Feuille 4

Exercice 1. [Actions de groupes, Dummit-Foot, page 117 exercice 6]
Soit R l'anneau des polynômes à quatre variables et coefficients dans $\mathbb{Z}$. Considérons l'action

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S}_4 \times R & \longrightarrow & R \\ (\sigma, p(x_1, x_2, x_3, x_4)) & \longmapsto & p(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}). \end{array}$$

a) Déterminer l'orbite contenant $x_1 + x_2$.

b) Déterminer l'orbite contenant $x_1x_2 + x_3x_4$.

Exercice 2. [Actions de groupes, Dummit-Foot, page 125 corollaire 9]

a) Soient G un groupe et $Z(\mathrm{G})$ son centre. Supposons que ${}^{\mathrm{G}}\!/_{Z(\mathrm{G})}$ soit cyclique. Montrer que G est abélien.

b) Soit p un nombre premier, soit G un groupe d'ordre p^2. Montrer que G est abélien.

Exercice 3. Soit G un groupe.

a) Supposons que G est fini. Notons p le plus petit nombre premier divisant le cardinal de G. Montrer que tout sous-groupe de G d'indice p est distingué (indication : commencer par montrer que tout sous-groupe H de G d'indice p agit trivialement sur ${}^{\mathrm{G}}\!/_{\mathrm{H}}$, en déduire que H est distingué dans G).

b) Supposons que G est infini. Supposons que G admet un sous-groupe strict H d'indice fini. Montrer que G n'est pas un groupe simple.

Exercice 4. [Actions de groupes, Combes, page 43 ou Perrin, page 17 Lemme 4.16]
Soit G un p-groupe fini agissant sur un ensemble fini E. Montrer que le nombre de points fixes pour l'action est congru à $|E|$ modulo p.

Exercice 5. [Actions de groupes, Combes, pages 42-43 exercice 1]
Soient X un ensemble fini de cardinal $n > 0$ et p un nombre premier. Soit σ la permutation circulaire $(12\cdots p) \in \mathcal{S}_p$. Considérons l'action

$$\begin{array}{rcl} {}^{\mathbb{Z}}\!/_{p\mathbb{Z}} \times X^p & \longrightarrow & X^p \\ (\overline{k}, (x_1, x_2, \cdots, x_p)) & \longmapsto & (x_{\sigma^k(1)}, x_{\sigma^k(2)}, \cdots, x_{\sigma^k(p)}). \end{array}$$

a) Montrer que cette application est bien définie.

b) En utilisant l'équation aux classes, montrer que $n^p \equiv n \bmod p$.

c) En appliquant la formule de Burnside, retrouver ce théorème dû à Fermat.

Exercice 6.

a) Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. En considérant l'ensemble

$$E = \{(g, x) \in \mathrm{G} \times X \mid g \cdot x = x\}$$

calculer le nombre moyen de points fixes d'un élément de G.

b) Combien y a-t-il de colliers différents formés de 9 perles dont 4 bleues, 3 blanches et 2 rouges ?

Exercice 7. [Groupe symétrique, signature]
Montrer que la signature ε est le seul morphisme de groupes de $\mathcal{S}_n$ vers le groupe multiplicatif $\{1, -1\}, \cdot$.

Exercice 8. [Sous-groupes finis de O(2), Nourdin, page 221]
Nous allons montrer que tout sous-groupe fini de O(2) non contenu dans SO(2) est un groupe diédral.

a) Soient G un groupe et H_0 et H des sous-groupes de G tel que H_0 est d'indice fini dans G. Montrer que
$$|\mathrm{H} : \mathrm{H} \cap \mathrm{H}_0| \leq |\mathrm{G} : \mathrm{H}_0|\,.$$

b) Soient $\mathrm{H} \subset \mathrm{O}(2)$ fini et $\mathrm{H}^+ := \mathrm{H} \cap \mathrm{SO}(2)$. On suppose que $\mathrm{H}^+ \neq \mathrm{H}$. Utiliser le résultat précédent pour montrer que $|\mathrm{H} : \mathrm{H}^+| = 2$.

c) Soit $s \in \mathrm{H} \setminus \mathrm{H}^+$ et soit r un générateur du groupe cyclique H^+ d'ordre n. Montrer que $srs = r^{-1}$.

d) Montrer que $\mathrm{H} = \langle r, s \rangle$ et que $\mathrm{H} = \mathrm{D}_{2n}$.

