

Leçon 107 : Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. Exemples.

TABLE DES MATIÈRES

1. Dernier rapport du Jury (2019)	1
2. Quelques développements possibles	2
3. Rappels	2
4. Mises en garde	3
5. Les fondamentaux	4
6. Quelques questions classiques	5
7. Théorie des représentations sous forme matricielle	6
8. Exercices	7
9. Développements	10
9.1. Groupes abéliens finis et représentations linéaires des groupes finis	10
9.2. Caractères et sous-groupes normaux de $\mathcal{S}_4$, [CG13, p. 364], [Szp09, p. 422], [Ale99], [CG15, F. 18 p. 490, p. 523], [RW10, p. 55, Exercice I.1.51 p. 70, p. 534], [Pey04, p. 229-232]	11
9.3. Le cube et les représentations de $\mathcal{S}_4$, [CG15, p. 490, p. 493], [Pey04, p. 230-232]	13
9.4. Représentations réelles et groupes d'ordre 8, [CG15, p. 477-482]	16
Références	20

1. DERNIER RAPPORT DU JURY (2019)

Il s'agit d'une leçon où théorie et exemples doivent apparaître. D'une part, il est indispensable de savoir dresser une table de caractères pour des petits groupes, et d'autre part, il faut savoir tirer des informations sur le groupe à partir de sa table de caractères, et être capable de trouver la table de caractères de certains sous-groupes. Les représentations peuvent provenir d'actions de groupes sur des ensembles finis, de groupes d'isométries, d'isomorphismes exceptionnels entre groupes de petit cardinal. Inversement, on peut chercher à interpréter des représentations de façon géométrique, mais il faut avoir conscience qu'une table de caractères provient généralement de représentations complexes a priori non réelles. La présentation du lemme de Schur est importante et ses applications doivent être parfaitement maîtrisées. S'ils le

désirent, les candidats peuvent évoquer la transformée de Fourier en présentant par exemple les formules d'inversion de Plancherel et de convolution.

2. QUELQUES DÉVELOPPEMENTS POSSIBLES

- ◊ Sous-groupes distingués et tables de caractères
- ◊ Prolongement des caractères et classification des groupes abéliens finis
- ◊ Lemme de Maschke
- ◊ Table de caractères de $\mathcal{S}_4$ par les isométries positives du cube, étude des sous-groupes distingués
- ◊ $\mathcal{S}_4$ est un groupe de pavage
- ◊ Théorème de Molien
- ◊ Table de caractères de $\mathcal{S}_4$ et les isométries du tétraèdre
- ◊ Prolongement des caractères
- ◊ Représentation par permutation et formule de Burnside
- ◊ Table de caractères de D_8 et $\mathbb{H}_8$

3. RAPPELS

Aux confins de la théorie des groupes et de la géométrie (linéaire) trône la théorie des représentations. Une représentation n'est rien d'autre qu'une action linéaire d'un groupe sur un espace V . Il s'agit donc de plonger un groupe (ou un quotient du groupe) dans un groupe de matrices. Ici, nous allons nous intéresser aux représentations d'un groupe fini sur le corps des complexes (pour plusieurs raisons : le corps est algébriquement clos, de caractéristique nulle, et on a une notion de positivité via les formes hermitiennes).

Le but de la théorie est de comprendre toutes les représentations possibles d'un groupe fini fixé G , à isomorphisme près, c'est-à-dire à changement de base près. La première idée est d'utiliser la finitude du groupe, elle se résume en un autre mot : moyenner. Prendre la moyenne sur le groupe va permettre de montrer une propriété de semi-simplicité : tout sous-espace G -stable possède un supplémentaire G -stable, c'est le théorème de Maschke. Une représentation est alors somme directe de sous-représentations "minimales" dites irréductibles. Elles se caractérisent par le lemme de Schur qui assure qu'un morphisme entre deux sous-représentations irréductibles qui commute à l'action de G est soit nul, soit un isomorphisme. La classification à isomorphisme près des G -représentations (à isomorphisme près !) devient abordable : il suffit de classer celles qui sont irréductibles. C'est ici qu'intervient la théorie des caractères, introduite par Frobenius et Schur. Le caractère d'une représentation est une fonction de G dans $\mathbb{C}$, associée à la représentation, qui se définit par la trace de la matrice associée à g dans G , il ne dépend que de sa classe d'isomorphisme. Il s'agit d'un objet simple et concret, un outil de calcul qui va caractériser la représentation à isomorphisme près. On dote l'espace des fonctions de G vers $\mathbb{C}$ d'une forme hermitienne G -invariante sur l'espace des fonctions, et là, miracle, le lemme de Schur implique que les caractères des sous-représentations irréductibles forment une famille orthonormée ; il s'agit même d'une base orthonormée de l'espace des fonctions constantes sur les classes de conjugaison de G . On illustre la théorie avec des exemples de "groupes de petits cardinaux" où l'on sait calculer tous les caractères irréductibles donc, tous les caractères. On prend l'habitude de résumer les résultats obtenus dans une table de caractères, c'est-à-dire un tableau à double

entrée dont les colonnes sont associées aux classes de conjugaison du groupe, et dont les lignes sont associées aux caractères irréductibles. Cette table donne de précieux renseignements sur le groupe qu'il faut pouvoir décoder, même si l'on sait qu'elle ne permet pas de retrouver le groupe à isomorphisme près. Pour finir, si on doit associer la théorie des représentations à une idée fondamentale des mathématiques, ce serait encore une fois l'idée de dualité. En effet, si un espace E de dimension finie sur $\mathbb{k}$ peut se voir à travers ses morphismes de E vers $\mathbb{k}$, on peut tenter de comprendre un groupe G à travers ses morphismes de G dans $\mathbb{C}^*$. Pour ce qui est des groupes abéliens finis, on obtient une dualité parfaite, mais pour les groupes finis en général, la théorie s'effondre : par exemple, pour l'énorme groupe $\mathcal{S}_n$, on ne récupère que le morphisme trivial et la signature. Il faut alors remplacer $\mathbb{C}^* = \mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$ par $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ pour retrouver les propriétés (mais pas toutes !) du groupe G .

4. MISES EN GARDE

- ◇ Il y a souvent confusion entre caractère et représentation. Il ne faut jamais oublier que le but est de comprendre comment représenter un groupe à l'aide de matrices. La représentation est le but, et le caractère est l'outil.
- ◇ Il y a aussi une confusion qui provient du vocabulaire même. On appelle représentation un morphisme de G dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{k})$ mais aussi l'espace V sur lequel le groupe G agit linéairement. En fait, on préfère appeler V un "G-module", ce qui signifie en gros qu'il possède une structure linéaire et une action linéaire de G , le défaut de cette notation est de ne pas préciser sur quel corps on le considère, on pourrait dire "G-module sur le corps $\mathbb{k}$ " si la précision est utile.
- ◇ Le mieux pour éviter toute confusion est de savoir interpréter toutes les définitions de base de façon matricielle. Il faut savoir comment interpréter une sous-représentation (matrice triangulaire par blocs), une somme directe de représentations (matrice diagonale par blocs), un morphisme de représentation (commutation de matrices). Voir par exemple [CG15, p. 255].
- ◇ Attention, on met sur un G-module V deux formes hermitiennes : une classique notée $(,)$, indépendante de G , et l'autre G-invariante donnée par

$$(v, w)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (g \cdot v, g \cdot w).$$

Il ne faut pas les confondre. C'est la seconde qui fournit un supplémentaire G -stable à toute sous-représentation.

