SIMPLICITÉ DE SO_3

Référence : Francinou, Gianella, Nicolas, exercices de mathématiques, oraux x-ens, algèbre 3

Leçons possibles :
103 : Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.
108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

Rappelons que SO_3 est le groupe des rotations de l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^3$. Soit G un sous-groupe de SO_3. On désigne par G_0 la composante connexe par arcs de Id dans G.

Le groupe SO_3 est une partie de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ muni de sa topologie d'espace normé. Un chemin de G est une application $\gamma\colon [0,1] \to G$ continue, $\gamma(0)$ est l'origine du chemin et $\gamma(1)$ son extrémité.

Théorème 1. *Le groupe* SO_3 *est simple.*

Lemme 2. *On considère sur G la relation $\mathcal{R}$ définie par $g\mathcal{R}h$ s'il existe un chemin de G d'origine g et d'extrémité h. Cette relation est une relation d'équivalence.*

Démonstration. Si $g \in G$, alors $g\mathcal{R}g$ comme on le voit en considérant $\gamma\colon t \mapsto g$.

Si γ est un chemin d'origine g et d'extrémité h, l'application $t \mapsto \gamma(1-t)$ est un chemin d'origine h et d'extrémité g.

Si $g\mathcal{R}h$ et $h\mathcal{R}k$ et si γ (resp. γ') est un chemin de G d'orgine g (resp. h) et d'extrémité h (resp. k) l'application $\gamma''\colon [0,1] \to G$ définie par

$$\gamma''(t) = \begin{cases} \gamma(2t) \text{ si } 0 \le t \le 1/2 \\ \gamma'(2t-1) \text{ si } 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

est un chemin d'origine g et d'extrémité k.

Les classes d'équivalence pour cette relation sont les composantes connexes par arcs de G. □

Lemme 3. *G_0 est un sous-groupe de G*

Démonstration. Par définition G_0 contient Id. Soient g et h deux éléments de G_0. Soit γ (resp. γ') un chemin de G_0 reliant Id à g (resp. h). Considérons l'application

$$\gamma''\colon t \mapsto \gamma(t)\big(\gamma'(t)\big)^{-1}.$$

Pour tout $t \in [0,1]$ $\gamma(t)$ et $\gamma'(t)$ appartiennent à G donc $\gamma(t)\gamma'(t)$ appartient à G (en effet G est un sous-groupe de SO_3). Enfin l'application $g \mapsto g^{-1}$ est continue sur SO_3 : si on identifie un élément de SO_3 à sa matrice dans la base canonique les coefficients de g^{-1} dépendent polynomialement des coefficients de g. De plus $\gamma''(0) = \mathrm{Id}\mathrm{Id} = \mathrm{Id}$ et $\gamma''(1) = gh^{-1}$. Ainsi γ'' est un chemin de Id à gh^{-1} et gh^{-1} appartient à G_0. Il en résulte que G_0 est un sous-groupe de G. □

Lemme 4. *Si G est distingué dans SO_3, alors G_0 est distingué dans SO_3*

Démonstration. Soient $g \in G_0$, γ un chemin de G de Id à g et $h \in \mathrm{SO}_3$. Considérons l'application

$$\gamma' \colon [0,1] \to \mathrm{SO}_3 \qquad t \mapsto h\gamma(t)h^{-1}.$$

Pour tout $t \in [0,1]$ $\gamma(t)$ appartient à G et G étant distingué $h\gamma(t)h^{-1}$ appartient à G. L'application γ est continue de même que la multiplication à gauche ou à droite par un élément de SO_3 ; par conséquent γ' est continue. De plus

$$\gamma'(0) = h\mathrm{Id}h^{-1} = \mathrm{Id} \qquad \gamma'(1) = hgh^{-1}.$$

L'applcation γ' est donc un chemin de Id à hgh^{-1} et hgh^{-1} appartient à G_0. Autrement dit G_0 est distingué dans SO_3.

□

Lemme 5. *Supposons que G soit un sous-groupe de SO_3 connexe par arcs, distingué et non réduit à $\{\mathrm{Id}\}$. Alors G contient une rotation d'angle π.*

Démonstration. Si θ est l'angle d'une rotation g de $\mathbb{R}^3$ (si on change l'orientation de l'axe de la rotation l'angle est changé en son opposé donc θ est défini au signe près), alors il existe une base orthonormale dans laquelle sa matrice est

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si bien que $\mathrm{Tr}\, g = 2\cos\theta + 1$ et donc l'application

$$\mathrm{SO}_3 \to [-1,1] \qquad g \mapsto \cos\theta = \frac{\mathrm{Tr}\, g - 1}{2}$$

est une application continue. Il suffit de montrer que cette application prend la valeur -1 pour avoir une rotation $g \in G$ d'angle π.

