Leçon 160 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie)

Table des matières

1. Dernier rapport du Jury (2019)

Dans cette leçon, le caractère euclidien de l'espace est essentiel pour que l'endomorphisme soit remarquable. Le théorème spectral pour les auto-adjoints et la réduction des endomorphismes orthogonaux sont des résultats incontournables. Le jury met les candidats en garde sur le fait que le lemme des noyaux ou la décomposition de Dunford ne sont pas des développements adaptés à cette leçon. En revanche, l'utilisation du fait que l'orthogonal d'un sous-espace stable par un endomorphisme est stable par l'adjoint doit être mis en valeur. De même la réduction d'endomorphismes normaux peut être évoquée. L'étude des projections orthogonales (en lien avec le calcul de distances), des rotations, des réflexions, des renversements, etc. fournit des exemples dignes d'intérêt. Une illustration pertinente peut s'appuyer sur la description de problèmes de moindres carrés en faisant ressortir le rôle de l'hypothèse de rang plein de A sur le caractère inversible de $A^{\mathrm{t}}A$.

2. Remarques

Il convient en préambule de donner le contexte : un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

- Dans une première partie donner les définitions élémentaires de rigueur : définition de l'adjoint, d'un endomorphisme symétrique (ou auto-adjoint), d'un endomorphisme antisymétrique, d'un endomorphisme orthogonal ainsi que l'interprétation matricielle.
- Penser à donner la réduction des endomorphismes symétriques et antisymétriques soit via les multiplicateurs de Lagrange, soit par les sous-espaces stables et le cas de dimension 2, soit par complexification via la réduction des endomorphismes normaux.
- En application on peut citer
  - ◇ la classification des formes quadratiques,
  - ◇ la classification des coniques euclidiennes,
  - ◇ la réduction simultanée : pour A symétrique définie positive et B symétrique il existe P inversible telle que ${}^{\mathrm{t}}PAP = \mathrm{id}$ et ${}^{\mathrm{t}}PBP$ soit diagonale (attention ${}^{\mathrm{t}}P$ n'est pas a priori égale à P^{-1}, il s'agit de réduction simultanée de formes bilinéaires),
  - ◇ l'exponentielle réalise un homéomorphisme des symétriques sur les symétriques définies positives.
- Penser à étudier le groupe orthogonal en mettant en avant certains des points suivants :
  - ◇ le centre est l'ensemble des $\lambda\mathrm{id}$, où λ est une racine de l'unité ;
  - ◇ description de $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ puis de $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ via les quaternions ;
  - ◇ réduction générale des isométries : on pourra utiliser la réduction des endomorphismes hermitiens et invoquer le fait que deux matrices réelles unitairement semblables sont orthogonalement semblables ;
  - ◇ $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ sont connexes par arcs ;
  - ◇ $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})\times{}^{\mathbb{Z}}\!/_{2\mathbb{Z}}$: en tant que groupe $\mathrm{O}(n,\mathbb{R}) \simeq \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})\rtimes{}^{\mathbb{Z}}\!/_{2\mathbb{Z}}$, le produit pouvant être pris direct seulement en dimension impaire ;
  - ◇ $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal et tout sous-groupe compact maximal est conjugué à $\mathrm{U}(n,\mathbb{R})$;
  - ◇ soit $u \in \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ et soit $F_u = \{x \in E \mid u(x) = x\}$, notons $p_u = n - \dim F_u$. Montrer par récurrence sur p_u que u est le produit d'au plus p_u réflexions. Montrer ensuite que u est le produit d'au moins p_u réflexions.
  - ◇ Montrer que pour $n \geq 3$, tout élément de $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ est produit d'au plus n renversements.
  - ◇ $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ est simple pour $n > 2$;
  - ◇ $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ est l'ensemble des points extrémaux de la boule unité $B = \{a \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n) \mid |a| \leq 1\}$;
  - ◇ pour tout $M \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ $d(M,\mathrm{O}(n,\mathbb{R})) = ||\sqrt{{}^{\mathrm{t}}MM} - \mathrm{id}||_2$;
  - ◇ pour tout n il n'y a pas de sous-groupe coincé entre $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ et $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$;
  - ◇ soit G un sous-groupe de $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$, alors G est fini si et seulement si G est d'exposant fini si et seulement si l'ensemble des traces des éléments de G est fini ;
  - ◇ en général deux rotations engendrent un sous-groupe dense dans $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$.
- Les décompositions classiques avec des applications topologiques :
  - ◇ la décomposition QR : pour tout $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ il existe un unique couple (Q,R) avec Q orthogonale et R triangulaire supérieure à éléments diagonaux dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que $A = QR$;