- ◇ Ne passons pas à côté des choses simples ! Il serait ridicule de faire défiler la théorie sans comprendre ce qu'est la théorie des représentations pour le groupe trivial et pour $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Pour le groupe trivial, un G-module est tout simplement un espace vectoriel. Pour $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$, les représentations correspondent aux matrices telles que $A^2 = \mathrm{id}$ (ici $A = \rho(\bar{1})$), c'est-à-dire les matrices de symétries. Un endomorphisme de représentation correspond à une matrice qui commute avec A . Deux représentations ρ et ρ_0 sont isomorphes (toujours pour le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) si les deux matrices A et A_0 correspondantes sont conjuguées. Une matrice symétrique (en caractéristique différente de 2) est diagonalisable, ce qui correspond au théorème de Maschke, et les valeurs propres sont 1 et -1 ,

ce qui correspond au fait que l'on a deux sous-représentations irréductibles : $\bar{1} \mapsto 1$ et $\bar{1} \mapsto -1$. Les sous-espaces propres $\ker(A - \text{id})$ et $\ker(A + \text{id})$ sont les composantes isotypiques de la représentation pour les deux irréductibles de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Que se passe-t-il pour $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$? Voir exemple [CG15].

- ◊ De la même manière, trouver une représentation en degré d du groupe diédral D_{2n} signifie trouver, dans $M_d(\mathbb{C})$ deux matrices C et S telles que $C^n = \text{id}$, $S^2 = \text{id}$ et $SCS^{-1} = C^{-1}$. Cela vient du fait que D_{2n} est engendré par deux éléments vérifiant les relations correspondantes, voir [CG15, Remarque XIII-B.2.2].
- ◊ Quand on applique le théorème de Maschke (ou théorème de semi-simplicité) on obtient $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$ où les V_i sont des sous-représentations irréductibles. On regroupe ensuite la

somme directe en représentations isomorphes : $V \simeq \bigoplus_{i=1}^k m_i V_i$, attention, c'est un isomor-

phisme et non pas une égalité (même si par abus de notation on arrive parfois à noter des égalités). Les $m_i V_i$ sont les composantes isotypiques. La composante isotypique associée à une représentation irréductible est unique, elle est entièrement déterminée par V . La première composante isotypique à connaître est le sous-espace V^G des éléments invariants par tout G ; c'est la composante isotypique de la représentation triviale. Comme elle est de degré 1, la multiplicité est donc $m = \dim V^G$. Pour revenir à l'exemple de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, m est la dimension du sous-espace propre de A pour la valeur propre 1.

- ◊ Quand G est un groupe fini, le théorème de Lagrange assure qu'une représentation vérifie $\rho(g)^n = \text{id}$ pour $n = |G|$. C'est ceci qui implique que $\rho(g)$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, mais si G est infini, la diagonalisabilité n'est pas acquise! Penser à la représentation de $(\mathbb{Z}, +)$ telle que $n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- ◊ Attention, quand on dit que le caractère caractérise, il ne caractérise la représentation qu'à isomorphisme près. On ne peut pas récupérer une représentation à partir de son caractère.

5. LES FONDAMENTAUX

Il est fondamental de savoir construire des représentations d'un groupe G donné. Les outils de base sont les suivants :

- ◊ On peut construire à partir d'un groupe un certain nombre de représentations : les représentations classiques (la triviale, la régulière [CG15, XIII-1.1.10]), les représentations par permutations à partir d'actions de groupe sur des ensembles finis. En effet, toute action du groupe G sur un ensemble fini X fournit une représentation par matrices de permutations, [CG15, XIII-3.11]. Le caractère de cette représentation est l'application qui envoie g sur le nombre d'invariants de g sur X . La représentation régulière a l'avantage d'être fidèle (injective); cela provient des permutations de l'action du groupe G à gauche sur lui-même.

- ◇ La construction de représentations, voir [CG15, XIII-1.3] : on utilise la somme directe, la dualité, les homomorphismes de représentations pour construire à partir de quelques représentations classiques beaucoup d'autres représentations.
- ◇ Si G est un groupe abélien, alors les matrices de représentations commutent et sont diagonalisables : elles sont codiagonalisables et donc, les sous-représentations irréductibles sont de dimension 1. On a ainsi n sous-représentations irréductibles et elles forment même un groupe pour la multiplication des fonctions, noté $\widehat{G}$. C'est le début d'une belle dualité ! Par exemple, le groupe G va s'identifier au bidual, voir [CG15, Annexe XIII-A, 1.2.3] et la théorie de Fourier peut s'appliquer.
- ◇ Le théorème de Maschke : toute sous-représentation possède un supplémentaire stable. La version avec l'orthogonal pour la forme G -invariante est valable uniquement sur $\mathbb{C}$. La version avec les noyaux d'un projecteur G -invariant a l'avantage d'être valable sur tout corps de caractéristique ne divisant pas $|G|$, voir [CG15, XIII-1.7].
- ◇ La théorie des caractères : le caractère associé à une représentation ρ est la fonction qui envoie g dans G sur la trace $\text{tr}(\rho(g))$. Le lemme de Schur, [CG15, XIII-2.1], en est le point de départ. Il dit qu'un morphisme de sous-représentations irréductibles est soit un isomorphisme soit nul, et (sur $\mathbb{C}$) s'il est un isomorphisme, c'est une homothétie. C'est ce résultat fondamental qui implique que les caractères des sous-représentations irréductibles forment un système orthonormé pour la norme hermitienne G -invariante des fonctions de G vers $\mathbb{C}$, [CG15, XIII-2.5.6]. Mieux ! Si on se restreint aux fonctions constantes sur les classes de conjugaison de G , on montre avec un peu plus d'effort que l'ensemble des caractères irréductibles en forme une base, [CG15, XIII-2.6.1]. Comme corollaire, [CG15, XIII-2.7], le nombre de sous-représentations irréductibles (à isomorphisme près) est égal au nombre de classes de conjugaison : la table de caractères est une matrice carrée !
- ◇ La déconstruction de représentations : la base unitaire des caractères permet alors de comprendre comment une représentation complexe se décompose en représentations irréductibles, à isomorphisme près. En effet, $V \simeq \sum_i m_i V_i$ implique au niveau des caractères $\chi_V = \sum_i m_i \chi_{V_i}$ et $m_i = \langle \chi_V, \chi_{V_i} \rangle$ car la base des χ_{V_i} est unitaire. Comme corollaire, on obtient que si deux représentations possèdent un même caractère, elles sont isomorphes : le caractère caractérise, [CG15, XIII-2.5.7].
- ◇ Savoir construire une table de caractères, utiliser pour cela la somme des carrés des degrés, l'orthogonalité des lignes, la pseudo-orthogonalité des colonnes, voir les annexes de [CG15, XIII]. La connaissance botanique des petits groupes : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (où la table de caractères est une matrice de Vandermonde), D_n , S_n , et A_n , pour $n = 3, 4$, voire 5. Certaines représentations proviennent d'actions de groupe sur l'espace affine (avec des dessins, même s'ils sont moches, c'est pas grave) sur le triangle, le carré, le n -gone, le tétraèdre, voire l'icosaèdre.

