Feuille 3

Exercice 1.

Soit G un groupe. Soient H et K deux sous-groupes de G tels que $\mathrm{K} \subset \mathrm{H} \subset \mathrm{G}$.

a) Supposons que G soit fini. Montrer que

$$|\mathrm{G} : \mathrm{K}| = |\mathrm{G} : \mathrm{H}| \cdot |\mathrm{H} : \mathrm{K}| .$$

b) On ne suppose plus que G est fini. On suppose par contre que H et K sont distingués dans G. Montrer que

$$|\mathrm{G} : \mathrm{K}| = |\mathrm{G} : \mathrm{H}| \cdot |\mathrm{H} : \mathrm{K}| .$$

Exercice 2. [Indice]
Soit H un groupe. Soient H_0 et G des sous-groupes de H tels que H_0 est d'indice fini dans H. Montrer que

$$|\mathrm{G} : \mathrm{G} \cap \mathrm{H}_0| \leq |\mathrm{H} : \mathrm{H}_0| .$$

Exercice 3. [Sous-groupes / Sous-groupes distingués, Dummit-Foot, page 95 exercice 5]
Soit G un groupe. Soient H un sous-groupe de G et $g \in \mathrm{G}$.

a) Montrer que $g\mathrm{H}g^{-1}$ est un sous-groupe de G du même ordre que H.
b) En déduire que si H est le seul sous-groupe de G d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$), alors H est distingué dans G.

Exercice 4. [Sous-groupes distingués, Dummit-Foot, page 88 exercice 25]
Soit $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$. Soit N le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures à coefficients entiers et dont tous les coefficients diagonaux valent 1. Soit g la matrice diagonale dont les coefficients sont 2 et 1.

Montrer que $g\mathrm{N}g^{-1} \subset \mathrm{N}$ mais que g ne normalise pas N.

Exercice 5. [Sous-groupes distingués / isomorphismes]
Soient $\mathrm{H}_1 \subset \mathrm{G}_1$ et $\mathrm{H}_2 \subset \mathrm{G}_2$ des groupes.

a) Supposons H_1 et H_2 distingués. Montrer que $\mathrm{H}_1 \times \mathrm{H}_2$ est distingué dans $\mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2$. Montrer qu'il y a un isomorphisme de groupes $(\mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2)/(\mathrm{H}_1 \times \mathrm{H}_2) \simeq \mathrm{G}_1/\mathrm{H}_1 \times \mathrm{G}_2/\mathrm{H}_2$.
b) Supposons que H_1 soit distingué et qu'il existe un *isomorphisme* $\phi \colon \mathrm{G}_1 \to \mathrm{G}_2$ tel que $\mathrm{H}_2 = \phi(\mathrm{H}_1)$. Montrer que H_1 et H_2 sont isomorphes puis que $\mathrm{G}_1/\mathrm{H}_1$ et $\mathrm{G}_2/\mathrm{H}_2$ sont isomorphes.
c) Supposons que G_1 et G_2 soient isomorphes et que H_1 et H_2 soient isomorphes et distingués. Les groupes $\mathrm{G}_1/\mathrm{H}_1$ et $\mathrm{G}_2/\mathrm{H}_2$ sont-ils nécessairement isomorphes ?

Exercice 6. [Groupes quotients, Dummit-Foot, page 89 exercice 36, page 95 exercice 4]

a) Soient G un groupe et $Z(\mathrm{G})$ son centre. Supposons que $\mathrm{G}/Z(\mathrm{G})$ soit cyclique. Montrer que G est abélien.
   Donner un exemple de groupes $\mathrm{H} \lhd \mathrm{G}$ tels que H et G/H soient abéliens mais pas G.
b) Montrer que si $|\mathrm{G}| = pq$, pour p et q des nombres premiers, alors G est abélien ou $Z(\mathrm{G}) = 1$.