◇ la décomposition polaire ; $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ (resp. $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})\times\mathbb{R}^{n^2}$ (resp. $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n^2-1})$; $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal ;
◇ décomposition d'Iwasawa ;
◇ décomposition de Cartan ;
◇ l'enveloppe convexe de $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ est la boule unité.

- D'autres thèmes possibles sont les suivants :
  ◇ les déterminants de Gram,
  ◇ une matrice symétrique réelle est algorithmiquement semblable à une matrice tridiagonale,
  ◇ sous-groupes finis de $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$, puis $\mathrm{O}(3,\mathbb{R})$ et enfin $\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$.

3. Questions

(1) Soit G un sous-groupe de $\mathrm{O}(n)$. Le groupe G est fini si et seulement si G est d'exposant fini [1] si et seulement si l'ensemble des traces des éléments de G est fini.

(2) Soient λ_1, λ_2, …, λ_n les valeurs propres d'une matrice complexe $A=(a_{i,j})$. Montrer que A est normale [2] si et seulement si $\displaystyle\sum_{i,j}|a_{i,j}|^2=\sum_i|\lambda_i|^2$.

(3) Soit $O\in\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$. Supposons que son polynôme caractéristique soit $P(X)=X^3+2X^2+2X+1$. Caractériser géométriquement l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ induit par O.

(4) Application de la décomposition polaire : le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})\times\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

(5) Le groupe $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Soit G un groupe compact tel que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})\subset\mathrm{G}\subset\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Suppsons que $M\in\mathrm{G}\setminus\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
a) Rappeler la décomposition de Cartan dans $M_{n,m}(\mathbb{R})$.
b) Montrer en utilisant la décomposition de Cartan qu'il existe une matrice diagonale $D\in\mathrm{G}\setminus\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
c) En considérant les suites D^k, $k\in\mathbb{N}^*$, et D^{-k}, $k\in\mathbb{N}^*$ trouver une contradiction.

(6) Un sous-groupe d'exposant fini de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est fini.

On munit $\mathbb{R}^n$ de la structure euclidienne canonique. On note $||\cdot||$ la norme euclidienne. On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme fonctionnelle $||A||=\max\limits_{||x||=1}||Ax||$.

Soit G un sous-groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Soit $N\geq 1$ un entier. Supposons que $U^N=\mathrm{Id}$ pour tout $U\in\mathrm{G}$.
a) Rappeler le théorème de réduction des éléments de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
b) En déduire que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes (par arcs).
c) Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est compact.

---

1. On dit qu'un groupe est d'exposant fini s'il existe un entier $k\geq 1$ tel que pour tout élément g de G on ait $g^k=1$.
2. Une matrice M est normale si $MM^*=M^*M$ où M^* est la matrice adjointe de M, *i.e.* M^* est la transposée de la matrice conjuguée.

d) Montrer que $||OA|| = ||A||$ si A appartient à $M_n(\mathbb{R})$ et O à $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

e) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $U \in \mathrm{G} \setminus \{\mathrm{id}\}$ nous avons $||U - \mathrm{Id}|| \geq \varepsilon$. En déduire que pour tous U, $U' \in \mathrm{G}$ tels que $U \neq U'$ on a $||U - U'|| \geq \varepsilon$.

f) Conclure que G est fini.

(7) Montrer que pour $n \geq 3$ tout élément de $\mathrm{O}^+(q)$ est produit d'au plus n renversements.

(8) Soient $u \in \mathrm{O}(q)$ et $F_u = \{x \in E \,|\, u(x) = x\}$ et on note $p_u = n - \dim F_u$. Montrer, par récurrence sur p_u, que u est le produit d'au plus p_u réflexions. Montrer ensuite que u est le produit d'au moins p_u réflexions.