6. QUELQUES QUESTIONS CLASSIQUES

- ◇ Un groupe abélien fini a toutes ses sous-représentations irréductibles de degré 1. Et réciproquement ? Oui, voir par exemple [CG15, Exercice XIII-E1].

- ◇ Deux groupes ayant la même table de caractères sont isomorphes. Vrai ou faux ? Faux, on a des contre-exemples. Le premier exemple est que la table de caractères de $\mathbb{H}_8$ et de D_4 sont les mêmes alors qu'ils sont non isomorphes, voir [CG15, Exercice XIII-21].
- ◇ Peut-on trouver la table de caractères d'un sous-groupe H à partir de la table des caractères d'un groupe G donné ? En théorie oui : toutes les représentations de G sont dans la représentation régulière de G et comme $H \subset G$, la représentation régulière de H est une sous-représentation de la représentation régulière de G , vue comme restriction d'une représentation de G . On a donc toutes les représentations de H dans les représentations de G . Du coup, en pratique, on prend une à une les représentations de G et on regarde leur décomposition en caractères de H , quand l'indice de H est petit, on s'en sort, voir [CG15, Annexe XIII-D].
- ◇ Le lemme de Schur assure que l'ensemble des endomorphismes d'une représentation irréductible est un corps. Est-il nécessairement commutatif ? Oui pour $\mathbb{C}$, puisqu'on obtient les homothéties, et donc le corps $\mathbb{C}$ lui-même. Mais non pour $\mathbb{R}$, voir par exemple [CG15, Exercice XIII-E.13], où l'on trouve le corps des quaternions.
- ◇ Il est indispensable de savoir répondre à la question "Que peut-on lire dans la table de caractères d'un groupe fini G ?" Citons en vrac : le treillis des sous-groupes distingués [CG15, Exercice XIII-E.25], donc en particulier, la simplicité de G (à savoir illustrer sur le groupe simple A_5), le groupe dérivé, [CG15, Exercice XIII-E.26], le centre de G , [CG15, Exercice XIII-E.28], la cyclicité du centre, [CG15, Exercice XIII-E.29], le nombre de racines carrées d'un élément g de G , [CG15, Exercice XIV-A.9].

7. THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS SOUS FORME MATRICIELLE

Comprendre la théorie sous forme matricielle permet de percevoir les vrais problèmes de façon tangible. Ici, le groupe G est supposé fini, et l'espace vectoriel V sur lequel G agit linéairement est de dimension finie notée n sur le corps de complexes.

- ◇ Qu'est-ce qu'une représentation d'un groupe fini G ?
Il s'agit finalement de trouver une famille de matrices $A(g) \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ pour tout g dans G , telles que si $g = hk$, alors $A(g) = A(h)A(k)$.
- ◇ Qu'est-ce qu'un morphisme de représentations ? Qu'est-ce qu'un automorphisme de représentations ?
Si V , resp. W , est une représentation de G de degré n , resp. m , dont le système de matrices associées est $A(g)$, resp. $B(g)$, $g \in G$, alors un morphisme de représentations entre V et W est une matrice $M \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ telle que pour tout g dans G , $MA(g) = B(g)M$. Un automorphisme de la représentation V est une matrice P de $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ telle que $PA(g)P^{-1} = A(g)$ pour tout g de G .
- ◇ Qu'est-ce qu'une forme hermitienne G -invariante sur le $\mathbb{C}$ -espace V ?
Il s'agit d'une matrice H dans $M_n(\mathbb{C})$, à symétrie hermitienne, c'est-à-dire $H^ = H$, telle que $A(g)^* H A(g) = H$ pour tout g de G .*
- ◇ Comment voit-on matriciellement une sous-représentation ? Et formuler matriciellement le théorème de Maschke.

On voit que l'on a une sous-représentation s'il existe une matrice de passage $P \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ telle que pour tout $g \in G$, $PA(g)P^{-1}$ a une structure triangulaire par blocs :

$$\begin{pmatrix} B(g) & X(g) \\ 0 & C(g) \end{pmatrix}.$$

Le théorème de Maschke dit qu'il existe une matrice Q de $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ telle que $QA(g)Q^{-1}$ est diagonale par blocs pour tout g (avec les mêmes tailles de blocs que ci-dessus).

◇ Que signifie matriciellement la décomposition de V en irréductibles ?

Cela signifie qu'il existe P dans $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ telle que $PA(g)P^{-1}$ est diagonalisable par blocs pour tout g , avec des blocs les plus petits possibles.

◇ Que dit le théorème de Frobenius-Schur ?

Si V est irréductible et si $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g^2) = 1$, alors il existe P dans $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ telle que

$PA(g)P^{-1}$ est une matrice réelle pour tout g .

8. EXERCICES

Exercice 1

Soient $f: G \rightarrow H$ un morphisme de groupes surjectif entre deux groupes finis et $\rho: H \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation complexe de H . Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) la représentation ρ de H est irréductible ;
- (ii) la représentation $\rho \circ f$ de G est irréductible.

Exercice 2

Soit $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation complexe d'un groupe fini G sur un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel V de dimension finie. Montrer qu'il existe un produit hermitien φ sur V tel que $\rho(G) \subset \text{U}(\varphi)$.

Exercice 3

Le théorème de Maschke reste-t-il valable si on considère un autre corps que $\mathbb{C}$?

Exercice 4

Le lemme de Schur reste-t-il valable si on considère un autre corps que $\mathbb{C}$?

Exercice 5

Soit $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation irréductible d'un groupe fini G où V est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

- (1) Montrer que $\rho(Z(G)) \subset Z(\text{GL}(V))$.
- (2) En déduire que si $Z(G)$ n'est pas cyclique, alors ρ n'est pas injective.

Exercice 6

Soit $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation irréductible d'un groupe fini G où V est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. Montrer que V est de dimension finie et que $\dim V \leq |G|$.

Exercice 7

Soient $\alpha: G \rightarrow \mathbb{C}$ et $\chi: G \rightarrow \mathbb{C}$ deux caractères d'un groupe fini G . Supposons que α soit de degré 1.

1. Montrer que $\alpha \cdot \chi$ est le caractère d'une représentation complexe de G .
2. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
 - (i) le caractère $\alpha \cdot \chi$ de G est irréductible ;
 - (ii) le caractère χ de G est irréductible.

Exercice 8

Soit $n \geq 2$ un entier. Considérons le sous-espace vectoriel

$$V = \{z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0\}$$

de $\mathbb{C}^n$. Considérons la représentation $\rho: \mathcal{S}_n \rightarrow \text{GL}(V)$ définie par

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n \quad \forall z \in V \quad \rho(\sigma)(z) = (z_{\sigma^{-1}(1)}, z_{\sigma^{-1}(2)}, \dots, z_{\sigma^{-1}(n)})$$

Montrer que ρ est irréductible.

Exercice 9

Soit $n \geq 1$ un entier. Déterminer les caractères de degré 1 du groupe $\mathcal{S}_n$ pour $n \geq 3$.

Exercice 10

Soit G un groupe fini. Soit $\chi: G \rightarrow \mathbb{C}$ un caractère de G vérifiant

$$\forall g \in G \setminus \{e\} \quad \chi(g) = 0$$

Montrer que χ est un multiple du caractère de la représentation régulière de G .