Exercice 7. [Sous-groupes distingués / Groupes quotients]
Pour les exemples suivants, vérifier que H est distingué dans G et déterminer les quotients :

a) $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{k})$, $\mathrm{H} = \mathrm{SL}_n(\mathbb{k})$ (pour $\mathbb{k}$ un corps)
b) $\mathrm{G} = \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{H} = \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$

c) $G = \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}$, $H = \langle(0,2)\rangle$ (resp. $H = \langle(1,2)\rangle$, resp. $H = \langle(1,1)\rangle$)

d) $G = H_8$ (les quaternions) et $H = \langle -1 \rangle$ (resp. $H = \langle i \rangle$)

e) $G = \mathcal{S}_4$ et $H = \{\mathrm{id}, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$.

Exercice 8. [Normalisateur, Dummit-Foot, page 88 exercice 31]
Soient G un groupe et H un sous-groupe de G.

a) Montrer que H est distingué dans $N_G(H)$.

b) Montrer que $N_G(H)$ est le plus grand sous-groupe de G dans lequel H est distingué.

Exercice 9. [Sous-groupes distingués / Groupes quotients / Groupe diédral]
Notons D_{2n} le n-ème groupe diédral. Soit H un sous-groupe strict distingué de D_{2n}.

a) Montrer que si n est impair alors H est un sous-groupe du groupe des rotations. Déterminer les H possibles.

b) Si n est pair, montrer que D_{2n} admet deux sous-groupes distingués isomorphes à $D_{2\frac{n}{2}}$ et que ce sont les seuls H possibles qui contiennent une symétrie.

c) Déterminer les quotients de D_{2n}.

Exercice 10. [Abélianisé, Dummit-Foot, page 89 exercice 41, page 169 proposition 7, page 171 exemple 3]
Soit G un groupe fini. Notons $D(G)$ le sous-groupe de G engendré par les commutateurs (c'est-à-dire les éléments de la forme $ghg^{-1}h^{-1}$, g, $h \in G$) ; c'est le groupe dérivé de G.

a) Monter que $D(G)$ est un sous-groupe distingué de G.

b) Montrer que le quotient $G/_{D(G)}$ est abélien.

c) Montrer que $G/_{D(G)}$ est le plus gros quotient abélien de G au sens que si $H \lhd G$ et $G/_H$ est abélien, alors $D(G) \subset H$.

d) Montrer que si $D(G) \subset H$, alors $H \lhd G$ et $G/_H$ est abélien.

e) Soit $\varphi \colon G \to A$ un morphisme dans un groupe abélien A. Montrer que φ se factorise par la projection canonique $G \to G/_{D(G)}$.

f) $G/_{D(G)}$ s'appelle l'abélianisé de G et se note parfois G_{ab}. Calculer l'abélianisé du groupe diédral D_{2n}.

Exercice 11. [Groupes quotients / Ordre d'un élément / Isomorphismes, Dummit-Foot. page 86 exercice 14, page 96 exercice 21]
Considérons le groupe additif $\mathbb{Q}/_{\mathbb{Z}}$.

a) Montrer que chaque classe à gauche de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$ contient exactement un représentant $q \in \mathbb{Q}$ avec $0 \leq q < 1$.

b) Montrer que chaque élément de $\mathbb{Q}/_{\mathbb{Z}}$ est d'ordre fini mais qu'il existe des éléments d'ordre arbitrairement grand.

c) Montrer que $\mathbb{Q}/_{\mathbb{Z}}$ est le groupe de torsion de $\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$.

d) Montrer que $\mathbb{Q}/_{\mathbb{Z}}$ est isomorphe au groupe multiplicatif des racines de l'unité de $\mathbb{C}^*$.

e) Montrer que $\mathbb{Q}/_{\mathbb{Z}}$ n'a pas de sous-groupe propre d'indice fini.