4. Réponses

(1) Si G est fini, il est clairement d'exposant fini.

Si G est d'exposant fini, alors tout élément de G est semblable à une matrice diagonale par blocs avec sur la diagonale id_r, $-\mathrm{id}_s$ et des matrices de taille 2, de rotations dont les angles sont alors de la forme $\frac{2k\pi}{n}$ ce qui donne donc un ensemble fini de traces possibles.

Si l'ensemble des traces est fini, considérons Vect(G) le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_n(\mathbb{R})$ engendré par les éléments de G dont on fixe une base g_1, g_2, ..., g_r. Considérons le produit scalaire $(A, B) := \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}AB)$. Notons $a_i(g)$ la composante de g sur g_i, soit $g = \sum_i a_i(g)g_i$. Composons à droite avec g_j^{-1} et prenons la trace. Puisque $g_i^{-1} = {}^{\mathrm{t}}g_j$ nous avons $\mathrm{tr}(g_i g_j^{-1}) = (g_i, g_j)$ et donc

$$\mathrm{tr}(g_i g_j^{-1}) = \sum_i a_i(g)(g_i, g_j).$$

Les g_i étant lináirement indépendants, la matrice M dont les éléments sont les (g_i, g_j) est inversible donc

$$a_i(g) = \sum_j (M^{-1})_g \mathrm{tr}(g g_j^{-1})$$

de sorte que l'on obtient un nombre fini de $a_i(g)$ et donc de g.

(2) Rappelons que $\mathrm{tr}(AA^*) = \sum_{i,j} |a_{i,j}|^2$ est $\mathrm{U}(n)$-invariante de sorte que si A est normale elle est alors unitairement semblable à la matrice diagonale des λ_i d'où le sens direct.

Réciproquement toute matrice complexe est unitairement semblable à une matrice triangulaire T de diagonale formée des λ_i. L'égalité implique alors que les termes qui ne sont pas sur la diagonale sont nuls, *i.e.* que T est diagonale.

(3) Soit $O \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$. Supposons que son polynôme caractéristique soit $P(X) = X^3 + 2X^2 + 2X + 1$. Caractérisons géométriquement l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ induit par O. La dimension étant impaire, 1 ou -1 est racine de P. Remarquons que $P(X) = (X + 1)(X^2 + X + 1)$. Ainsi dans une base orthonormale convenable la matrice de O est un du type

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R\left(\frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix}$$

c'est une symétrie rotation produit commutatif d'une rotation d'axe $\mathbb{R}_{e_1}$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et d'une réflexion orthogonale d'hyperplan $(\mathbb{R}e_1)^{\perp}$.

(4) Montrons que le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Rappelons que la décomposition polaire induit un homéomorphisme de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{Sym}^{++}(n,\mathbb{R})$ [3]. Pour conclure rappelons que l'exponentielle définit un homéomorphisme de $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ dans $\mathrm{Sym}^{++}(n,\mathbb{R})$ et que $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

(5) Soit G un groupe compact tel que $\mathrm{O}(n,\mathbb{R}) \subset \mathrm{G} \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Supposons que M appartienne à $\mathrm{G} \setminus \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$.

a) Rappelons la décomposition de Cartan dans $M_{n,m}(\mathbb{R})$. Supposons que M appartienne à $M_{n,m}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Désignons par r le rang de M. Il existe O_1 dans $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ et O_2 dans $\mathrm{O}(m,\mathbb{R})$ et des réels (uniques) $0 < d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_r$ tels que $M = O_1 D O_2$ avec $D = \displaystyle\sum_{1 \leq i \leq r} d_i E_{i,i}$.

b) Montrons en utilisant la décomposition de Cartan qu'il existe une matrice diagonale $D \in \mathrm{G} \setminus \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$.

Par la décomposition de Cartan nous avons $M = O_1 D O_2$ où O_1, O_2 sont des éléments de $\mathrm{O}(n,\mathbb{R}) \subset \mathrm{G}$ et D est une matrice diagonale à termes positifs. Ainsi $D = O_1^{-1} M O_2^{-1}$ appartient à $\mathrm{G} \setminus \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$.

c) En considérant les suites $(D^k)_{k\geq 1}$ et $(D^{-k})_{k\geq 1}$ trouvons une contradiction.