Exercice 11

Soit $\chi: G \rightarrow \mathbb{C}$ le caractère d'un groupe fini G associé à une représentation $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ où V est de dimension finie. Montrer que

$$\ker \rho = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(e)\}$$

Exercice 12

Soit H un sous-groupe abélien d'un groupe fini G .

- (1) Montrer que si χ est un caractère de H sur $\mathbb{C}$, alors

$$\sum_{h \in H} |\chi(h)|^2 \geq |H| \cdot \chi(1)$$

- (2) En déduire que si χ est un caractère irréductible de G sur $\mathbb{C}$, alors

$$\chi(1) \leq \frac{|G|}{|H|}$$

Exercice 13

Soit G un groupe fini.

- (1) Montrer que si G est abélien, alors $\widehat{G} \simeq G$.
- (2) Dans le cas général montrer que $\widehat{G}$ est isomorphe à l'abélianisé de G .

Exercice 14

Soit H un sous-groupe d'un groupe abélien fini G . Montrer que le groupe G/H est isomorphe à un sous-groupe de G .

Exercice 15

Soit H un sous-groupe d'un groupe abélien fini G . Montrer que tout caractère de H se prolonge à un caractère de G .

Exercice 16

Considérons une base de $\mathbb{C}^6$ notée $(e_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{S}_3}$. Soit $\rho: \mathcal{S}_3 \rightarrow \text{GL}(6, \mathbb{C})$ du groupe $\mathcal{S}_3$ définie par

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_3 \quad \forall \tau \in \mathcal{S}_3 \quad \rho(\sigma)(e_\tau) = e_{\sigma\tau\sigma^{-1}}$$

- (1) Déterminer la table des caractères irréductibles du groupe $\mathcal{S}_3$.
- (2) Décomposer ρ en somme directe de représentations irréductibles.

Exercice 17

Deux groupes finis admettant la même table de caractères sont-ils isomorphes ?

Exercice 18

Déterminer la table des caractères irréductibles du groupe diédral D_{2n} .

Exercice 19

Soient $p \in \mathbb{N}$ un nombre premier et $n \geq 1$ un entier. Posons $q = p^n$. Considérons le groupe affine pour la composition

$$g = \{f: \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{F}_q \mid \exists (a, b) \in \mathbb{F}_q^* \times \mathbb{F}_q, \forall x \in \mathbb{F}_q, f(x) = ax + b\}.$$

- (1) Déterminer les classes de conjugaison du groupe G .
- (2) Déterminer les caractères de G dont le degré est 1.
- (3) En déduire la table des caractères irréductibles de G .

Exercice 20

Soient p, q deux nombres premiers tels que $q > p$. Soit G un groupe d'ordre pq non abélien.

- (1) Montrer que $D(G)$ est l'unique q -Sylow de G .
- (2) Déterminer les caractères de G dont le degré est 1.
- (3) Déterminer le nombre et les degrés des caractères irréductibles de G .

Exercice 21

Soient $p \geq 0$ un entier premier et G un groupe d'ordre p^3 non abélien.

- (1) Montrer que $D(G)$ est d'ordre p et que $G/D(G) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$.
- (2) Déterminer le nombre et les degrés des caractères irréductibles de G .

9. DÉVELOPPEMENTS

9.1. Groupes abéliens finis et représentations linéaires des groupes finis. *Référence :* [Col11, p. 132-134]

On propose une preuve de la partie « existence » du théorème de structure des groupes abéliens finis reposant sur les notions d'exposant d'un groupe et de dual d'un groupe.

Soit G un groupe fini. Notons $\widehat{G}$ l'ensemble des caractères linéaires de G . Notons que $\widehat{G}$ est un groupe abélien pour la multiplication des caractères linéaires : si χ_1, χ_2 appartiennent à $\widehat{G}$, alors

$$\chi_1(g)\chi_2(g) = \chi_1\chi_2(g) \quad \forall g \in G;$$

on peut donc considérer le groupe $\widehat{\widehat{G}}$ de ses caractères linéaires. La formule de multiplication ci-dessus montre que si $g \in G$, alors $\chi \mapsto \chi(g)$ est un caractère linéaire de $\widehat{G}$, d'où une application naturelle

$$\iota: G \rightarrow \widehat{\widehat{G}}$$

définie par

$$\iota(g)(\chi) = \chi(g).$$

Cette application est un morphisme de groupes puisque si g, h appartiennent à G alors

$$\iota(gh)(\chi) = \chi(gh) = \chi(g)\chi(h) = (\iota(g))(\chi)(\iota(h))(\chi) \quad \forall \chi \in \widehat{G}$$

et donc $\iota(gh) = \iota(g)\iota(h)$.

Proposition 1. *Si G est un groupe fini, alors $\iota: G \rightarrow \widehat{\widehat{G}}$ est un isomorphisme de groupes.*

Définition. Soit G un groupe abélien fini. L'exposant $\exp(G)$ de G est le maximum des ordres des éléments de G .

Lemme 2. *Si G est un groupe abélien fini, alors G et $\widehat{G}$ ont même exposant.*

Démonstration. Si H est un groupe abélien fini, on note $N(H)$ son exposant.

Si χ est un élément de $\widehat{H}$, alors pour tout $g \in G$

$$\chi^{N(H)}(g) = \chi(g)^{N(H)} = \chi(g^{N(H)}) = \chi(e_G) = e_G$$

et donc $\chi^{N(H)} = \text{id}$. Il en résulte que l'exposant de $\widehat{H}$ divise celui de H .

En particulier l'exposant de $\widehat{G}$ divise celui de G et $N(\widehat{G}) \subseteq N(G)$. De même l'exposant de $\widehat{\widehat{G}}$ divise celui de $\widehat{G}$ et $N(\widehat{\widehat{G}}) \subseteq N(\widehat{G})$. D'où

$$(1) \quad N(\widehat{\widehat{G}}) \subseteq N(\widehat{G}) \subseteq N(G)$$

Mais G et $\widehat{\widehat{G}}$ sont isomorphes donc $N(\widehat{\widehat{G}}) = N(G)$ et (1) implique $N(\widehat{\widehat{G}}) = N(\widehat{G}) = N(G)$. $\square$

Théorème 3. *Soit G un groupe abélien fini. Il existe $r \in \mathbb{N}$ et des entiers $N_1, N_2, \dots, N_r$ où N_r est l'exposant de G et N_{i+1} divise N_i si $i \leq r-1$ tels que*

$$G \simeq \oplus_{i=1}^r \mathbb{Z}/N_i\mathbb{Z}.$$

Démonstration (par récurrence sur $|G|$). Si $|G| = 1$, alors $r = 0$.

