

STRUCTURE DES GROUPES ABÉLIENS FINIS

Référence : Colmez, Éléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres), pages 132-134.

Soit G un groupe fini. On note $\widehat{G}$ l'ensemble des caractères linéaires de G . Notons que $\widehat{G}$ est un groupe abélien pour la multiplication des caractères linéaires : si χ_1, χ_2 appartiennent à $\widehat{G}$, alors

$$\chi_1(g)\chi_2(g) = \chi_1\chi_2(g) \quad \forall g \in G;$$

on peut donc considérer le groupe $\widehat{\widehat{G}}$ de ses caractères linéaires. La formule de multiplication ci-dessus montre que si $g \in G$, alors $\chi \mapsto \chi(g)$ est un caractère linéaire de $\widehat{G}$, d'où une application naturelle

$$\iota: G \rightarrow \widehat{\widehat{G}}$$

définie par

$$\iota(g)(\chi) = \chi(g).$$

Cette application est un morphisme de groupes puisque si g, h appartiennent à G alors

$$\iota(gh)(\chi) = \chi(gh) = \chi(g)\chi(h) = (\iota(g))(\chi)(\iota(h))(\chi) \quad \forall \chi \in \widehat{G}$$

et donc $\iota(gh) = \iota(g)\iota(h)$.

Proposition 1. *Si G est un groupe fini, alors $\iota: G \rightarrow \widehat{\widehat{G}}$ est un isomorphisme de groupes.*

Définition. Soit G un groupe abélien fini. L'exposant $\exp(G)$ de G est le maximum des ordres des éléments de G .

Lemme 2. *Si G est un groupe abélien fini, alors G et $\widehat{G}$ ont même exposant.*

Démonstration. Si H est un groupe abélien fini, on note $N(H)$ son exposant.

Si χ est un élément de $\widehat{H}$, alors pour tout $g \in G$

$$\chi^{N(H)}(g) = \chi(g)^{N(H)} = \chi(g^{N(H)}) = \chi(e_G) = e_G$$

et donc $\chi^{N(H)} = \text{id}$. Il en résulte que l'exposant de $\widehat{H}$ divise celui de H .

En particulier l'exposant de $\widehat{\widehat{G}}$ divise celui de G et $N(\widehat{\widehat{G}}) \leq N(G)$. De même l'exposant de $\widehat{\widehat{G}}$ divise celui de $\widehat{G}$ et $N(\widehat{\widehat{G}}) \leq N(\widehat{G})$. D'où

$$(1) \quad N(\widehat{\widehat{G}}) \leq N(\widehat{G}) \leq N(G)$$

Mais G et $\widehat{\widehat{G}}$ sont isomorphes donc $N(\widehat{\widehat{G}}) = N(G)$ et (1) implique $N(\widehat{\widehat{G}}) = N(\widehat{G}) = N(G)$. $\square$

Théorème 3. *Soit G un groupe abélien fini. Il existe $r \in \mathbb{N}$ et des entiers $N_1, N_2, \dots, N_r$ où N_r est l'exposant de G et N_{i+1} divise N_i si $i \leq r-1$ tels que*

$$G \simeq \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}/N_i\mathbb{Z}.$$

Démonstration (par récurrence sur $|G|$). Si $|G| = 1$, alors $r = 0$.

Supposons donc que $|G| > 1$. Posons $N = N_1 = \exp(G)$. Alors $\chi(g)$ est une racine N -ième de l'unité pour tous $\chi \in \widehat{G}$ et $g \in G$. Notons que $N = \exp(\widehat{G})$ (Lemme 2). Il existe donc χ_1 d'ordre N et comme $\chi_1(G)$ est un sous-groupe du groupe cyclique $\mu_N = \{z \in \mathbb{C} \mid z^N = 1\}$, c'est μ_N tout entier. Il existe donc $g_1 \in G$ tel que $\chi_1(g_1) = \exp\left(\frac{2i\pi}{N}\right)$. L'ordre de g_1 divise N (définition de $\exp(G)$) ; ainsi g_1 est d'ordre N et le sous-groupe $H_1 = \langle g_1 \rangle$ de G est isomorphe à $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

Montrons que $G = H_1 \oplus \ker \chi_1$: χ_1 induit un isomorphisme de H_1 sur μ_N car χ_1 est surjectif et $|H_1| = |\mu_N| = N$. Notons $\alpha : \mu_N \rightarrow H_1$ son inverse. Soit $g \in G$; alors $a = \alpha(\chi_1(g)) \in H_1$ et $b = a^{-1}g$ vérifie

$$\chi_1(b) = \chi_1(a^{-1}g) = \chi_1(a^{-1})\chi_1(g) = \chi_1(a)^{-1}\chi_1(g) = 1.$$

Ainsi b appartient à $\ker \chi_1$. On peut donc écrire tout élément g de G sous la forme ab avec $a \in H_1$ et $b \in \ker \chi_1$.

Puisque χ_1 est injectif sur H_1 on a $H_1 \cap \ker \chi_1 = \{1\}$. Il en résulte que $G = H_1 \oplus \ker \chi_1$.

Comme l'exposant de $\ker \chi_1 \subset G$ divise l'exposant de G , l'hypothèse de récurrence assure que

$$\ker \chi_1 \simeq \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}/N_i\mathbb{Z}$$

et donc que

$$G = H_1 \oplus \ker \chi_1 = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \oplus \ker \chi_1 \simeq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}/N_i\mathbb{Z}$$

$\square$