D'après b) les suites $(D^k)_{k\geq 1}$ et $(D^{-k})_{k\geq 1}$ sont à valeurs dans G ; puisque G est compact, ces suites sont bornées. Ainsi si $(d_1, \ldots, d_n)$ sont les éléments sur la diagonale de D, nous avons d'une part $0 < d_i \leq 1$ et d'autre part $0 < d_i^{-1} \leq 1$ d'où $d_i = 1$ et finalement $D = \mathrm{Id}$: contradiction.

(6) Soit G un sous-groupe de $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$. Soit $N \geq 1$ un entier. Supposons que $U^N = \mathrm{Id}$ pour tout $U \in \mathrm{G}$.

a) Rappelons le théorème de réduction des éléments de $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$.

Soit O dans $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$. Il existe $P \in \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ telle que POP^{-1} soit un "tableau diagonal" formé de 1, de -1 et de matrices de rotations planes de mesure d'angle ϑ_i avec $0 < \vartheta_i < \pi$.

b) L'application $\det\colon \mathrm{O}(n,\mathbb{R}) \to \{-1,\, 1\}$ est continue et surjective. Par suite $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ a au moins deux composantes connexes.

Montrons que $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ est connexe par arcs. Soit O dans $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$; puisque $\det O = 1$ il existe $P \in \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ telle que POP^{-1} soit un "tableau" diagonal de 1 et de matrices de rotations planes de mesure d'angle ϑ_i avec $0 < \vartheta_i \leq \pi$. Il suffit de considérer le même "tableau" en modifiant les ϑ_i en $t\vartheta_i$ avec $0 \leq t \leq 1$ pour obtenir un chemin continu dans $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ de Id à O.

3.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sym}^{++}(n,\mathbb{R}) &= \left\{ S \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \mid \left\{ \begin{array}{l} {}^{\mathrm{t}}S = S \\ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad {}^{\mathrm{t}}xSx > 0 \end{array} \right. \right\} \\
&= \left\{ P\,{}^{\mathrm{t}}P \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R}) \mid P \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \right\}
\end{aligned}$$

Il en résulte que $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ et $D(-1)\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ sont les composantes connexes de $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$.

c) Montrons que $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ est compact. Puisque $M \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R}) \mapsto M^{\mathrm{t}}M \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ est continue (les coefficients de $M^{\mathrm{t}}M$ sont polynomiaux en ceux de M) le groupe $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$. Comme les colonnes de $O \in \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ sont de norme 1 les coefficients sont en valeur absolue bornés par 1. Par suite $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ est un fermé borné de l'espace vectoriel normé complet $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, il est donc compact.

d) Montrons que $||OA|| = ||A||$ si $A \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ et $O \in \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$. C'est immédiat puisque O est une isométrie (et donc bijective).

e) Montrons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $U \in \mathrm{G} \smallsetminus \{\mathrm{Id}\}$ on ait $||U - \mathrm{Id}|| \geq \varepsilon$. Il existe O dans $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ tel que OUO^{-1} soit un tableau diagonal de 1, de -1 et de matrices de rotations planes d'angle ϑ_i avec $0 < \vartheta_i < \pi$. De plus puisque $U^N = \mathrm{Id}$ nous avons pour $U \neq \mathrm{Id}$ l'inégalité $\frac{2\pi}{N} < \vartheta_i$. Ainsi puisque U appartient à $\mathrm{G} \smallsetminus \{\mathrm{Id}\}$ il existe un vecteur colonne X tel que $||X|| = 1$ et $OUO^{-1}X = -2X$ ou

$$(OUO^{-1} - \mathrm{Id})X = (0, \ldots, 0, 0, -1 + \cos\vartheta_i, -\sin\vartheta_i, 0, 0, \ldots, 0)$$

Dans le premier cas nous avons

$$||U - \mathrm{Id}|| = ||O(U - \mathrm{Id})O^{-1}|| \geq 2$$

et dans le second cas nous avons

$$\begin{aligned} ||U - \mathrm{Id}|| &= ||O(U - \mathrm{Id})O^{-1}|| \\ &\geq \sqrt{(-1 + \cos\vartheta_i)^2 + \sin^2\vartheta_i} \\ &= (2 + 2\cos\vartheta_i) \\ &\geq \sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)} =: \varepsilon \end{aligned}$$