Exercice 12. [Automorphismes du groupe symétrique, Perrin, Cours d'algèbre, page 30]
Soit $n \geq 3$.

a) Soient a, b dans $\{1, 2, \ldots, n\}$ et σ dans $\mathcal{S}_n$. Montrer que

$$\sigma \circ (a\ b) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a)\ \sigma(b))$$

b) En déduire que le centre de $\mathcal{S}_n$ est réduit à $\{\mathrm{id}\}$.

c) Soit φ un automorphisme de $\mathcal{S}_n$ qui envoie transpositions sur transpositions. Montrer que φ est un morphisme intérieur, c'est-à-dire φ appartient à $\mathrm{Int}(\mathcal{S}_n)$.

d) Supposons que $n \neq 6$. Montrer que $\mathrm{Aut}(\mathcal{S}_n) = \mathrm{Int}(\mathcal{S}_n) \simeq \mathcal{S}_n$.

Exercice 13.
Soit G un groupe. Soit H un sous-groupe de G d'indice 2.

Montrer que H est distingué dans G.

Exercice 14. [Isomorphismes exceptionnels, Perrin, Cours d'algèbre, p. 106]

a) Montrer que tout sous-groupe d'indice n dans $\mathcal{S}_n$ est isomorphe à $\mathcal{S}_{n-1}$.

b) Montrer que
   (a) $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathcal{S}_3$,
   (b) $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathcal{A}_4$,
   (c) $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathcal{A}_5$,
   (d) $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathcal{A}_5$

Exercice 15.

Soit G un groupe. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

a) Si tout sous-groupe H de G est distingué dans G, alors G est abélien.

b) Si $\mathrm{H} \lhd \mathrm{G}$ et $\mathrm{K} \lhd \mathrm{H}$, alors $\mathrm{K} \lhd \mathrm{G}$.

c) Soient g et h dans G d'ordre fini. Alors gh est d'ordre fini.

d) Si G a un nombre fini de sous-groupes, alors G est fini.

e) Si H et K sont des sous-groupes de G, alors $\langle \mathrm{H} \cup \mathrm{K} \rangle = \mathrm{HK}$.

Exercice 16.

Soit S un sous-ensemble non vide d'un groupe fini G. Soit $N(S) = \{g \in \mathrm{G} \,|\, gSg^{-1} = S\}$ le normalisateur de S dans G. Soit $C(S) = \{g \in \mathrm{G} \,|\, \forall\, s \in S,\ gsg^{-1} = s\}$ le centralisateur de S dans G.

Montrer que

a) $N(S) \subset \mathrm{G}$ et $C(S) \lhd N(S)$.

b) $N(S) = \mathrm{G}$ si et seulement si $S = \displaystyle\bigcup_{g \in \mathrm{G}} gSg^{-1}$.

c) Si $\mathrm{H} \lhd \mathrm{G}$, alors $C(\mathrm{H}) \lhd \mathrm{G}$.

d) Si $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$, alors $N(\mathrm{H})$ est le plus grand sous-groupe de G contenant H et dans lequel H est distingué.

Exercice 17.

Soit G un groupe et soit $\mathrm{H} \lhd \mathrm{G}$ un sous-groupe distingué.

a) Décrire les sous-groupes distingués de G/H en fonction de ceux de G.

b) Soit K un sous-groupe de G.
   i) Si K est distingué dans G et contient H, montrer que l'on a un isomorphisme
$$\left(\mathrm{G}/\mathrm{H}\right)\left(\mathrm{K}/\mathrm{H}\right) \simeq \mathrm{G}/\mathrm{K}$$
   ii) Montrer que HK est un sous-groupe de G égal à KH.
   iii) Montrer que H est distingué dans HK.
   iv) Montrer qu'on a un isomorphisme
$$\mathrm{K}/(\mathrm{K} \cap \mathrm{H}) \simeq \mathrm{HK}/\mathrm{H}.$$

Exercice 18. [Automorphismes intérieurs d'un groupe]

Soit G un groupe. On désigne par Aut(G) le groupe des automorphismes de G. Si a appartient à G, on note $\varphi(a)$ l'application
$$\varphi(a)\colon \mathrm{G} \to \mathrm{G} \qquad\qquad g \mapsto aga^{-1}.$$

a) Montrer que pour tout a dans G $\varphi(a)$ est un automorphisme de G (appelé automorphisme intérieur de G).

b) Montrer que φ est un homomorphisme de groupes de G dans Aut(G).

c) Notons Int(G) l'ensemble des automorphismes intérieurs de G. Montrer que Int(G) est un sous-groupe distingué de Aut(G).

d) Notons $Z(\mathrm{G})$ le centre de G. Montrer que $\mathrm{Int}(\mathrm{G}) \simeq {}^{\mathrm{G}}\!/_{Z(\mathrm{G})}$.

