Leçon 157 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents

Table des matières

1. Dernier rapport du Jury (2019)

Il est indispensable de connaître les polynômes caractéristiques et minimaux d'un endomorphisme nilpotent et de savoir justifier son caractère trigonalisable. Il est bon de savoir expliquer pourquoi l'application induite par un endomorphisme trigonalisable (respectivement nilpotent) sur un sous-espace stable est encore trigonalisable (respectivement nilpotent). L'utilisation des noyaux itérés est fondamentale dans cette leçon, par exemple pour déterminer si deux matrices nilpotentes sont semblables. Il est intéressant de présenter des conditions suffisantes de trigonalisation simultanée ; l'étude des endomorphismes cycliques a toute sa place dans cette leçon. L'étude des nilpotents en dimension 2 débouche naturellement sur des problèmes de quadriques et l'étude sur un corps fini donne lieu à de jolis problèmes de dénombrement. S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi présenter la décomposition de Frobenius, ou des caractérisations topologiques des endomorphismes nilpotents, ou encore des propriétés topologiques de l'ensemble des endomorphismes nilpotents.

2. Quelques commentaires

- ◇ *"Il est bon de savoir expliquer pourquoi l'application induite par un endomorphisme trigonalisable (respectivement nilpotent) sur un sous-espace stable est encore trigonalisable (respectivement nilpotent)."*

  Un endomorphisme est trigonalisable (resp. nilpotent) si et seulement si il admet un polynôme annulateur scindé (resp. un polynôme annulateur de la forme X^m).

Si u appartient à $\mathcal{L}(E)$, si $F \subseteq F$ est stable par u et si P annule u, alors P annule aussi $u_{|F}$.

◇ *"Il est intéressant de présenter des conditions suffisantes de trigonalisation simultanée."*

Les matrices trigonalisables qui commutent sont simultanément trigonalisables.

Mais attention : les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ne commutent pas ! et deux rotations commutent mais ne sont pas simultanément trigonalisables.

◇ *"L'étude des nilpotents en dimension 2 débouche naturellement sur des problèmes de quadriques".*

En dimension 2 la matrice M est nilpotente si et seulement si $\det M = \operatorname{Tr} M = 0$ ce qui donne

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \qquad\qquad a^2 + bc = 0$$

◇ *"S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi présenter la décomposition de Frobenius, ou des caractérisations topologiques des endomorphismes nilpotents, ou encore des propriétés topologiques de l'ensemble des endomorphismes nilpotents."*

Le calcul clé est le suivant (il s'étend pour une matrice triangulaire nilpotente de taille quelconque) :

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a}{b}\, t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi si N est nilpotente alors la matrice nulle est dans l'adhérence de l'orbite de similitude de N. Réciproquement si la matrice nulle est dans l'adhérence de l'orbite de similitude de N, alors par continuité du polynôme caractéristique (qui est donnée par une formule polynomiale en les coefficients de N) on obtient que $P_N(X) = X^n$ le polynôme caractéristique de la matrice nulle.

3. Questions/Réponses

3.1. Questions.

(1) La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle trigonalisable sur $\mathbb{R}$? diagonalisable sur $\mathbb{C}$?

(2) La matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle trigonalisable sur $\mathbb{R}$? diagonalisable sur $\mathbb{C}$?

(3) La matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle trigonalisable sur $\mathbb{R}$? diagonalisable sur $\mathbb{C}$?

(4) Donner un exemple de matrice trigonalisable mais non nilpotente.

(5) La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle nilpotente ?

(6) Donner deux matrices simultanément triangularisables qui ne commutent pas.

(7) Les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sont-elles simultanément trigonalisables ?

(8) Les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sont-elles simultanément trigonalisables sur $\mathbb{R}$?

(9) Comment montre-t-on qu'un polynôme caractéristique scindé implique que la matrice est trigonalisable ?

(10) Quel est le spectre de l'exponentielle de M en fonction de celui de M ?

(11) Montrer que le coefficient en X^{n-2} dans le polynôme caractéristique de M est égal à $\frac{\operatorname{tr}(M)^2 - \operatorname{tr}(M^2)}{2}$.

(12) Montrer que l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables est égal à l'ensemble des matrices trigonalisables.

(13) Soit N une matrice nilpotente ; inverser $\mathrm{Id} + N$.