Par suite pour tous U, U' dans G distincts nous avons $||U - U'|| \geq \varepsilon$. En effet pour tous U, U' dans G distincts nous avons $||U - U'|| = ||UU'^{-1} - \mathrm{Id}||$ et UU'^{-1} appartient à $\mathrm{G} \smallsetminus \{\mathrm{Id}\}$.

f) Montrons que G est fini. Recouvrons $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ par les boules ouvertes $B\left(O, \frac{\varepsilon}{4}\right)$. D'après ce qui précède chaque boule contient au plus un élément de G. Nous concluons en utilisant la compacité de $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$.

(7) Le cas $n = 3$ est évident en remarquant que si τ est une réflexion, alors $-\tau$ est un renversement de sorte que le produit de deux réflexions (et donc tout produit d'un nombre pair) est un produit de deux renversements $\tau_1 \circ \tau_2 = (-\tau_1) \circ (-\tau_2)$.

Pour $n \geq 3$, soient τ_1 et τ_2 des réflexions par rapport aux hyperplans H_1 et H_2 et $u = \tau_1 \circ \tau_2$. Soit alors $V \subset H_1 \cap H_2$ un sous-espace de dimension $n - 3$: $u_{|V} = \mathrm{id}$ et $V^{\perp}$ est stable sous u. D'après le cas $n = 3$ on a $u_{V^{\perp}} = \sigma_1 \circ \sigma_2$ où σ_1, σ_2 sont des renversements de $V^{\perp}$. On obtient le résultat en prolongeant les σ_i par l'identité sur V.

(8) On raisonne par récurrence sur p_u le cas $p_u = 0$ correspondant à $u = \mathrm{id}$. Supposons donc $p_u > 0$ et soit $x \in F_u^{\perp}$ non nul et soit $y = u(x) \neq x$ car $x \notin F_u$; on a $y \in F_u^{\perp}$ car

F_u étant stable par u, $F_u^{\perp}$ l'est aussi. De plus comme x et y ont même norme, on en déduit que $(x-y, x+y) = 0$ (triangle isocèle). On considère alors la réflexion τ définie par $x-y$ de sorte que $\tau(x-y) = x-y$ et $\tau(x+y) = x+y$ soit donc $\tau(y) = x$ avec $\tau_{|F_y} = \mathrm{id}$. Ainsi on a $F_u \circ F_{\tau\circ u}$ ce dernier contenant x de sorte que $p_{\tau\circ u} < p_u$ et on conclut par récurrence.

Si u est le produit de r réflexions alors F_u est clairement de dimension supérieure ou égale à $n-r$ (l'intersecion de r hyperplans) soit donc $p_u \leq r$.

5. Développements possibles

- ◇ Groupes de pavages directs du plan (On montre qu'il n'y a que 5 pavages directs possibles du plan).
- ◇ Diagonalisation des endomorphismes autoadjoints.
- ◇ Réduction des endomorphismes normaux (Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme normal (qui commute à son adjoint). Alors il existe une bonne base telle que la matrice de f dans cette base soit presque diagonale par blocs avec des blocs de dimension 1 et des blocs de dimensions 2 spéciaux.)
- ◇ Décomposition polaire, [Caldero, Germoni, Histoires hédonistes de groupes et géométries, tome 1, 202-204]
- ◇ Enveloppe convexe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ (l'enveloppe convexe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est la boule unité fermée de $M_n(\mathbb{R})$ pour la norme $||\cdot||_2$).
- ◇ Simplicité de $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$, [Francinou, Gianella, Nicolas, exercices de mathématiques, oraux x-ens, algèbre tome 3, p. 67-70].

