ISOMORPHISMES EXCEPTIONNELS

Référence : Perrin, Cours d'algèbre, page 106.

Théorème 1. *On a les isomorphismes suivants*

(1) $\mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_2) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{F}_2) = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{F}_2) \simeq \mathcal{S}_3$ *;*

(2) $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F}_3) \simeq \mathcal{S}_4$ *et* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{F}_3) \simeq \mathcal{A}_4$ *;*

(3) $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F}_4) = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{F}_4) \simeq \mathcal{A}_5$ *;*

(4) $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F}_5) \simeq \mathcal{S}_5$ *et* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{F}_5) \simeq \mathcal{A}_5$.

Lemme 2. *Tout sous-groupe d'indice n dans $\mathcal{S}_n$ est isomorphe à $\mathcal{S}_{n-1}$.*

Démonstration. Soit H un sous-groupe d'indice n dans $\mathcal{S}_n$.

Si $n \geq 3$, on vérifie l'énoncé directement.

Si $n = 4$, alors : si $\mathrm{H} \not\simeq \mathcal{S}_3$, alors H est cyclique (rappel : si p, q sont des nombres premiers tels que $p < q$ et p ne divise pas $q - 1$ alors tout groupe d'ordre pq est cyclique) : contradiction avec le fait que $\mathcal{S}_4$ ne contient pas d'élément d'ordre 6.

Supposons $n \geq 5$. Le groupe $\mathcal{S}_n$, et donc aussi H, opère par translation à gauche sur $E = \mathcal{S}_n/\mathrm{H}$ d'où un homomorphisme

$$\varphi\colon \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_E \simeq \mathcal{S}_n.$$

Puisque $\ker\varphi = \bigcap_{a\in\mathcal{S}_n} a\mathrm{H}a^{-1}$, $\ker\varphi$ est distingué dans $\mathcal{S}_n$ et $\ker\varphi \subset \mathrm{H}$ on a $\ker\varphi = \{\mathrm{id}\}$ (rappel : pour $n \geq 5$ les sous-groupes distingués de $\mathcal{S}_n$ sont $\{\mathrm{id}\}$, $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{S}_n$). Pour des raisons de cardinalité ($|\mathcal{S}_n| = |\mathcal{S}_E \simeq \mathcal{S}_n|$), φ est un isomorphisme.

Comme H est le stabilisateur de la classe de idH on a : $\varphi(\mathrm{H}) \subset \mathcal{S}_n$ est le stabilisateur d'un point et c'est donc un sous-groupe isomorphe à $\mathcal{S}_{n-1}$. □

Démonstration du Théorème 1. Soit E un $\Bbbk$-espace vectoriel. On introduit l'espace projectif $\mathbb{P}(E)$ associé à E ; c'est l'ensemble des droites vectorielles de E. Le groupe $\mathrm{GL}(E)$ opère sur $\mathbb{P}(E)$ et les homothéties opérant trivialement $\mathrm{PGL}(E)$ opère aussi sur $\mathbb{P}(E)$. De plus $\mathrm{PGL}(E)$ opère fidèlement sur $\mathbb{P}(E)$ ([Perrin, Cours d'algèbre, page 98]).

On fait agir $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F}_q)$ sur les droites vectorielles de $(\mathbb{F}_q)^2$. Il y a $q+1$ telles droites de sorte que l'on a un morphisme injectif

$$\varphi\colon \mathrm{PGL}(2,\mathbb{F}_q) \hookrightarrow \mathcal{S}_{q+1}.$$

Par ailleurs le cardinal de $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F}_q)$ est $\frac{(q^2-1)(q^2-q)}{q-1} = q(q^2-1)$; c'est aussi le cardinal de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F}_q)$. Notons aussi que si la caractéristique de $\mathbb{F}_q$ n'est pas 2, alors $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{F}_q)$ est d'indice 2 dans $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F}_q)$.

(1) On a $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F}_2) = \mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_2) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{F}_2) = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{F}_2)$.

(2) Comme $|\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F}_3)| = 24$, on a $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F}_3) \simeq \mathcal{S}_4$. Puisque $\mathcal{A}_4$ est le seul sous-groupe d'indice 2 dans $\mathcal{S}_4$ on a $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{F}_3) \simeq \mathcal{A}_4$.

(3) On a $|\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F}_4)| = |\mathrm{PSL}(2,\mathbb{F}_4)| = 60$. Puisque $\mathcal{A}_5$ est l'unique sous-groupe d'indice 2 dans $\mathcal{S}_5$ on a $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F}_4) \simeq \mathcal{A}_5$.

(4) On a $|\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F}_5)| = 120$ donc $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F}_5)$ s'identifie à un sous-groupe d'indice 6 de $\mathcal{S}_6$. Ainsi, d'après le Lemme 2, le groupe $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F}_5)$ est isomorphe à $\mathcal{S}_5$. Il en résulte que

$$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{F}_5) \simeq \mathcal{A}_5.$$

□