(14) À quelle condition sur la matrice M a-t-on $\begin{pmatrix} M & M \\ 0 & M \end{pmatrix}$ nilpotente ?

(15) Montrer que deux matrices nilpotentes proportionnelles sont semblables.

(16) Trouver tous les sous-espaces stables d'un bloc de Jordan nilpotent indécomposable J_n.

(17) On considère l'application qui à une matrice associe sa partie nilpotente dans la décomposition de Dunford. Est-elle continue ?

(18) Montrer qu'une matrice est nilpotente si et seulement si la matrice nulle est dans sa classe de conjugaison.

3.2. **Réponses.**

(1) Le polynôme caractéristique de A est X^2, le polynôme minimal de A est X^2, la matrice A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ mais pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

(2) Le polynôme caractéristique de B est X^2+1, le polynôme minimal de B est X^2, la matrice B n'est pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$ mais est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

(3) Le polynôme caractéristique de C est $(X^2+1)^2$, le polynôme minimal de C est $(X^2+1)^2$, la matrice C n'est ni trigonalisable sur $\mathbb{R}$, ni diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

(4) L'identité est une matrice trigonalisable mais non nilpotente.

(5) La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas nilpotente. Rappelons que l'endomorphisme u est nilpotent si et seulement si u est trigonalisable de spectre réduit à $\{0\}$ ([**?**, p. 170]). Le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est $X(X^2+1)$.

(6) Les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont simultanément triangularisables mais ne commutent pas.

(7) Les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ne sont pas simultanément trigonalisables sur $\mathbb{R}$. Rappelons que si les endomorphismes u et v sont simultanément trigonalisables, alors $u+v$ est trigonalisable. La matrice

$$A+B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$ car son polynôme caractéristique X^2+1 n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

(8) Les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ne sont pas simultanément trigonalisables sur $\mathbb{R}$. Rappelons que si les endomorphismes u et v sont simultanément trigonalisables, alors $u \circ v$ est trigonalisable. La matrice

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

n'est pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$ car son polynôme caractéristique $X^2 - X + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

(9) ...

(10) ...

(11) ...

(12) ...

(13) ...

(14) ...

(15) ...

(16) ...

(17) ...

(18) ...

4. Exercice/Éléments de correction

4.1. **Exercice.**

Le sous-espace de $\mathrm{M}(n, \mathbb{k})$ engendré par les matrices nilpotentes.

Soit $\mathbb{k}$ un corps commutatif. Soit $\mathrm{M}(n, \mathbb{k})$ le $\mathbb{k}$-espace vectoriel des matrices de taille $n \times n$. Soit $E_{i,j} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{k})$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui à la ligne i et à la colonne j qui vaut 1. Si $M = (m_{ij})_{1 \le i, j \le n}$ appartient à $\mathrm{M}(n, \mathbb{k})$ on note $\operatorname{tr} M = \sum_{1 \le i \le n} m_{ii}$. Si A appartient à $\mathrm{M}(n, \mathbb{k})$, on note Φ_A l'application définie par $\Phi_A(M) = \operatorname{tr} AM$ pour $M \in \mathrm{M}(n, \mathbb{k})$.

1. Montrer que
$$\Phi \colon \mathrm{M}(n, \mathbb{k}) \to \mathrm{M}(n, \mathbb{k})^*, \qquad A \to \Phi_A$$
est linéaire bijective.
2. Montrer que le sous-espace de $\mathrm{M}(n, \mathbb{k})$ engendré par $\mathrm{GL}(n, \mathbb{k})$ est $\mathrm{M}(n, \mathbb{k})$.
3. Si M appartient à $\mathrm{M}(n, \mathbb{k})$ on note $\widehat{M}$ le $\mathbb{k}$-endomorphisme de $E = \mathbb{k}^n$ dont la matrice dans la base canonique (e_i) de $\mathbb{k}^n$ est égale à M, *i.e.* si $M = (m_{i,j})$ alors $\widehat{M}(e_j) = \sum_i m_{i,j} e_i$.

   Soit $\mathrm{N}(n, \mathbb{k})$ le sous-ensemble des matrices nilpotentes de $\mathrm{M}(n, \mathbb{k})$. Soit $\mathcal{N}_n \subset \mathrm{M}(n, \mathbb{k})$ le sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}(n, \mathbb{k})$ engendré par $\mathrm{N}(n, \mathbb{k})$ et $\mathcal{N}_n^\perp$ son orthogonal dans $\mathrm{M}(n, \mathbb{k})^*$. On veut caractériser $\mathcal{N}_n$.

