\{\text{Id}, I, J, K\}$ où

$$I = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant correspond à la norme au carrée $N: h \mapsto h\bar{h}$ donc au produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^4$; du point de vue matriciel $\bar{h}$ correspond à la transposée conjuguée.

Le sous-espace

$$\mathbb{I} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \mid a \in \mathbf{i}\mathbb{R}, b \in \mathbb{C} \right\}$$

des quaternions imaginaires purs est l'orthogonale de $\mathbb{R} = \mathbb{R}\text{Id}$; il s'identifie à $\mathbb{R}^3$.

Notons que $\text{SU}_2 \simeq \mathbb{S}^3$ agit sur $\mathbb{H}$ par automorphismes d'algèbres

$$\begin{aligned} \varphi: \text{SU}_2 &\rightarrow \text{Aut}(\mathbb{H}) \\ h &\mapsto \varphi_h: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} \\ u &\mapsto huh^{-1} \end{aligned}$$

L'application φ_h est linéaire et respecte la norme de $\mathbb{H}$ car $N(huh^{-1}) = N(u)$. Comme Id est central dans $\mathbb{H}$ l'action de SU_2 préserve $\mathbb{R}$ et donc préserve son orthogonal $\mathbb{I}$. On peut alors considérer

$$\begin{aligned} \varphi: \text{SU}_2 &\rightarrow \text{O}(\mathbb{I}) \\ h &\mapsto \varphi_h: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I} \\ u &\mapsto huh^{-1} \end{aligned}$$

Via le choix d'une base on a un isomorphisme entre les isométries de $\mathbb{I}$ et le groupe orthogonal O_3 . On peut donc définir un morphisme encore noté $\varphi: \text{SU}_2 \rightarrow \text{O}_3$.

Remarquons qu'en fait φ est à valeurs dans SO_3 ; en effet SU_2 est connexe donc $\varphi(\text{SU}_2)$ est contenu dans la composante connexe de l'identité de O_3 , à savoir SO_3 .

Déterminons $\ker \varphi$. Par définition

$$\ker \varphi = \{M \in \text{SU}_2 \mid M \text{ commute avec } I, J \text{ et } K\}.$$

Ainsi $\ker \varphi$ correspond à l'intersection du centre de $\mathbb{H}$ (*i.e.* les quaternions réels) avec la sphère unité. Par suite $\ker \varphi = \{\pm \text{Id}\}$.

Montrons que φ est surjective. D'après le Lemme 2 il suffit de montrer que tout retournement est dans l'image de φ . Soit h un élément de $\mathbb{S}^3 \cap \mathbb{I} \simeq \mathbb{S}^2$. Considérons

- d'une part le retournement r_h de $\mathbb{I} \simeq \mathbb{R}^3$ d'axe $\mathbb{R}h$,
- d'autre part la rotation $\varphi(h)$.

Montrons que $\varphi(h) = r_h$:

- on a $\varphi(h)(h) = hhh^{-1} = h$;
- soit $u \in h^\perp$, *i.e.* u tel que $u\bar{h} + h\bar{u} = 0$ car la forme bilinéaire symétrique associée à la norme $N(h) = h\bar{h}$ est

$$\langle h, h' \rangle = \frac{1}{2} (h\bar{h}' + h'\bar{h}).$$

Puisque u et h appartiennent à $\mathbb{I}$ l'égalité $u\bar{h} + h\bar{u} = 0$ se réécrit $-uh - hu = 0$ ou encore $huh^{-1} = -u$ soit $\varphi(h)(u) = -u$.

□