Exercice 9. [Sous-groupes finis de O(3), Delcourt, page 163]
Nous allons déterminer, à isomorphisme près, tous les sous-groupes finis de O(3).
Soient $\mathrm{H} \subset \mathrm{O}(3)$ fini et $\mathrm{H}^+ := \mathrm{H} \cap \mathrm{SO}(3)$. Supposons que $\mathrm{H} \neq \mathrm{H}^+$.

a) Si $-\mathrm{id} \in \mathrm{H}$, alors montrer que
$$\begin{aligned} \phi \colon \mathrm{H} &\longrightarrow \mathrm{H}^+ \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ g &\longmapsto (\det(g)\mathrm{Id} \circ g, \det(g)) \end{aligned}$$
est un isomorphisme. Conclure que H est isomorphe à l'un des groupes suivants : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathrm{D}_{2n} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathcal{A}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathcal{A}_5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathcal{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

b) Si $-\mathrm{id} \notin \mathrm{H}$, alors montrer que
$$\begin{aligned} \phi \colon \mathrm{H} &\longrightarrow \mathrm{SO}(3) \\ g &\longmapsto \det(g)\mathrm{id} \circ g \end{aligned}$$
est un morphisme injectif. Conclure que H est isomorphe à l'un des groupes suivants : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathrm{D}_{2n}, \mathcal{S}_4$.

Exercice 10. [Perrin, page 35 exercice 6]
Soient G un groupe fini et p le plus petit facteur premier de $|\mathrm{G}|$. Soit H un sous-groupe d'ordre p, distingué dans G. Montrer que H est central (faire opérer G sur H par conjugaison et étudier Aut(H)).

Exercice 11. [Perrin, p. 18 exercice 5.3]
Soient $\mathbb{F}_p$ le corps fini à p éléments (p un nombre premier) et $\mathrm{G} = \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_p)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que le cardinal de G est égal à
$$(p^n - 1)(p^n - p) \cdots (p^n - p^{n-1}) = mp^{n(n-1)/2},$$
avec $p \nmid m$.

b) Considérons l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes :
$$\mathrm{P} = \{A = (a_{ij}) \mid a_{ij} = 0 \text{ si } i > j \text{ et } a_{ii} = 1\}.$$
Montrer que P est un p-Sylow de G.

Exercice 12.
Supposons qu'il existe un groupe simple G d'ordre 180.

a) Montrer que G contient trente six 5-Sylow.

b) Montrer que G contient dix 3-Sylow. Montrer que deux 3-Sylow distincts ne peuvent pas contenir un même élément $g \neq e_{\mathrm{G}}$ (Indication : considérer les ordres possibles pour le centralisateur de g, observer qu'un groupe d'ordre 18 admet un unique 3-Sylow).

c) Conclure.

Exercice 13. Soit E un $\mathbf{F}_q$-espace vectoriel de dimension finie n. Pour $0 \leq d \leq n$, combien E possède-t-il de sous-espaces vectoriels de dimension d ?

Indication : considérer l'action de $\mathrm{GL}(E)$ sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension d de E.

Exercice 14. [Sous-groupes de Sylow]
Expliciter les sous-groupes de Sylow des groupes suivants :

a) les groupes symétriques $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{S}_4$,

b) les groupes alternés $\mathcal{A}_4$ et $\mathcal{A}_5$ ([exercice 6 p. 98 Szpirglas]),

c) les groupes diédraux D_{2n} ([Dummit-Foot, p. 146, exercice 5, 12]),

d) le groupe hamiltonien $\mathbb{H}_8$,

e) Pour $\mathcal{S}_4$, $\mathcal{A}_4$ et $\mathcal{A}_5$ donner une interprétation géométrique de ses 3-sous-groupes de Sylow ([Caldero-Germoni p. 373]).