   Montrer que pour $N \in \mathrm{M}(n, \mathbb{k})$ nilpotente alors $\operatorname{tr} N = 0$ et $N^n = 0$.

(a) Désormais $n > 1$. Montrer alors que $\mathcal{N}_n \neq \mathrm{N}(n, \Bbbk)$.
(b) Montrer que $\mathcal{N}_n^{\perp} \neq \{0\}$.
(c) Soit φ un élément de $\mathcal{N}_n^{\perp} \smallsetminus \{0\}$. Notons $P = (p_{i,j}) \in \mathrm{M}(n, \Bbbk) \smallsetminus \{0\}$ l'unique matrice telle que $\varphi(M) = \operatorname{tr} PM$ pour tout $M \in \mathrm{M}(n, \Bbbk)$. Montrer que $p_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$.
(d) Soit $J = E_{i,i} - E_{i+1,i} + E_{i,i+1} - E_{i+1,i+1}$. Calculer J^2. En déduire que $P = \lambda \mathrm{id} \neq 0$.
(e) Caractériser $\mathcal{N}_n$.

4.2. **Eléments de correction.**

1. Montrons que

$$\Phi \colon \mathrm{M}(n, \Bbbk) \to \mathrm{M}(n, \Bbbk)^*, \qquad\qquad A \to \Phi_A$$

est linéaire bijective.

La linéarité découle de la linéarité de la trace.

Soit $A = \sum_{k,\ell} a_{k,\ell} E_{k,\ell}$ dans $\ker \Phi$. Alors

$$0 = \Phi(A)(E_{i,j}) = \operatorname{tr}(AE_{i,j}) = \sum_{k,\ell} \operatorname{tr}(a_{k,\ell} E_{k,\ell} E_{i,j}) = \sum_{k,\ell} \delta_{k,j} \delta_{\ell,i} a_{k,\ell} = a_{j,i}$$

Ainsi $A = 0$. La surjection découle du fait que $\dim \mathrm{M}(n, \Bbbk) = \dim \mathrm{M}(n, \Bbbk)^*$.

2. Montrons que le sous-espace de $\mathrm{M}(n, \Bbbk)$ engendré par $\mathrm{GL}(n, \Bbbk)$ est $\mathrm{M}(n, \Bbbk)$.

Les matrices suivantes sont inversibles et forment un système libre de n^2 matrices : id, $\mathrm{id} + E_{i,j}$ pour $1 \leq i \neq j \leq n$ et $\mathrm{id} - 2E_{i,i}$ pour $1 \leq i \leq n-1$.

3. Si M appartient à $\mathrm{M}(n, \Bbbk)$ on note $\widehat{M}$ le $\Bbbk$-endomorphisme de $E = \Bbbk^n$ dont la matrice dans la base canonique (e_i) de $\Bbbk^n$ est égale à M, *i.e.* si $M = (m_{i,j})$ alors $\widehat{M}(e_j) = \sum_i m_{i,j} e_i$.

Soit $\mathrm{N}(n, \Bbbk)$ le sous-ensemble des matrices nilpotentes de $\mathrm{M}(n, \Bbbk)$. Soit $\mathcal{N}_n \subset \mathrm{M}(n, \Bbbk)$ le sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}(n, \Bbbk)$ engendré par $\mathrm{N}(n, \Bbbk)$ et $\mathcal{N}_n^{\perp}$ son orthogonal dans $\mathrm{M}(n, \Bbbk)^*$. On veut caractériser $\mathcal{N}_n$.

Montrons que pour $N \in \mathrm{M}(n, \Bbbk)$ nilpotente alors $\operatorname{tr} N = 0$ et $N^n = 0$.

La matrice $N \in \mathrm{M}(n, \Bbbk)$ est nilpotente si et seulement s'il existe $t > 0$ tel que $N^t = 0$ et donc par Cayley-Hamilton si et seulement si son polynôme caractéristique $\chi_N(X) = X^n$. Puisque $-\operatorname{tr} N$ est égal au coefficient de X^{n-1} et que $(-1)^n \det N$ est le terme constant dans $\chi_N(X)$ le résultat suit.