Montrons que G contient une rotation r d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$, alors r^2 sera une rotation de G d'angle π. Par hypothèse G contient un élément g distinct de Id. Quitte à considérer g^{-1} on peut supposer qu'une mesure θ de son angle appartient à $]0,\pi]$. Si $\cos\theta \leq 0$ on pose $s = g$. Si $\cos\theta > 0$, alors $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Notons N la partie entière de $\frac{\pi}{2\theta}$, *i.e.* $N = E\left(\frac{\pi}{2\theta}\right)$. Alors

$$N\theta \leq \frac{\pi}{2} < (N+1)\theta < 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi.$$

En particulier g^{N+1} est une rotation d'angle $(N+1)\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. On pose alors $s = g^{N+1}$. Ainsi G contient une rotation s d'angle θ avec $\cos\theta \leq 0$.

Le groupe G étant connexe par arcs il existe un chemin γ de Id à s. L'application

$$\varphi\colon [0,1] \to [-1,1] \qquad\qquad t \mapsto \frac{\mathrm{Tr}(\gamma(t)) - 1}{2}$$

est continue car Tr et γ le sont. Par ailleurs $\varphi(0) = \cos 0 = 1$ et $\varphi(1) = \frac{\mathrm{Tr}(s)-1}{2} \leq 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure donc l'existence de $t_0 \in [0,1]$ tel que $\varphi(t_0) = 0$. La rotation $r = \gamma(t_0)$ a un angle de $\pm\frac{\pi}{2}$. Par conséquent $R = r^2$ est une rotation d'angle π, *i.e.* un retournement. □

Lemme 6. *Les retournements, c'est-à-dire les rotations d'angle π, engendrent le groupe* SO_3*.*

Démonstration. Tout élément de SO_3 est la composition d'un nombre pair de réflexions. Il suffit donc de montrer que la composée de deux réflexions est une composée de deux retournements.

Soient x et y deux points de $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}$. On désigne par τ_x et τ_y les réflexions respectives par rapport à $x^\perp$ et $y^\perp$. On a

$$\tau_x \circ \tau_y = (-\tau_x) \circ (-\tau_y)$$

et $-\tau_x$ et $-\tau_y$ sont des retournements. □

Lemme 7. *Supposons que G soit un sous-groupe de* SO_3 *connexe par arcs, distingué et non réduit à* $\{\mathrm{Id}\}$*. Alors $G = \mathrm{SO}_3$.*

Démonstration. D'après le Lemme 5 le groupe G contient un retournement. Puisque G est distingué pour tout g dans SO_3 gRg^{-1} appartient à G. Par ailleurs $\mathrm{Tr}(gRg^{-1}) = \mathrm{Tr}(R)$ donc gRg^{-1} est aussi un retournement. Si le vecteur u appartient à l'axe Δ de R on a $(gRg^{-1})(g(u)) = g(u)$, c'est-à-dire gRg^{-1} est un retournement d'axe $g(\Delta)$. Étant donnée une droite D de $\mathbb{R}^3$ on peut trouver une rotation g de $\mathbb{R}^3$ telle que $D = g(\Delta)$ en prenant un axe orthogonal à D et Δ et un angle ad hoc (*i.e.* SO_3 agit transitivement sur les droites de $\mathbb{R}^3$). Le groupe G contient donc tous les retournements. On conclut en invoquant le Lemme 6 qui assure que les retournements engendrent SO_3. □

Démonstration du Théorème 1. Soit G un sous-groupe distingué de SO_3. Montrons que $G = \{\mathrm{Id}\}$ ou $G = \mathrm{SO}_3$. Désignons par G_0 la composante connexe par acrs de Id. Les Lemmes 3 et 4 assurent que G_0 est un sous-groupe distingué de SO_3 ; par définition G_0 est connexe par arcs. Si $G_0 \neq \{\mathrm{Id}\}$, alors $G_0 = \mathrm{SO}_3$ (Lemme 7) et donc $G = \mathrm{SO}_3$.

Supposons que $G_0 = \{\mathrm{Id}\}$ et montrons que $G = \{\mathrm{Id}\}$. Remarquons que toutes les composantes connexes par arcs de G sont des singletons ; en effet si g' est dans la composante de g, relié par le chemin γ, alors $t \mapsto g^{-1}\gamma(t)$ est un chemin de G reliant Id à $g^{-1}g'$. Par suite $g^{-1}g'$ appartient à $G_0 = \{\mathrm{Id}\}$ et $g' = g$.

Raisonnons par l'absurde : supposons que G contienne un élément g distinct de Id. Soit h une rotation quelconque non triviale. Soit θ une mesure de l'angle de h. Pour tout $t \in [0,1]$ on désigne par h_t la rotation de même axe et d'angle $t\theta$. L'application $t \mapsto h_t$ est continue car elle se traduit matriciellement dans une certaine base orthonormale par

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t\theta) & -\sin(t\theta) & 0 \\ \sin(t\theta) & \cos(t\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'application

$$[0,1] \to G \qquad\qquad t \mapsto h_t g h_t^{-1}$$

est un chemin de G (car G est distingué) d'origine g et d'extrémité hgh^{-1}. Il s'en suit que hgh^{-1} appartient à la composante connexe par arcs de g. Cette dernière étant réduite à un singleton on obtient $hgh^{-1} = g$. Or si g est une rotation d'axe Δ, hgh^{-1} est une rotation d'axe $h(\Delta)$. Par conséquent $h(\Delta) = \Delta$ ce qui est impossible (une droite ne peut pas être invariante par toutes les rotations de l'espace). $\square$