5.1. **Décomposition polaire.**

Référence : [CG17]

Soit n un entier naturel. L'ensemble des matrices symétriques définies positives de taille $n\times n$ est

$$\begin{aligned} \mathrm{S}^{++}(n,\mathbb{R}) &= \left\{ S \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \mid \left\{ \begin{array}{ll} {}^{\mathrm{t}}S = S & \\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} & {}^{\mathrm{t}}xSx > 0 \end{array} \right. \right\} \\ &= \left\{ P\,{}^{\mathrm{t}}P \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R}) \mid P \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \right\} \end{aligned}$$

Remarque 1. L'ensemble des matrices symétriques définies positives forme un système homogène (*i.e.* un espace sur lequel un groupe agit de façon transitive).

Théorème 2 (Théorème de décomposition polaire)**.** *La multiplication matricielle induit l'homéomorphisme*

$$\mathrm{O}(n,\mathbb{R}) \times \mathrm{S}^{++}(n,\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}), \qquad (O,S) \mapsto OS$$

Soient p et q deux entiers naturels. On désigne par $\mathrm{O}(p,q)$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}(p+q,\mathbb{R})$ formé des isométries de la forme quadratique standard sur $\mathbb{R}^{p+q}$ de signature (p,q) c'est-à-dire

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \ldots - x_{p+q}^2$$

dont la matrice dans la base canonique est

$$I_{p,q} = \left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & \dots & 0 & & & & \\
0 & \ddots & \ddots & \vdots & & & & \\
\vdots & \ddots & \ddots & 0 & & \multicolumn{2}{c}{0} & \\
0 & \dots & 0 & 1 & & & & \\
\hline
 & & & & -1 & 0 & \dots & 0 \\
 & & & & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\
 & \multicolumn{2}{c}{0} & & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
 & & & & 0 & \dots & 0 & -1
\end{array}\right)$$

Proposition 3. *Soient p et q deux entiers naturels distincts. Le groupe $\mathrm{O}(p,q)$ est homéomorphe à $\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q) \times \mathbb{R}^{pq}$.*

Démonstration. Soit $M \in \mathrm{O}(p,q) \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ avec $n = p+q$. La décomposition polaire assure l'existence de deux matrices $O \in \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ et $S \in \mathrm{S}^{++}(n,\mathbb{R})$ telles que $M = OS$.

Montrons que O et S appartiennent à $\mathrm{O}(p,q)$. Remarquons que pour cela il suffit de montrer que S appartient à $\mathrm{O}(p,q)$.

Posons $T = {}^{\mathrm{t}}MM$. On peut vérifier que $S^2 = T$. Montrons que $\mathrm{O}(p,q)$ est stable par transposition :

$$\begin{aligned}
M \in \mathrm{O}(p,q) &\Rightarrow MI_{p,q}{}^{\mathrm{t}}M = I_{p,q} \\
&\Rightarrow {}^{\mathrm{t}}M^{-1} I_{p,q} M^{-1} = I_{p,q} \\
&\Rightarrow {}^{\mathrm{t}}M^{-1} \in \mathrm{O}(p,q) \\
&\Rightarrow {}^{\mathrm{t}}M \in \mathrm{O}(p,q)
\end{aligned}$$

On en déduit que $T = {}^{\mathrm{t}}MM \in \mathrm{O}(p,q)$ et donc que $S^2 \in \mathrm{O}(p,q)$. Puisque T est, comme S, définie positive, on peut écrire $T = \exp U$ pour $U \in \mathrm{S}(n,\mathbb{R})$ bien choisie. On a alors

$$\begin{aligned}
T \in \mathrm{O}(p,q) &\Leftrightarrow TI_{p,q}{}^{\mathrm{t}}T = I_{p,q} \\
&\Leftrightarrow {}^{\mathrm{t}}T = I_{p,q}T^{-1}I_{p,q}^{-1} \\
&\Leftrightarrow {}^{\mathrm{t}}\exp(U) = I_{p,q}(\exp U)^{-1}I_{p,q}^{-1} \\
&\Leftrightarrow \exp({}^{\mathrm{t}}U) = I_{p,q}\exp(-U)I_{p,q}^{-1} \\
&\Leftrightarrow \exp({}^{\mathrm{t}}U) = \exp(-I_{p,q}UI_{p,q}^{-1}) \\
&\Leftrightarrow {}^{\mathrm{t}}U = U = -I_{p,q}UI_{p,q}^{-1} \quad (\exp\colon \mathrm{S}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{S}^{++}(n,\mathbb{R}) \text{ est bijective}) \\
&\Leftrightarrow UI_{p,q} + I_{p,q}U = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{U}{2}I_{p,q} + I_{p,q}\frac{U}{2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{{}^{\mathrm{t}}U}{2} = -I_{p,q}\frac{U}{2}I_{p,q}^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T \in \mathrm{O}(p,q) &\Leftrightarrow \exp\left(\frac{{}^{\mathrm{t}}U}{2}\right) = \exp\left(-I_{p,q}\frac{U}{2}I_{p,q}^{-1}\right) \\ &\Leftrightarrow {}^{\mathrm{t}}\exp\left(\frac{{}^{\mathrm{t}}U}{2}\right) = I_{p,q}\exp\left(\frac{U}{2}\right)^{-1} I_{p,q}^{-1} \end{aligned}$$