(a) Montrons alors que $\mathcal{N}_n \neq \mathrm{N}(n, \Bbbk)$.
Remarquons que si $n = 1$, on a l'égalité.
Supposons $n > 1$. Considérons $A = E_{2,1} + E_{1,2}$. Alors $A^{2m} = E_{1,1} + E_{2,2}$ dès que $m > 0$. Ainsi A appartient à $\mathcal{N}_n \smallsetminus \mathrm{N}(n, \Bbbk)$.

(b) Montrons que $\mathcal{N}_n^{\perp} \neq \{0\}$.
Pour un sous-espace vectoriel F d'un $\Bbbk$-espace vectoriel E de dimension finie nous avons $\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F$. Ainsi cette égalité n'est possible que si $\mathcal{N}_n = \mathrm{M}(n, \Bbbk)$. Or par linéaritde la trac $\operatorname{tr} \mathcal{N}_n = 0$ ainsi $E_{1,2} \notin \mathcal{N}$.

(c) Soit φ un élément de $\mathcal{N}_n^{\perp} \smallsetminus \{0\}$. Notons $P = (p_{i,j}) \in \mathrm{M}(n, \Bbbk) \smallsetminus \{0\}$ l'unique matrice telle que $\varphi(M) = \operatorname{tr} PM$ pour tout $M \in \mathrm{M}(n, \Bbbk)$. Montrons que $p_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$.
Si $i \neq j$, alors $E_{i,j}^2 = 0$ ainsi $0 = \varphi(E_{i,j}) = \operatorname{tr} PE_{i,j} = p_{j,i}$.

(d) Soit $J = E_{i,i} - E_{i+1,i} + E_{i,i+1} - E_{i+1,i+1}$. Calculons J^2 et montrons que $P = \lambda \mathrm{id} \neq 0$.
Il suffit d'écrire la matrice J et de vérifier que $J^2 = 0$. Alors

$$0 = \varphi(J) = p_{i,i} - p_{i+1,i+1}$$

Il en résuite que $P = p_{1,1}\mathrm{id}$ avec $p_{1,1} \neq 0$ d'après (a).

(e) Caractérisons $\mathcal{N}_n$.
Pour un sous-espace F d'un $\mathbb{k}$-espace vectoriel E de dimension finie on a l'égalité $(F^{\perp})^{\perp} = F$. Par conséquent $\mathcal{N} = \{A \in \mathrm{M}(n, \mathbb{k}) \mid \mathrm{tr}(A) = 0\}$.

5. Développements possibles

- ◇ Cardinal du cône nilpotent
- ◇ Théorème de Lie-Kolchin
- ◇ Réduction de Jordan (par la dualité)
- ◇ Réduction de Jordan d'un endomorphisme nilpotent
- ◇ Théorème de Burnside
- ◇ Topologie des classes de similitude
- ◇ Décomposition de Dunford

5.1. **Démonstration rapide du Lemme des noyaux.** *Référence :* [CG17, p. 111]

Lemme 1 (Lemme des noyaux)**.** *Soit A un endomorphisme d'un $\mathbb{k}$-espace vectoriel E. Soit $P = \prod P_i$ un polynôme annulateur de A dont les facteurs P_i sont deux à deux premiers entre eux.*

Alors $E = \ker P(A) = \oplus \ker P_i(A)$.

Soit $\pi_i \in \mathcal{L}(E)$ le projecteur sur $\ker P_i(A)$ parallèlement aux autres facteurs de la somme directe. Alors π est un polynôme en A.

Démonstration. Soit $Q_i = \prod_{i \neq j} P_j$. Les Q_i sont globalement premiers entre eux ; par conséquent puisque $\mathbb{k}[X]$ est principal l'idéal engendré par les Q_i est l'anneau $\mathbb{k}[X]$ tout entier. En particulier nous avons une relation de Bezout

$$\sum_i U_i Q_i = 1$$

pour certains polynômes U_i de $\mathbb{k}[X]$. En appliquant les deux côtés de cette égalité à A nous obtenons l'égalité

$$\sum_i U_i(A) Q_i(A) = \mathrm{id}$$

entre éléments de $\mathcal{L}(E)$. Soit x un vecteur de E ; en évaluant en x nous obtenons

$$\sum_i U_i(A) Q_i(A)(x) = x.$$

Par définition des Q_i chaque facteur $U_i(A)Q_i(A)(x)$ appartient à $\ker P_i(A)$ ce qui montre que E est la somme des $\ker P_i(A)$.