Exercice 15. [p-Sylow de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_p)$]
Soient $\mathbb{F}_p$ le corps fini à p éléments (p un nombre premier) et $\mathrm{G} = \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_p)$.

a) Soit P l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes de G. Montrer que $n_p = [\mathrm{G} : N_{\mathrm{G}}(\mathrm{P})]$.

b) Montrer que $N_{\mathrm{G}}(\mathrm{P})$ contient les matrices triangulaires supérieures de G.

c) En déduire que $n_p \mid p + 1$.

d) Utiliser les théorèmes de Sylow pour conclure que $n_p = 1 + p$.

Exercice 16. [p-Sylow de $\mathcal{S}_p$, Szpirglas, p. 101 exercice 20]

a) Quel est l'ordre d'un p-Sylow de $\mathcal{S}_p$?

b) Combien y a-t-il de p-Sylow dans $\mathcal{S}_p$?

c) En déduire le théorème de Wilson, c'est à dire

$$(p-1)! \equiv -1 \bmod p.$$

Exercice 17. [p-groupes, Calais, page 296 remarque 8.40]
Un p-groupe est par définition un groupe dont chaque élément est d'ordre une puissance de p. Montrer qu'un p-groupe fini est un groupe d'ordre p^k pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 18. [Groupes simples, Perrin, page 18 proposition 4.17]
Soient G un groupe infini et H un sous-groupe propre de G tel que $[\mathrm{G} : \mathrm{H}]$ est fini. Montrer que G n'est pas simple.

Exercice 19. [Groupes simples]
Soient G un groupe fini et H un sous-groupe propre de G tel que $|\mathrm{G}|$ ne divise pas $[\mathrm{G} : \mathrm{H}]!$. Montrer que G n'est pas simple.

Exercice 20. [p-groupes, Perrin, page 35 exercice 5]
Soit G un p-groupe de cardinal p^α. Montrer que G a des sous-groupes distingués d'ordre p^β, pour tout entier $\beta \leq \alpha$.

Exercice 21. [Groupes simples, Calais, page 214 proposition 6.15]
Soient $p \neq q$ deux nombres premiers. Montrer que tout groupe d'ordre pq n'est pas simple.

Exercice 22. [Groupes simples, Perrin, page 37 exercice (2)b]
Soient p, q, r trois nombres premiers distincts. Montrer que tout groupe d'ordre pqr n'est pas simple.

Exercice 23. [Groupes simples, Calais, page 216 exercice 8]
Soient p, q des nombres premiers distincts. Montrer que tout groupe d'ordre p^2q n'est pas simple.

Exercice 24.
Montrer qu'un groupe d'ordre 56 n'est pas simple.

Exercice 25. [Groupes simples, Perrin, page 37 exercice 3]
Soit G un groupe d'ordre $2k$, avec k un entier impair, $k \neq 1$. Montrer que G n'est pas simple. (Considérer l'action de G sur G par translation et étudier le morphisme $\varepsilon \circ \phi$ ou ε est la signature sur le groupe symétrique $\mathcal{S}_{\mathrm{G}}$ et ϕ est le morphisme $\mathrm{G} \to \mathcal{S}_{\mathrm{G}}$ associé à cette action.)

Exercice 26. [Groupes simples]
Montrer qu'aucun groupe (non banal, *i.e.* non isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$) d'ordre < 60 est simple.