Supposons donc que $|G| > 1$. Posons $N = N_1 = \exp(G)$. Alors $\chi(g)$ est une racine N -ième de l'unité pour tous $\chi \in \widehat{G}$ et $g \in G$. Notons que $N = \exp(\widehat{G})$ (Lemme 2). Il existe donc χ_1 d'ordre N et comme $\chi_1(G)$ est un sous-groupe du groupe cyclique $\mu_N = \{z \in \mathbb{C} \mid z^N = 1\}$, c'est μ_N tout entier. Il existe donc $g_1 \in G$ tel que $\chi_1(g_1) = \exp\left(\frac{2i\pi}{N}\right)$. L'ordre de g_1 divise N (définition de $\exp(G)$); ainsi g_1 est d'ordre N et le sous-groupe $H_1 = \langle g_1 \rangle$ de G est isomorphe à $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

Montrons que $G = H_1 \oplus \ker \chi_1$: χ_1 induit un isomorphisme de H_1 sur μ_N car χ_1 est surjectif et $|H_1| = |\mu_N| = N$. Notons $\alpha : \mu_N \rightarrow H_1$ son inverse. Soit $g \in G$; alors $a = \alpha(\chi_1(g)) \in H_1$ et $b = a^{-1}g$ vérifie

$$\chi_1(b) = \chi_1(a^{-1}g) = \chi_1(a^{-1})\chi_1(g) = \chi_1(a)^{-1}\chi_1(g) = 1.$$

Ainsi b appartient à $\ker \chi_1$. On peut donc écrire tout élément g de G sous la forme ab avec $a \in H_1$ et $b \in \ker \chi_1$.

Puisque χ_1 est injectif sur H_1 nous avons $H_1 \cap \ker \chi_1 = \{1\}$. Il en résulte que $G = H_1 \oplus \ker \chi_1$.

Comme l'exposant de $\ker \chi_1 \subset G$ divise l'exposant de G , l'hypothèse de récurrence assure que

$$\ker \chi_1 \simeq \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}/N_i\mathbb{Z}$$

et donc que

$$G = H_1 \oplus \ker \chi_1 = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \oplus \ker \chi_1 \simeq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}/N_i\mathbb{Z}$$

□

9.2. Caractères et sous-groupes normaux de $\mathcal{S}_4$, [CG13, p. 364], [Szp09, p. 422], [Ale99], [CG15, F. 18 p. 490, p. 523], [RW10, p. 55, Exercice I.1.51 p. 70, p. 534], [Pey04, p. 229-232].

Il y a plusieurs manières d'aborder ce développement donc bien expliciter lors de son plan ce que l'on va faire. Par exemple « Je vais montrer que le groupe des rotations préservant un cube est isomorphe à $\mathcal{S}_4$; puis à l'aide de la formule de BURNSIDE je vais dénombrer les coloriage d'un cube avec c couleurs ». Ou encore « Je vais dresser la liste des classes de conjugaison de $\mathcal{S}_4$ en donnant leur interprétation comme isométries du cube, dresser la table des caractères de $\mathcal{S}_4$ en utilisant des résultats mentionnés dans le plan et illustrer le fait que la table des caractères permet de retrouver tous les sous-groupes distingués propres (ici $\mathcal{K} \triangleleft \mathcal{S}_4$ et $\mathcal{A}_4 \triangleleft \mathcal{S}_4$) ».

9.2.1. Isomorphisme.

Théorème 4. *Le groupe $\text{Isom}^+(\text{cube})$ des rotations de $\mathbb{R}^3$ préservant un cube est isomorphe au groupe symétrique $\mathcal{S}_4$.*

Remarque 5. Si g est une isométrie qui fixe trois sommets du cube qui sont deux à deux non opposés, alors $g = \text{id}$ (car ces sommets forment une base de l'espace vectoriel d'origine le centre du cube).

Démonstration. Les quatre diagonales du cube sont caractérisées comme les couples de sommets réalisant la distance maximale entre deux sommets. Il en résulte que le groupe $\text{Isom}^+(\text{cube})$ agit sur l'ensemble $\{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ des grandes diagonales ; le morphisme associé est

$$\phi: \text{Isom}^+(\text{cube}) \rightarrow \mathcal{S}_4, \quad f \mapsto \sigma$$

tel que $f(D_i) = D_{\sigma(i)}$ pour tout $1 \leq i \leq 4$.

Montrons que ϕ est injectif. Supposons que f appartient à $\ker \phi$, *i.e.* que f préserve chaque diagonale D_i . Notons que f ne peut pas échanger les deux sommets de chaque diagonale car sinon $f = -\text{id}$ par la Remarque 5 appliquée à $-\text{id} \circ f$. Il existe donc deux sommets d'une grande diagonale, disons A_1 et A'_1 dans D_1 quitte à renuméroter, qui sont fixés par f . Mais pour chaque autre diagonale D_i les sommets A_i et A'_i ne sont pas équidistants de A_1 , donc fixés également ; finalement f fixe tous les sommets et $f = \text{id}$ (Remarque 5).

Finalement montrons que ϕ est surjectif. Les transpositions engendrent $\mathcal{S}_4$, il suffit donc de montrer que les six transpositions de $\mathcal{S}_4$ sont dans l'image. Or les transpositions correspondent aux images des rotations d'angle π et d'axe passant par les milieux des arêtes opposées. $\square$

Remarque 6. Nous pourrions aussi montrer d'abord que $\text{Isom}^+(\text{cube})$ et $\mathcal{S}_4$ ont même ordre (24). Le dénombrement se fait en termes de « drapeaux » du cube ([Szp09, p. 414]). Nous pouvons alors nous contenter de montrer l'injectivité ou la surjectivité du morphisme ϕ introduit dans la démonstration du Théorème 4.

9.2.2. *Table de caractères*, [CG15, F. 18 p. 490, p. 523]. Il y a 5 classes de conjugaison dans le groupe $\mathcal{S}_4$, voici leur interprétation en termes d'isométries directes préservant un cube (l'action sur les 4 grandes diagonales permet l'identification avec $\mathcal{S}_4$) ainsi que leur cardinal :

- ◊ classe du neutre de cardinal 1 ;
- ◊ classe des transpositions, rotations d'angle π d'axe passant par les milieux de deux arêtes opposées, de cardinal 6 ;
- ◊ classe des 3-cycles, rotations d'angle $\pm \frac{2\pi}{3}$ d'axe passant par les deux sommets opposés, de cardinal 8 ;
- ◊ classe des 4-cycles, rotations d'angle $\pm \frac{\pi}{2}$ d'axe passant par les milieux de faces opposées, de cardinal 6 ;
- ◊ classe des double transpositions, carrés des précédentes (rotations d'angle π d'axe passant par les milieux des faces opposées).

La théorie générale assure donc qu'il y a 5 représentations irréductibles de $\mathcal{S}_4$, les voici ainsi que leurs caractères :

- ◊ la représentation triviale ;
- ◊ la représentation signature χ_{sgn} ;
- ◊ la représentation ρ_3 de degré 3 provenant de la représentation par permutation de $\mathcal{S}_4$ sur $\mathbb{C}^4$ modulo la droite invariante ;
- ◊ la même tordue par la signature (on pourra justifier l'irréductibilité) ;
- ◊ la représentation ρ_2 de degré 2 provenant de la représentation par permutation de $\mathcal{S}_3$, via le morphisme $\mathcal{S}_4 \rightarrow \mathcal{S}_3$ ($\mathcal{S}_4$ agit sur les paires de faces opposées du cube).