De plus la somme est directe car si x appartient à $\ker P_k(A) \cap \Big(\sum_{j\neq k} \ker P_j(A)\Big)$ pour un certain indice k, alors pour tout i, $Q_i(A)(x)$ est nul et donc $x = 0$. En effet $Q_k(A)$ annule tout élément de $\sum_{j\neq k} \ker P_j(A)$ et pour $i \neq k$ nous avons $Q_i(A)$ qui annule tout élément de $\ker P_k(A)$.

Pour finir remarquons que $\pi_i = U_i(A)Q_i(A)$ est bien un polynôme en A. □

Remarque 2. On peut écrire la démonstration dans le cas de deux facteurs, les notations sont alors plus légères.

Remarque 3. On peut déduire le cas général par récurrence.

5.2. **Cardinal du cône nilpotent.** Autres leçons concernées :

- ◇ 101. Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
- ◇ 104. Groupes finis. Exemples et applications.
- ◇ 150. Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.
- ◇ 154. Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
- ◇ 190. Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrements.

Référence : [CG15, p. 217]

Théorème 4. *Soit q une puissance d'un nombre premier, $\mathbb{F}_q$ un corps à q éléments et $d \geq 1$. Alors le nombre n_d de matrices nilpotentes dans $\mathrm{M}(d, \mathbb{F}_q)$ est*

$$n_d = q^{d(d-1)}.$$

Lemme 5 (Fitting)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors il existe $n \geq 0$ tel que $E = \ker u^n \oplus \operatorname{im} u^n$ avec $u_{|\ker u^n}$ nilpotent et $u_{|\operatorname{im} u^n}$ inversible.*

Réciproquement si $E = F \oplus G$ avec F, G stables par u et $u_{|F}$ nilpotent, $u_{|G}$ inversible, alors $F = \ker u^n$ et $G = \operatorname{im} u^n$.

Démonstration. Si $u^i(x) = 0$, alors $u^{i+1}(x) = u(u^i(x)) = u(0) = 0$: la suite des noyaux est croissante.

Pour montrer qu'elle est stationnaire à partir d'un certain rang n supposons que $\ker u^i = \ker u^{i+1}$ et montrons qu'alors $\ker u^{i+1} = \ker u^{i+2}$. Remarquons qu'il suffit de montrer que $\ker u^{i+1} \supseteq \ker u^{i+2}$. Si x appartient à $\ker u^{i+2}$, alors $u(x)$ appartient à $\ker u^{i+1} = \ker u^i$ donc x appartient à $\ker u^{i+1}$.

Montrons que $E = \ker u^n \oplus \operatorname{im} u^n$. Le théorème du rang assure qu'il suffit de montrer que $\ker u^n \cap \operatorname{im} u^n = \{0\}$. Soit x dans $\ker u^n \cap \operatorname{im} u^n$. Alors d'une part $u^n(x) = 0$ et d'autre part $x = u^n(y)$. Par suite $u^n(u^n(y)) = 0$. Donc y appartient à $\ker u^{2n} = \ker u^n$ et $x = u^n(y) = 0$.

Rappelons que $F = \ker u^n$ est caractérisé comme l'espace caractéristique de la valeur propre 0. Puisque $\operatorname{im} u^n$ est un supplémentaire les valeurs propres de $u_{|\operatorname{im} u^n}$ sont toutes non nulles ce qui revient à dire que $u_{|\operatorname{im} u^n}$ est inversible. Reste à voir que si G est un supplémentaire invariant sur lequel la restriction de u est inversible, alors $G = \operatorname{im} u^n$. Soit v dans G. Posons $w = (u_{|G})^{-n}(v)$. Alors $w \in G$ et $v = u^n(w)$ appartient à $\operatorname{im} u^n$. Par suite $G \subseteq \operatorname{im} u^n$; de plus $\dim G = \dim \operatorname{im} u^n$ donc $G = \operatorname{im} u^n$. □

Proposition 6. *Nous avons*

$$|\mathrm{GL}(d,\mathbb{F}_q)|\sum_{k=0}^{d}\frac{n_k}{|\mathrm{GL}(k,\mathbb{F}_q)|}=q^{d^2}.$$

Par convention $n_0=|\mathrm{GL}(0,\mathbb{F}_q)|=1$.