Exercice 27.
On cherche à montrer que $\mathcal{A}_5$ est le seul groupe simple d'ordre 60.

a) Faire la liste des éléments de $\mathcal{A}_5$ avec leur ordre respectif. Décrire les classes de conjugaison dans $\mathcal{A}_5$.
b) Montrer que $\mathcal{A}_5$ est simple.
c) Soit G un groupe simple d'ordre $p^\alpha m$ avec $\alpha \geq 1$ et m non divisible par p. Notons n_p le nombre de p-Sylow de G. Montrer que $|\mathrm{G}|$ divise $n_p!$.
d) Soit G un groupe simple d'ordre 60. Montrer que le nombre de 2-Sylow de G est égal à 5 ou à 15.
e) En déduire que G contient un sous-groupe d'ordre 12.
f) Conclure.

Exercice 28. Trouver l'ordre du groupe G qui satisfait les conditions suivantes :

a) G est un sous-groupe d'un groupe d'ordre 100,
b) G ne contient pas d'élément d'ordre 2,
c) G n'est pas cyclique.

Exercice 29. [Groupe symétrique, Dummit-Foot, page 127 et page 132 exercice 33]

a) Déterminer le nombre de permutations conjuguées à un m-cycle dans $\mathcal{S}_n$.
b) Trouver toutes les classes de conjugaison de $\mathcal{S}_4$ et leurs cardinaux.
c) Donner la liste des sous-groupes distingués de $\mathcal{S}_4$.
d) Donner la liste des sous-groupes de $\mathcal{S}_4$.

Exercice 30. [Groupe alterné, classes de conjugaison, Perrin, page 16 lemme 4.11]
Montrer que pour $n \geq 5$, les 3-cycles sont conjugués dans $\mathcal{A}_n$.

Exercice 31. [Groupe symétrique, Perrin, page 13 exemple 3.2.2]
Déterminer le centre du groupe $\mathcal{S}_n$.

Exercice 32.

a) Soient G un groupe fini et N un sous-groupe distingué de G.
Soit $g \in \mathrm{G}$ tel que $\mathrm{pgcd}(o(g), [\mathrm{G} : \mathrm{N}]) = 1$. Montrer que $g \in \mathrm{N}$.
b) Montrer que $\mathcal{A}_4$ n'a pas de sous-groupe d'ordre 6.
c) Montrer que $\mathcal{A}_5$ est un groupe simple.

Exercice 33. [Variation aux colliers de Pólya, Armstrong, pages 98-100]
On souhaite dénombrer le nombre de cubes distincts que l'on peut fabriquer en coloriant chacune de ses faces ou bien avec de la peinture rouge, ou bien avec de la peinture verte. Deux cubes sont identiques s'ils le sont à une rotation près.

a) Soit G un groupe opérant sur un ensemble X. Soient g et h conjugués dans G. Montrer que
$$\left|\,\mathrm{fix}(g)\,\right| = \left|\,\mathrm{fix}(h)\,\right|$$
en construisant une bijection entre ces ensembles.
b) En appliquant la formule de Burnside à l'action du groupe des symétries rotationelles sur l'ensemble de tous les cubes possibles (sans identification), montrer qu'il y a 10 types de cubes distincts.

Exercice 34. [Szpirglas, p. 98 exercice 5]

Montrer que $\mathcal{S}_4$ possède trois 2-sous-groupes de Sylow isomorphes à D_8.

Exercice 35. Soit G un groupe fini d'ordre $|\mathrm{G}| = p^a m$ avec p premier et $\mathrm{pgcd}(p, m) = 1$. Soient $\mathrm{S} \subset \mathrm{G}$ un p-Sylow et H un sous-groupe de G. Montrer qu'il existe $g \in \mathrm{G}$ tel que $g\mathrm{S}g^{-1} \cap \mathrm{H}$ soit un p-Sylow de H.

Exercice 36.

(1) Soient $\Bbbk$ un corps et G un groupe fini. Montrer qu'il existe un entier n tel que G soit isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$. [Indication : on pourra commencer par plonger G dans un groupe symétrique.]

(2) Soit $\mathbb{F}_p$ le corps à p éléments où p désigne un nombre premier. Montrer que le groupe des matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale est un p-Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$.