	$C(\text{id})$	$C((1\ 2))$	$C((1\ 2)(3\ 4))$	$C((1\ 2\ 3))$	$C((1\ 2\ 3\ 4))$
$\chi_{\rho_{\text{triv}}}$	1	1	1	1	1
χ_{sgn}	1	-1	1	1	-1
χ_{ρ_3}	3	1	-1	0	-1
$\chi_{\text{sgn}} \otimes \chi_{\rho_3}$	3	-1	-1	0	1
χ_{ρ_2}	2	0	2	-1	0

Les deuxième et cinquième lignes donnent des sous-groupes distingués non triviaux, respectivement $\mathcal{A}_4$ et $\mathcal{K}$.

9.3. Le cube et les représentations de S_4 , [CG15, p. 490, p. 493], [Pey04, p. 230-232].

Illustrer sur le cas des rotations préservant un cube comme retrouver les sous-groupes distingués à partir d'une table de caractères.

9.3.1. *Représentation par permutation.* Pour construire une table de caractères nous avons besoin d'un procédé de construction de représentations irréductibles. Les représentations par permutations « font souvent l'affaire ».

Exemple (Représentation par permutations). Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X . Notons $\mathbb{C}X$ l'espace vectoriel muni de la base canonique e_x indexée par X . Faisons agir G sur $\mathbb{C}X$ en posant

$$\rho(g)(e_x) = e_{g \cdot x}.$$

On appelle ρ la représentation par permutations (associée à l'action de G sur X). Remarquons que la somme $s = \sum_{x \in X} e_x$ est invariante. Désignons par V_X le quotient $\mathbb{C}X / \mathbb{C}s$ qui s'identifie à un sous-espace supplémentaire stable de $\mathbb{C}s$.

Proposition 7. *Soit G un groupe agissant sur un ensemble fini X . Soit V_X le quotient de la représentation par permutation associée (notations de l'Exemple 9.3.1).*

(1) *Le caractère χ de la représentation est donné par*

$$\chi(g) = |\text{Fix}(g)| - 1.$$

(2) *Si G agit deux fois transitivement sur X , alors V_X est irréductible.*

Démonstration. (1) Le caractère de la représentation avant quotient est $g \mapsto |\text{Fix}(g)|$: un 1 sur la diagonale d'une matrice de permutations correspond à un point fixe. Par ailleurs la représentation triviale sur $\mathbb{C}s$ est de caractère identiquement 1. On conclut par additivité du caractère en écrivant $\mathbb{C}X = V_X \oplus \mathbb{C}s$ (matriciellement on calcule la trace d'une matrice diagonale par blocs de taille $n - 1$ et 1).

(2) D'après ce qui précède nous avons

$$\langle \chi, \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (|\text{Fix}(g)| - 1)^2 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|^2 - 2 \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)| + 1$$

L'action étant transitive la formule de BURNSIDE assure que

$$1 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|.$$

L'action étant doublement transitive l'action diagonale de G sur $X \times X$ admet deux orbites : la diagonale et son complément. Par suite la formule de BURNSIDE appliquée à cette action entraîne

$$2 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |(X \times X)^g| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|^2.$$

Par conséquent $\langle \chi, \chi \rangle = 2 - 2 + 1 = 1$ ce qui donne l'irréductibilité attendue. $\square$

9.3.2. *La table des caractères de $\mathcal{S}_4$.* Le groupe des isométries directes (*i.e.* les rotations) de $\mathbb{R}^3$ préservant un cube est isomorphe à $\mathcal{S}_4$ via l'action sur les grandes diagonales.

La table de caractères de $\mathcal{S}_4$ est

	$C(\text{id})$	$C((1\ 2))$	$C((1\ 2)(3\ 4))$	$C((1\ 2\ 3))$	$C((1\ 2\ 3\ 4))$
$\chi_{\rho_{\text{triv}}}$	1	1	1	1	1
$\chi_{\text{perm_tetr}}$	1	-1	1	1	-1
$\chi_{\text{perm_diag}}$	3	1	-1	0	-1
$\chi_{\text{perm_tetr}} \otimes \chi_{\text{perm_diag}}$	3	-1	-1	0	1
via $\mathcal{S}_3$	2	0	2	-1	0

où

- ◇ $\chi_{\text{perm_tetr}}$ est la représentation irréductible de degré 1 obtenue par permutation des deux tétraèdres inscrits dans le cube, c'est aussi la signature,
- ◇ $\chi_{\text{perm_diag}}$ est la représentation irréductible de degré 3 obtenue par permutation des quatre diagonales,
- ◇ la représentation $\chi_{\text{perm_tetr}} \otimes \chi_{\text{perm_diag}}$ correspond à la représentation $\mathcal{S}_4 \simeq \text{Isom}^+(\text{cube}) \subset \text{SO}(3, \mathbb{R})$ dont on est parti,
- ◇ via $\mathcal{S}_3$ est la représentation irréductible de degré 2 obtenue par permutation des trois paires de faces opposées.

Proposition 8 (Résumé des propriétés d'une table de caractères). (1) *Chaque ligne distincte de la représentation triviale a « somme nulle » :*

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = 0.$$

(2) *Deux lignes distinctes sont orthogonales :*

$$\sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} \chi'(g) = 0.$$

(3) *La « norme » d'une ligne correspond à l'ordre du groupe (caractérise l'irréductibilité) :*

$$\sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} \chi(g) = |G|.$$

(4) La somme des carrés des degrés coïncide avec l'ordre du groupe :

$$\sum_i (\deg \rho_i)^2 = |G|.$$

(5) La somme de chaque colonne distincte de la classe du neutre est nulle :

$$\sum_i (\deg \rho_i) \chi_i(g) = 0.$$

(6) Deux colonnes distinctes sont orthogonales :

$$\sum_i \overline{\chi_i(C)} \chi_i(C') = 0$$

Démonstration. (1) Relation d'orthogonalité entre χ et $\chi_{\rho_{\text{triv}}}$.

(2) Relation d'orthogonalité à nouveau.

(3) C'est la formule $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} \chi(g) = \sum m_i^2$.

(4) Chaque représentation V_i apparaît avec multiplicité $\dim V_i$ dans la représentation régulière qui est de dimension $|G|$.

(5) La représentation régulière est de caractère nul contre tout $g \neq e$.

(6) Notons U la matrice de la table de caractères (les lignes sont indicées par les caractères irréductibles, les colonnes par les classes de conjugaison) et D la matrice diagonale de même dimension où les termes diagonaux sont les $\dim S_i$. À partir de $UDU^* = |G| \text{id}$ nous obtenons $\frac{1}{|G|} D = U^{-1} U^{*-1}$ puis $|G| D^{-1} = U^* U$.

□

9.3.3. Sous-groupes distingués.

Proposition 9. Soit G un groupe fini. Soit $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation de caractère χ sur un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel V de dimension d . Alors

$$\ker \rho = \{g \in G \mid \chi(g) = d\}.$$

Démonstration. L'endomorphisme $\rho(g)$ est diagonalisable, car d'ordre fini, et ses valeurs propres sont d racines de l'unités. La condition $\chi(g) = d$ implique que ces racines de l'unité sont toutes égales à 1 et donc que $\rho(g)$ est l'identité. □

Proposition 10. Soit $H \triangleleft G$ un sous-groupe distingué d'un groupe fini. Alors H est l'intersection de noyaux de représentations irréductibles de G .