Exercice 19.

Soit Q_8 le groupe des matrices 2×2 inversibles engendré par $\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -\mathbf{i} & 0 \\ 0 & \mathbf{i} \end{pmatrix}$. Ce groupe est appelé le groupe des quaternions.

a) Quel est l'ordre de Q_8 ?

b) Montrer que Q_8 n'a qu'un élément d'ordre 2.

c) Quel est le centre de Q_8 ?

d) Montrer que tous les sous-groupes de Q_8 sont distingués.

e) Peut-on trouver un isomorphisme entre Q_8 et un produit semi-direct de ${}^{\mathbb{Z}}\!/_{4\mathbb{Z}}$ avec ${}^{\mathbb{Z}}\!/_{2\mathbb{Z}}$?

Exercice 20.

Soit G un groupe fini. Soient H et K des sous-groupes de G. Supposons que
— H et K sont des sous-groupes distingués de G ;
— $\mathrm{H} \cap \mathrm{K} = \{e\}$.
Montrer que HK est un sous-groupe distingué de G d'ordre $|\mathrm{H}||\mathrm{K}|$.

Exercice 21.

Soit G un groupe de centre $Z(\mathrm{G})$.

a) Montrer que $Z(\mathrm{G})$ est un sous-groupe distingué de G.

b) Montrer que si ${}^{\mathrm{G}}\!/_{Z(\mathrm{G})}$ est monogène (*i.e.* ${}^{\mathrm{G}}\!/_{Z(\mathrm{G})}$ est engendré par un seul élément), alors G est abélien.

Exercice 22. [Simplicité de SO_3, Francinou, Gianella, Nicolas, exercices de mathématiques, oraux x-ens, algèbre tome 3, pages 67-70]

Rappelons que SO_3 est le groupe des rotations de l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^3$. Soit G un sous-groupe de SO_3. On désigne par G_0 la composante connexe par arcs de Id dans G.

Le groupe SO_3 est une partie de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ muni de sa topologie d'espace normé. Un chemin de G est une application $\gamma\colon [0,1] \to \mathrm{G}$ continue, $\gamma(0)$ est l'origine du chemin et $\gamma(1)$ son extrémité.

a) On considère sur G la relation $\mathcal{R}$ définie par $g\mathcal{R}h$ s'il existe un chemin de G d'origine g et d'extrémité h. Montrer que cette relation est une relation d'équivalence.

b) Montrer que G_0 est un sous-groupe de G.

c) Montrer que si G est distingué dans SO_3, alors G_0 est distingué dans SO_3.

d) Supposons que G soit un sous-groupe de SO_3 connexe par arcs, distingué et non réduit à $\{\mathrm{Id}\}$. Montrer qu'alors G contient une rotation d'angle π.

e) Montrer que les retournements, c'est-à-dire les rotations d'angle π, engendrent SO_3.

f) Supposons que G soit un sous-groupe de SO_3 connexe par arcs, distingué et non réduit à $\{\mathrm{Id}\}$. Montrer que $\mathrm{G} = \mathrm{SO}_3$.

g) Montrer que le groupe SO_3 est simple.

Exercice 23.

On note $\mathbb{H}_8$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, appelé *groupe des quaternions* engendré par les trois matrices

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix}$$

1. Calculer l'ordre de $\mathbb{H}_8$.

2. Exhiber les sous-groupes de $\mathbb{H}_8$.
3. Exhiber les sous-groupes distingués de $\mathbb{H}_8$.
4. Est-il isomorphe au groupe diédral D_8 ?