Feuille 6

Exercice 1.

Soit G un groupe abélien.

Montrer que $T(G) = \{g \in G \mid o(g) < \infty\}$ est un sous-groupe de G (appelé le sous-groupe de torsion de G).

Donner un exemple explicite pour lequel $T(G)$ n'est pas un sous-groupe de G si G n'est pas abélien.

Exercice 2.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Trouver le sous-groupe de torsion de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Montrer que l'ensemble des éléments d'ordre infini et l'élément neutre ne forment pas un sous-groupe de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 3.

a) Donner un exemple de groupe abélien qui n'est pas de type fini.

b) Si p est un nombre premier, quel est le groupe sous-jacent au corps $\mathbb{F}_{p^n}$?

c) Soient n, $m \geq 1$ deux entiers. Posons $\delta := \mathrm{pgcd}(n, m)$ et $\mu := \mathrm{ppcm}(n, m)$.
Montrer que les groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/\delta\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\mu\mathbb{Z}$ sont isomorphes.

d) Montrer qu'un groupe abélien de type fini et de torsion est fini (ceci n'est plus vrai pour les groupes non-abéliens : voir par exemple [Calais, p. 294]).

e) Montrer qu'un groupe abélien fini est le produit de ses sous-groupes de Sylow.

Exercice 4.

A. Soient G, H, G' et H' des groupes finis tels que $G \simeq G'$ et $G \times H \simeq G' \times H'$. Nous allons montrer qu'alors $H \simeq H'$.
Étant donnés deux groupes finis G_1 et G_2, notons $m(G_1, G_2)$ le nombre de morphismes de groupes de G_1 vers G_2 et $i(G_1, g_2)$ le nombre de morphismes de groupes injectifs de G_1 vers G_2.

a) Utiliser le premier théorème d'isomorphisme pour montrer que

$$m(G_1, G_2) = \sum_{N \trianglelefteq G_1} i(G_1/N, G_2). \tag{1}$$

b) Montrer pour tout groupe fini L que

$$m(L, G) \cdot m(L, H) = m(L, G \times H).$$

c) En déduire que pour tout groupe fini L on a l'égalité $m(L, H) = m(L, H')$.

d) Par récurrence sur l'ordre de L, montrer en utilisant l'équation (1) que

$$i(L, H) = i(L, H'). \tag{2}$$

e) Appliquer l'équation (2) à H pour en déduire que $H \simeq H'$.

f) Donner un contre-exemple qui montre que si G, H, G' et H' sont des groupes quelconques tels que $G \simeq G'$ et $G \times H \simeq G' \times H'$, alors en général H et H' ne sont pas isomorphes.

B. Nous allons appliquer le résultat obtenu dans la partie A. pour montrer *l'unicité* du théorème de structure des groupes abéliens finis.
Soit G un groupe abélien fini. Supposons que

$$G \simeq \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z},$$

avec $n_r \mid n_{r_1} \mid \cdots n_2 \mid n_1$.

a) Montrer que l'exposant de G est égal à n_1.
b) Utiliser le résultat obtenu dans la partie A. pour montrer que cette décomposition est unique.

Exercice 5.
Soit G un groupe abélien fini. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
a) Pour tout d qui divise l'ordre de G, le groupe G admet un élément d'ordre d.
b) Pour tout d qui divise l'ordre de G, le groupe G admet un sous-groupe d'ordre d.

Exercice 6.
Soit G un groupe abélien fini. Montrer qu'il existe dans G un élément dont l'ordre est égal à l'exposant de G.

Exercice 7.
a) Donner la décomposition primaire du groupe $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$. En déduire ses facteurs invariants.
b) Donner la décomposition primaire du groupe $\mathbb{Z}/54\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/26\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$. En déduire ses facteurs invariants.

Exercice 8.
a) Déterminer à isomorphisme près tous les groupes abéliens d'ordre 12 et 72.
b) Déterminer à isomorphisme près tous les groupes abéliens d'ordre 10^6.

Exercice 9.
a) Le nombre de classes de conjugaison dans Σ_5 est le même que le nombre de groupes abéliens de cardinal 32 à isomorphisme près. Pourquoi ?
b) Généraliser au nombre de classes de conjugaison dans $\mathcal{S}_n$.

Exercice 10.
Déterminer la structure des groupes abéliens de type fini suivants :

$$\mathbb{Z}^2/\langle(1,3),(2,0)\rangle \qquad \mathbb{Z}^2/\langle(1,1),(1,-1)\rangle.$$

Exercice 11.
a) Soit G le groupe abélien de type fini

$$\langle g_1,\, g_2,\, g_3 \mid 5g_1 - 2g_2 + 12g_3 = 3g_1 + 4g_3 = 0\rangle.$$

Déterminer la structure de ce groupe.
b) Soit G le groupe abélien de type fini

$$\langle g_1,\, g_2,\, g_3,\, g_4 \mid 2g_1 + 4g_2 - 4g_4 = 6g_1 - 12g_3 + 3g_4 = 0\rangle.$$

Déterminer la structure de ce groupe.

Exercice 12.
Soit H le sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$ engendré par $(2,5)$, $(5,-1)$ et $(1,-2)$. Déterminer une base de H et décrire le quotient $\mathbb{Z}^2/H$.