Démonstration. Soit $\pi: G \rightarrow G/H$ le morphisme quotient. Soit ρ_H la représentation régulière de G/H . Alors comme la représentation ρ_H est fidèle, H est le noyau de la représentation $\rho_H \circ \pi$. En écrivant $\rho_H \circ \pi$ comme une somme directe de représentations irréductibles nous obtenons le résultat. □

Exemple. En observant la table de caractères nous retrouvons les sous-groupes distingués propres de S_4 : $\mathcal{K}$ et $\mathcal{A}_4$.

9.4. Représentations réelles et groupes d'ordre 8, [CG15, p. 477-482].

On illustre sur le cas de D_8 et $\mathbb{H}_8$ la notion d'indicatrice de FROBENIUS-SCHUR qui permet de repérer qu'une représentation définie a priori sur les complexes est isomorphe à une représentation définie sur les réels.

9.4.1. Table de caractères.

◇ Table de caractères du groupe quaternionique $\mathbb{H}_8$.

Il y a cinq classes de conjugaison qui sont $\pm \text{id}$, $\pm I$, $\pm J$ et $\pm K$ où

$$I = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}$$

Puisque $D(\mathbb{H}_8) = \{1, -1\}$, l'abélianisé $\mathbb{H}_8/D(\mathbb{H}_8)$ de $\mathbb{H}_8$ est isomorphe au groupe de KLEIN, *i.e.* est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il en résulte que $\mathbb{H}_8$ possède quatre caractères de degré 1. Ainsi si ρ_i est une représentation irréductible de $\mathbb{H}_8$ de degré d_i nous avons

◇ d'une part $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 1$,

◇ d'autre part $\sum_{i=1}^5 d_i^2 = 8$.

Par conséquent $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 1$ et $d_5 = 2$.

On obtient la dernière ligne en utilisant que les colonnes sont orthogonales ; la quantité $\frac{1}{|\mathbb{G}|} \sum_g \chi(g^2)$ s'appelle l'indicatrice de FROBENIUS-SCHUR.

	$\{\text{id}\}$	$\{-\text{id}\}$	$\{\pm I\}$	$\{\pm J\}$	$\{\pm K\}$	$\frac{1}{ \mathbb{G} } \sum_g \chi(g^2)$
χ_{triv}	1	1	1	1	1	1
χ_1	1	1	-1	1	-1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1	1
χ_3	1	1	-1	-1	1	1
χ_4	2	-2	0	0	0	-1

◇ Table de caractères du groupe D_8 .

Le groupe de symétries du carré est engendré par une rotation r d'angle $\frac{\pi}{2}$ et une symétrie s . D'après ce qui précède D_8 a 5 classes de conjugaison : $\{\text{id}\}$, $\{r^2\}$, $\{r, r^3\}$, $\{s, r^2s\}$ et $\{rs, r^3s\}$. Le sous-groupe $D(D_8) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\text{id}, -\text{id} = r^2\}$ est distingué dans D_8 et dans le quotient les trois éléments distincts r , s et rs sont d'ordre 2 donc

$$D_8^{\text{ab}} = D_8/D(D_8) = D_8/\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Nous avons donc quatre représentations de dimension 1 correspondant aux quatre morphismes

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^\times;$$

la cinquième doit donc être de dimension 2 (en effet $|D_8| = 8$ donc $|D_8| - (1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2) = 4 = 2^2$). C'est la représentation standard dans $\mathbb{C}^2$ d'où la dernière ligne de la table (que l'on peut aussi obtenir en utilisant que les colonnes sont orthogonales).

Ainsi

	$\{\text{id}\}$	$\{r^2\}$	$\{r, r^3\}$	$\{s, r^2s\}$	$\{rs, r^3s\}$	$\frac{1}{ \mathbb{G} } \sum_g \chi(g^2)$
χ_{triv}	1	1	1	1	1	1
χ_1	1	1	-1	1	-1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1	1
χ_3	1	1	-1	-1	1	1
χ_4	2	-2	0	0	0	1

9.4.2. *Représentation induite sur les matrices symétriques.* Si $\rho: \mathbb{G} \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$ est une représentation de caractère χ , nous obtenons une représentation ρ_{sym} dans l'espace des formes bilinéaires symétriques, que nous identifions à l'espace Sym_n des matrices symétriques, en composant par

$$\text{GL}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \text{GL}(\mathcal{S}_n), \quad P \mapsto (M \mapsto {}^t P^{-1} M P^{-1})$$

Lemme 11 ([CG15]). *Le caractère de la représentation ρ_{sym} est*

$$\Psi: g \mapsto \frac{\chi(g^{-1})^2 + \chi(g^{-2})}{2}$$

Si de plus ρ est irréductible et χ est à valeurs réelles nous avons

$$2\langle \chi_{\text{triv}}, \Psi \rangle - 1 = \frac{1}{|\mathbb{G}|} \sum_{g \in \mathbb{G}} \chi(g^2)$$

où $\langle \chi_{\text{triv}}, \Psi \rangle$ s'interprète comme la dimension de l'espace des formes bilinéaires symétriques $\mathbb{G}$ -invariantes.

Démonstration. Soit $g \in \mathbb{G}$ fixé. On choisit sur $\mathbb{C}^n$ une base qui diagonalise $\rho(g)$ et on note λ_i les valeurs propres de $\rho(g^{-1})$. Sur Sym_n on choisit comme base les matrices $S_{i,j} = E_{i,j} + E_{j,i}$ somme de deux matrices élémentaires, avec $1 \leq i \leq j \leq n$. Alors $S_{i,j}$ est un vecteur propre de ρ_{sym} de valeur propre $\lambda_i \lambda_j$. La trace de $\rho_{\text{sym}}(g)$ est donc

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \lambda_i \lambda_j &= \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i^2 \\ &= \frac{\chi(g^{-1})^2 + \chi(g^{-2})}{2} \end{aligned}$$

Passons à la seconde assertion. D'une part

$$\begin{aligned} 2\langle \chi_{\text{triv}}, \Psi \rangle &= \frac{2}{|\mathbb{G}|} \sum_{g \in \mathbb{G}} \Psi(g) \\ &= \frac{1}{|\mathbb{G}|} \sum_{g \in \mathbb{G}} \chi(g)^2 + \frac{1}{|\mathbb{G}|} \sum_{g \in \mathbb{G}} \chi(g)^2 \\ &= \langle \bar{\chi}, \chi \rangle + \frac{1}{|\mathbb{G}|} \sum_{g \in \mathbb{G}} \chi(g^2) \end{aligned}$$

et d'autre part puisque ρ est irréductible réel $1 = \langle \chi, \chi \rangle = \langle \bar{\chi}, \chi \rangle$. $\square$

9.4.3. Représentations réalisables sur $\mathbb{R}$. Soit $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ une représentation de caractère χ . On dit que ρ se réalise sur $\mathbb{R}$ si ρ est isomorphe à une représentation ρ' qui provient d'une représentation $G \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ via l'injection naturelle $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Si ρ se réalise sur $\mathbb{R}$, alors χ est à valeurs réelles. Par contre la réciproque est fausse ; en effet considérons la représentation de $\mathbb{H}_8$ dans $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ via les matrices I, J, K , les traces sont réelles et pourtant $\mathbb{H}_8$ n'est pas isomorphe à un sous-groupe de $O(2, \mathbb{R})$ (les sous-groupes finis de $O(2, \mathbb{R})$ sont cycliques ou diédraux).