Démonstration. Notons $m_{k,d}$ le nombre de couples (F,G) où $\mathbb{F}_q^d=F\oplus G$ et $\dim F=k$. Le groupe $\mathrm{GL}(d,\mathbb{F}_q)$ agit transitivement sur l'ensemble de tels couples par

$$A\cdot(F,G)=(A(F),A(G))$$

et le stabilisateur d'un couple est isomorphe à $\mathrm{GL}(k,\mathbb{F}_q)\times\mathrm{GL}(d-k,\mathbb{F}_q)$. Ainsi

$$m_{k,d}=\frac{|\mathrm{GL}(d,\mathbb{F}_q)|}{|\mathrm{GL}(k,\mathbb{F}_q)|\cdot|\mathrm{GL}(d-k,\mathbb{F}_q)|}.$$

Par ailleurs un couple (F,G) étant fixé $n_k\cdot|\mathrm{GL}(d-k,\mathbb{F}_q)|$ matrices admettent ce couple comme décomposition de Fitting (on utilise ici la "partie unicité" du Lemme). Le nombre de matrices de taille $d\times d$ à coefficients dans $\mathbb{F}_q$ est q^{d^2} ; par conséquent en dénombrant les décompositions de Fitting on obtient

$$q^{d^2}=\sum_{k=1}^{d}m_{k,d}\cdot n_k\cdot|\mathrm{GL}(d-k,\mathbb{F}_q)|=|\mathrm{GL}(d,\mathbb{F}_q)|\sum_{k=0}^{d}\frac{n_k}{|\mathrm{GL}(k,\mathbb{F}_q)|}$$

□

Démonstration du Théorème. D'après la Proposition

$$n_d+|\mathrm{GL}(d,\mathbb{F}_q)|\sum_{k=0}^{d-1}\frac{n_k}{|\mathrm{GL}(k,\mathbb{F}_q)|}=q^{d^2}$$

et aussi (pour les matrices de tailles $(d-1)\times(d-1)$

$$|\mathrm{GL}(d-1,\mathbb{F}_q)|\sum_{k=0}^{d-1}\frac{n_k}{|\mathrm{GL}(k,\mathbb{F}_q)|}=q^{(d_1)^2}.$$

Il s'en suit que

$$\begin{aligned}n_d &= q^{d^2}-\frac{|\mathrm{GL}(d,\mathbb{F}_q)|}{|\mathrm{GL}(d-1,\mathbb{F}_q)|}\,|\mathrm{GL}(d-1,\mathbb{F}_q)|\sum_{k=0}^{d-1}\frac{n_k}{|\mathrm{GL}(k,\mathbb{F}_q)|}\\ &= q^{d^2}-q^{(d-1)^2}\,\frac{|\mathrm{GL}(d,\mathbb{F}_q)|}{|\mathrm{GL}(d-1,\mathbb{F}_q)|}\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}|\mathrm{GL}(d,\mathbb{F}_q)| &= (q^d-1)(q^d-q)(q^d-q^2)\dots(q^d-q^{d-1})\\ &= (q^d-1)q(q^{d-1}-1)q(q^{d-1}-q)\dots q(q^{d-1}-q^{d-2})\\ &= (q^d-1)q^{d-1}(q^{d-1}-1)(q^{d-1}-q)\dots(q^{d-1}-q^{d-2})\end{aligned}$$

Finalement

$$n_d = q^{d^2} - q^{(d-1)^2+d-1}(q^d - 1) = q^{d^2} - q^{d^2} + d^{(d-1)^2+d-1} = q^{d(d-1)}.$$

□

Remarque 7. Le cas des matrices de taille 2×2 peut se traiter directement : une matrice M de $\mathrm{M}(2, \Bbbk)$ est nilpotente si et seulement si son polynôme caractéristique est X^2, autrement dit si et seulement si $\det M = \operatorname{tr} M = 0$. Ainsi M est nilpotente si et seulement s'il existe a, b et c dans $\Bbbk$ tels que

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \qquad\qquad \& \ a^2 + bc = 0.$$

Si $\Bbbk$ est un corps fini à q éléments il s'agit donc de compter les points sur la conique affine d'équation $a^2 + bc = 0$ et on trouve

- ⋄ q telles matrices avec $b = 0$ ($a = 0$ et c arbitraire) ;
- ⋄ $q(q-1)$ telles matrices avec $b \neq 0$ ($q-1$ choix pour b et q choix pour a)

soit q^2 possibilités comme attendu.