Exercice 13.
Trouver une base du groupe suivant :

$$G = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \,\middle|\, \begin{matrix} 2x + 3y + 5z = 0 \\ 3x - 6y + 2z = 0 \end{matrix} \right\}$$

Exercice 14.
Montrer que les groupes $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times 90\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ sont isomorphes.

Exercice 15.
Montrer qu'un groupe abélien fini non cyclique possède un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour un certain nombre premier p.

Exercice 16.

a) Combien y a-t-il de groupes abéliens de cardinal 360 ? Faire la liste complète de ces groupes.

b) Plus généralement, pour tout entier n, combien y a-t-il de groupes abéliens de cardinal n ?

Exercice 17.

a) On considère $H = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a - b \text{ est divisible par } 10\}$. Montrer que H est un sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$. Calculer le rang de H. Donner une base de H. Décrire le quotient $\mathbb{Z}^2/H$.

b) On note H le quotient de $\mathbb{Z}^3$ par le sous-groupe engendré par les vecteurs $(4, 8, 10)$ et $(6, 2, 0)$. Déterminer la structure du groupe H.

Exercice 18.

Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que tout système libre maximal dans $\mathbb{Z}^n$ est de cardinal n.
Donner un exemple où un tel système n'est pas une base.

Exercice 19.

Soit $e_1 = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ un vecteur tel que le pgcd de ses coordonnées vaut 1. Montrer que l'on peut compléter e_1 en une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{Z}^n$.

Exercice 20.

Déterminer les facteurs invariants des matrices suivantes à coefficients dans $\mathbb{Z}$:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 69 & -153 \\ 12 & -27 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 12 & -6 & 2 \\ 75 & -41 & 13 \\ 19 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 21.

a) Soit G un groupe abélien de type fini. Soit $f : G \to G$ un morphisme surjectif. Montrer que f est un isomorphisme.
Ceci est-il nécessairement vrai si on remplace surjectif par injectif ?

b) Soit G un groupe abélien libre de type fini et soit $f : G \to G$ un morphisme. Définir le déterminant $\det(f) \in \mathbb{Z}$ de f. Montrer que f est injectif si et seulement si $\det(f) \neq 0$. Dans ce cas montrer que $|\det(f)| = |\mathrm{coker}(f)|$.

Exercice 22.

Le but de cet exercice est de redémontrer le théorème de structure des groupes abéliens finis.
On rappelle qu'un caractère d'un groupe abélien fini G est un morphisme $G \to \mathbb{C}^*$.

a) Si H est un sous-groupe d'un groupe abélien fini G, montrer que tout caractère de H se prolonge en un caractère de G.

b) Soit G un groupe abélien fini. On désigne par H un sous-groupe de G engendré par un élément de G d'ordre maximal. Montrer qu'on a l'isomorphisme $G \simeq H \times G/H$.

c) Conclure.

Exercice 23. [Structure des groupes abéliens finis, Colmez, Éléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres), pages 132-134]

Soit G un groupe fini. On note $\widehat{\mathrm{G}}$ l'ensemble des caractères linéaires de G. Notons que $\widehat{\mathrm{G}}$ est un groupe abélien pour la multiplication des caractères linéaires : si χ_1, χ_2 appartiennent à $\widehat{\mathrm{G}}$, alors

$$\chi_1(g)\chi_2(g) = \chi_1\chi_2(g) \qquad \forall\, g \in \mathrm{G};$$

on peut donc considérer le groupe $\widehat{\widehat{\mathrm{G}}}$ de ses caractères linéaires. La formule de multiplication ci-dessus montre que si $g \in \mathrm{G}$, alors $\chi \mapsto \chi(g)$ est un caractère linéaire de $\widehat{\mathrm{G}}$, d'où une application naturelle

$$\iota \colon \mathrm{G} \to \widehat{\widehat{\mathrm{G}}}$$

définie par

$$\iota(g)(\chi) = \chi(g).$$

Cette application est un morphisme de groupes puisque si g, h appartiennent à G alors

$$\iota(gh)(\chi) = \chi(gh) = \chi(g)\chi(h) = (\iota(g))(\chi)(\iota(h))(\chi) \qquad \forall\, \chi \in \widehat{\mathrm{G}}$$

et donc $\iota(gh) = \iota(g)\iota(h)$.

Si G est un groupe fini, alors $\iota\colon \mathrm{G} \to \widehat{\widehat{G}}$ est un isomorphisme de groupes.

Rappelons que l'exposant exp(G) d'un groupe abélien fini G est le maximum des ordres des éléments de G.

1. Montrer que si G est un groupe abélien fini, alors G et $\widehat{\mathrm{G}}$ ont même exposant.
2. Soit G un groupe abélien fini. Montrer par récurrence sur $|\mathrm{G}|$ qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ et des entiers N_1, N_2, …, N_r où N_r est l'exposant de G et N_{i+1} divise N_i si $i \leq r-1$ tels que

$$\mathrm{G} \simeq \oplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/N_i\mathbb{Z}.$$

Exercice 24.

Soit G un groupe abélien fini.

Supposons que pour tout diviseur d de l'ordre n de G, il existe un et un seul sous-groupe d'ordre d dans G. Montrer que G est cyclique.