Proposition 12 ([CG15]). *Une représentation irréductible $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est réalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^2) = 1$.*

Démonstration. Nous allons montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) ρ est réalisable sur $\mathbb{R}$;
- (2) il existe une forme bilinéaire symétrique non nulle sur $\mathbb{C}^n$ invariante par G ;
- (3) $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^2) = 1$.

Commençons par montrer que (1) $\Rightarrow$ (2) : un produit scalaire réel invariant (moyennisation) s'étend sur $\mathbb{C}$ en la forme bilinéaire invariante attendue.

Continuons avec (2) $\Rightarrow$ (1) : notons β la forme bilinéaire symétrique non nulle G -invariante. β est non dégénérée car sinon son noyau correspondrait à une sous-représentation propre ce qui est exclu par hypothèse : ρ est supposée irréductible. Par ailleurs par moyennisation du produit standard on sait qu'il existe $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit hermitien G -invariant (disons antilinéaire par rapport à la première variable). Il existe alors $\varphi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ semi-linéaire tel que $\beta(u, v) = \langle \varphi(u), v \rangle$:

$$\langle \varphi(\lambda u), v \rangle = \beta(\lambda u, v) = \lambda \beta(u, v) = \lambda \langle \varphi(u), v \rangle = \langle \bar{\lambda} \varphi(u), v \rangle.$$

L'itéré second φ^2 est linéaire. Vérifions maintenant que sa matrice est hermitienne définie positive :

$$\begin{aligned} \langle \varphi^2(u), v \rangle &= \beta(\varphi(u), v) \\ &= \beta(v, \varphi(u)) \\ &= \lambda \langle \varphi(u), v \rangle \\ &= \langle \bar{\lambda} \varphi(u), v \rangle \end{aligned}$$

et donc également

$$\langle \varphi^2(u), u \rangle = \langle \varphi(u), \varphi(u) \rangle.$$

Montrons que φ est G -invariante :

$$\langle \rho(g)\varphi(u), v \rangle = \langle \varphi(u), \rho(g)^{-1}v \rangle = \beta(u, \rho(g)^{-1}v) = \beta(\rho(g)u, v) = \langle \varphi(\rho(g)u), v \rangle.$$

Ainsi φ^2 est un G -endomorphisme d'une représentation irréductible, par le Lemme de SCHUR nous en déduisons que φ^2 est une homothétie de rapport un réel $\lambda > 0$. Alors φ (vu comme $\mathbb{R}$ -endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$) est annulé par $X^2 - \lambda$ et admet pour valeurs propres $\pm\sqrt{\lambda}$, d'espaces

propres associés $V_{\pm}$. De plus la relation de semi-linéarité $\varphi(\mathbf{i}v) = -\mathbf{i}\varphi(v)$ implique que $\mathbf{i}V_+ = V_-$. En particulier $\dim_{\mathbb{R}} V_+ = \dim_{\mathbb{C}} V$ et le complexifié de V_+ est V : autrement dit V_+ est une réalisation réelle de ρ .

Poursuivons avec (3) $\Rightarrow$ (2) : le Lemme 11 assure que $\langle \chi_{\text{triv}}, \Psi \rangle = 1$. Il en résulte que la multiplicité de la représentation triviale dans la représentation induite par ρ sur les matrices symétriques est 1. Autrement dit il existe une forme bilinéaire invariante par ρ (unique à un facteur multiplicatif près).

Finissons avec (2) $\Rightarrow$ (3) : une forme bilinéaire (symétrique ou non) invariante s'identifie à un morphisme de représentation de V vers V^* (Remarque 13). D'après le Lemme de SCHUR l'espace de tels morphismes est de dimension 1. Ainsi l'espace des formes bilinéaires symétriques invariantes par ρ est ou bien trivial, ou bien de dimension 1. Nous sommes ici dans le second cas et le Lemme 11 assure que ceci équivaut à $\frac{1}{|\mathbf{G}|} \sum \chi(g^2) = 1$. $\square$

Remarque 13. Revenons sur l'assertion « une forme bilinéaire (symétrique ou non) invariante s'identifie à un morphisme de représentation de V vers V^* ».

Notons $\text{Bil}(V)$ les formes bilinéaires sur V et $\text{Hom}(V, V^*)$ les morphismes de représentations de V vers V^* .

Commençons par les identifications sans action en termes matriciels : on choisit une base de $V \simeq \mathbb{C}^n$ et donc également une base duale pour V^* :

- ◊ V s'identifie à l'espace des vecteurs colonne ;
- ◊ le dual $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{C})$ s'identifie à l'espace des vecteurs lignes ;
- ◊ les morphismes dans $\text{Hom}(V, V^*)$ sont codés par des matrices carrées M via

$$x \in V \mapsto {}^t x M \in V^* ;$$

- ◊ les formes bilinéaires dans $\text{Bil}(V)$ sont aussi codées par des matrices M via

$$(x, y) \in V \times V \mapsto {}^t x M y \in \mathbb{C}.$$

Maintenant étudions la compatibilité avec l'action de $\mathbf{G}$. Nous avons quatre représentations à disposition :

- ◊ la représentation initiale $\rho: \mathbf{G} \rightarrow \text{GL}(V)$;
- ◊ la représentation ρ^* induite sur V^* par précomposition par $\rho(g)^{-1}$:

$$\rho^*(g): V^* \rightarrow V^*, \quad {}^t y \mapsto {}^t y \rho(g)^{-1}$$

- ◊ la représentation ρ_{Hom} induite sur $\text{Hom}(V, V^*)$ par précomposition par $\rho(g)^{-1}$ et post-composition par $\rho^*(g)$

$$\rho_{\text{Hom}}(g): \text{Hom}(V, V^*) \rightarrow \text{Hom}(V, V^*), \quad (x \mapsto {}^t x M) \mapsto (x \mapsto {}^t x {}^t \rho(g)^{-1} M \rho(g)^{-1})$$

(en effet on connaît les trois étapes pour construire le terme de droite :

$$x \in V \mapsto \rho(g)^{-1} x \in V \mapsto {}^t x {}^t \rho(g)^{-1} M \in V^* \mapsto \rho^*(g)({}^t x {}^t \rho(g)^{-1} M \rho(g)^{-1}) \in V^*)$$

- ◊ la représentation ρ_{Bil} que nous avons défini sur les formes bilinéaires :

$$\rho_{\text{Bil}}(g): \text{Bil}(V) \rightarrow \text{Bil}(V), \quad M \mapsto {}^t \rho(g) M \rho(g)^{-1}$$

RÉFÉRENCES

- [Ale99] M. Alessandri. *Thème de géométrie*. Dunod, 1999.
- [CG13] P. Caldero and J. Germoni. *Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries. Tome premier*. Calvage et Mounet, 2013.
- [CG15] P. Caldero and J. Germoni. *Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries-Tome 2*. Calvage et Mounet, 2015.
- [Col11] P. Colmez. *Éléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres)*. École Polytechnique, 2011.
- [Pey04] G. Peyré. *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier*. Ellipses, 2004.
- [RW10] J.-P. Ramis and A. Warusfel. *Cours de mathématique vol.1 algèbre et géométrie*. De Boeck, 2010.
- [Szp09] A. Szpirglas. *Mathématiques L3 : Algèbre*. Pearson, 2009.