5.3. **Théorème de Lie-Kolchin.**

- ⋄ 106. Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.
- ⋄ 150. Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.
- ⋄ 154. Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Référence : [CG17, Exercice IV-B6]

Désignons par $D(\mathrm{G})$ le groupe dérivé d'un groupe G, *i.e.* le groupe engendré par les commutateurs $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$, avec g, $h \in \mathrm{G}$, de G. Soit $D^2(\mathrm{G})$ le groupe dérivé de $D(\mathrm{G})$ et plus généralement soit $D^k(\mathrm{G})$ le groupe dérivé de $D^{k-1}(\mathrm{G})$.

Rappelons qu'un groupe G est résoluble si $D^\ell(\mathrm{G}) = \{\mathrm{id}\}$ pour un certain entier ℓ que l'on choisit ici minimal. On dit aussi qu'un groupe G est résoluble lorsqu'il existe une suite finie G_0, G_1, …, G_n de sous-groupes de G telle que

$$\{\mathrm{id}\} = \mathrm{G}_0 \triangleleft \mathrm{G}_1 \triangleleft \ldots \triangleleft \mathrm{G}_{n-1} \triangleleft \mathrm{G}_n = \mathrm{G}$$

où pour tout $0 \leq i \leq n-1$ le groupe G_i est un sous-groupe normal de G_{i+1} et le groupe quotient $\mathrm{G}_{i+1}/\mathrm{G}_i$ est abélien.

Théorème 8 (Théorème de Lie-Kolchin)**.** *Soit* G *un sous-groupe résoluble connexe de* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. *Alors* G *est conjugué à un sous-groupe du groupe des matrices triangulaires de* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

Remarque 9. Si les groupes résolubles généralisent les groupes abéliens, alors le théorème de Lie-Kolchin généralise le fait qu'une famille de matrices qui commutent est simultanément trigonalisable à la différence près que ce théorème demande expressément d'avoir un groupe.

Notons donc G_k, $0 \leq\leq \ell$, les sous-groupes comme ci-dessus. Supposons G non abélien ; en effet si G est abélien, on utilise le fait qu'une famille de matrices qui commutent deux à deux sont simultanément trigonalisables sur $\mathbb{C}$.

- ◇ Montrons que $D^k(\mathrm{G})$ est un sous-groupe distingué connexe de G et que le groupe quotient $D^{k-1}(\mathrm{G}) / D^k(\mathrm{G})$ est abélien pour tout k.

  Tout groupe dérivé d'un groupe donné G est distingué : par construction il est stable par tout automorphisme de G donc en particulier stable par automorphisme intérieur.

  Comme G est connexe, $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$ est également connexe. De plus la partie génératrice

  $$X = \{[g, h] \mid g,\, h \in \mathrm{G}\}$$

  de $D(\mathrm{G})$ qui est l'image de $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$ par le commutateur est également connexe. D'après [CG17, II-F5] le groupe dérivé $D(\mathrm{G})$ est connexe. Par récurrence on obtient que $D^k(\mathrm{G})$ est connexe.

  Le groupe dérivé de $D^{k-1}(\mathrm{G})$ est $D^k(\mathrm{G})$; par suite par passage au quotient le groupe dérivé de $D^{k-1}(\mathrm{G}) / D^k(\mathrm{G})$ est $D^k(\mathrm{G}) / D^k(\mathrm{G}) = \{\mathrm{id}\}$. Mais cela signifie que tous les commutateurs de $D^{k-1}(\mathrm{G}) / D^k(\mathrm{G})$ sont triviaux, autrement dit que $D^{k-1}(\mathrm{G}) / D^k(\mathrm{G})$ est abélien.

- ◇ Posons $\mathrm{A} = D^{\ell-1}(\mathrm{G})$. Montrons que A est abélien, non trivial puis que l'ensemble

  $$V = \{v \in \mathbb{C}^n \mid \mathrm{A}v \in \mathbb{C}v\}$$

  est non trivial.

  Par minimalité de ℓ, le groupe A est non trivial. Puisque le groupe dérivé de A est trivial, $D^{\ell-1}(\mathrm{G})$ est abélien. Sur $\mathbb{C}$ les matrices de $D^{\ell-1}(\mathrm{G})$ sont simultanément trigonalisables. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base qui les trigonalise toutes. Nous avons alors : e_1 appartient à V.

- ◇ Soit v non nul dans V. Pour $a \in \mathrm{A}$ posons $\chi_v(a)$ le complexe tel que $a(v) = \chi_v(a)v$. Montrons que pour tout g dans G, $g(v)$ est encore dans V et que $\chi_{g(v)}(a) = \chi_v(g^{-1}ag)$ pour tout a dans A.

  Nous avons

  $$a(g(v)) = g\big((g^{-1}ag)(v)\big) = g\big(\chi_v(gag^{-1})v\big) = \chi_v(gag^{-1})g(v)$$

  d'où l'assertion.

- ◇ En utilisant la connexité de G montrer que si v est un vecteur propre de a pour la valeur propre λ, alors $g(v)$ est un vecteur propre de a pour la valeur propre λ.

  Notons que comme v est non nul, $g(v)$ est également non nul. Nous avons vu que $g(v)$ est vecteur propre pour tout élément a de A. L'application de G dans $\mathbb{C}^*$ qui envoie g sur $\chi_v(g^{-1}ag)$ est continue ; en effet elle est la composée de $g \mapsto gag^{-1}$ qui est continue avec l'application χ_v qui est continue sur le stabilisateur de la droite $\mathbb{C}v$.

  Ainsi l'image de G est un connexe. Comme $\chi_{g(v)}(a) = \chi_v(g^{-1}ag)$ cette image est dans l'ensemble discret des valeurs propres de a. Par conséquent $\chi_{g(v)}(a)$ n'a qu'une valeur quand g varie, celle atteinte pour $g = e$, c'est-à-dire λ.

- ◇ Soit v non nul dans V et soit W le sous-espace engendré par les $g(v)$, $g \in \mathrm{G}$. Montrons que W est un sous-espace G-stable de dimension $0 < \dim W < n$.

  Le sous-espace W est défini par un système de générateurs G-stable, il est donc G-stable. Par ailleurs il contient v qui est non nul ; ainsi W est non nul.

  Reste à montrer que $W \neq \mathbb{C}^n$. Soit a quelconque dans A. Alors pour tout g dans G $g(v)$ est un vecteur propre pour a pour la même valeur propre. Il s'en suit que W est un sous-espace propre pour a. Raisonnons par l'absurde, *i.e.* supposons que $W = \mathbb{C}^n$. Alors tout a est un homothétie et A est un sous-groupe constitué d'homothéties. Puisque G est non abélien, $\ell > 1$ et A est le groupe dérivé d'un groupe, en l'occurence le groupe d'érivé de $D^{\ell-2}(\mathrm{G})$. Ainsi le déterminant d'un élément de A est 1. Comme toutes les matrices de A sont scalaires ces scalaires sont forcément des racines de l'unité. Or comme nous l'avons vu A est connexe donc A est trivial : contradiction avec la minimalité de ℓ.
- ◇ Montrons en utilisant une récurrence sur n qu'il existe une base de trigonalisation commune à tous les g de G.

  Pour $n = 1$ c'est clair.

  Pour n quelconque nous avons obtenu un sous-espace W de dimension k, $1 \leq k \leq n-1$. Soit W' un supplémentaire de W dans $\mathbb{C}^n$. En choisissant une base adaptée à la décomposition $\mathbb{C}^n = W \oplus W'$ nous constatons que g est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \rho(g) & \zeta(g) \\ 0 & \rho'(g) \end{pmatrix}$. De plus vue comme fonction ρ (resp. ρ') est un morphisme continu de G dans $\mathrm{GL}(W)$ (resp. $\mathrm{GL}(W')$). Par récurrence il existe une base de W et une base de W' qui trigonalisent simultanément les $\rho(g)$ et $\rho'(g)$. Nous obtenons une base qui trigonalise tous les g de G en concaténant ces deux bases.

5.4. **Classification des matrices nilpotentes via les diagrammes de Young.** Autres leçons concernées :
- ◇ 151. Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.
- ◇ 154. Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Référence : [CG17, p. 92]

Références

[CG15] P. Caldero and J. Germoni. *Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries-Tome 2.* Calvage et Mounet, 2015.

[CG17] P. Caldero and J. Germoni. *Nouvelles Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries.* Calvage et Mounet, 2017.