Or $\exp\left(\frac{U}{2}\right)$ appartient à $\mathrm{S}(n,\mathbb{R})$ et $\exp^2\left(\frac{U}{2}\right) = \exp U = T$. Par suite $\exp\left(\frac{U}{2}\right) = S$ et $SI_{p,q}{}^{\mathrm{t}}S = I_{p,q}$, *i.e.* S appartient à $\mathrm{O}(p,q)$. Enfin $O \in \mathrm{O}(p,q)$. Ainsi la décomposition polaire $M = OS \mapsto (O,S)$ induit une bijection continue

$$\mathrm{O}(p,q) \simeq \big(\mathrm{O}(p,q)\cap\mathrm{O}(n)\big) \times \big(\mathrm{O}(p,q)\cap\mathrm{S}^{++}(n,\mathbb{R})\big).$$

« Étude »de $\mathrm{O}(p,q)\cap\mathrm{O}(n)$: soit $O \in \mathrm{O}(p,q)\cap\mathrm{O}(n)$; on découpe O en blocs

$$0 = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array}\right) \in \mathrm{O}(p,q) \Leftrightarrow \begin{cases} {}^{\mathrm{t}}AA - {}^{\mathrm{t}}BB = I_p \\ {}^{\mathrm{t}}AC - {}^{\mathrm{t}}BD = 0 \\ {}^{\mathrm{t}}CA - {}^{\mathrm{t}}DB = 0 \\ {}^{\mathrm{t}}CC - {}^{\mathrm{t}}DD = -I_q \end{cases}$$

En effet

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} {}^{\mathrm{t}}A & {}^{\mathrm{t}}B \\ {}^{\mathrm{t}}C & {}^{\mathrm{t}}D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} {}^{\mathrm{t}}A & {}^{\mathrm{t}}B \\ {}^{\mathrm{t}}C & {}^{\mathrm{t}}D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ -B & -D \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} {}^{\mathrm{t}}AA - {}^{\mathrm{t}}BB & {}^{\mathrm{t}}AC - {}^{\mathrm{t}}BD \\ {}^{\mathrm{t}}CA - {}^{\mathrm{t}}DB & {}^{\mathrm{t}}CC - {}^{\mathrm{t}}DD \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'autre part nous avons

$$O \in \mathrm{O}(n) \Longleftrightarrow \begin{cases} {}^{\mathrm{t}}AA + {}^{\mathrm{t}}BB = I_p \\ {}^{\mathrm{t}}AC + {}^{\mathrm{t}}BD = 0 \\ {}^{\mathrm{t}}CA + {}^{\mathrm{t}}DB = 0 \\ {}^{\mathrm{t}}CC + {}^{\mathrm{t}}DD = I_q \end{cases}$$

car

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} {}^{\mathrm{t}}A & {}^{\mathrm{t}}B \\ {}^{\mathrm{t}}C & {}^{\mathrm{t}}D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} {}^{\mathrm{t}}AA + {}^{\mathrm{t}}BB & {}^{\mathrm{t}}AC + {}^{\mathrm{t}}BD \\ {}^{\mathrm{t}}CA + {}^{\mathrm{t}}DB & {}^{\mathrm{t}}CC + {}^{\mathrm{t}}DD \end{pmatrix} \end{aligned}$$

À partir de ${}^{\mathrm{t}}BB = 0$ nous obtenons $\mathrm{Tr}\,{}^{\mathrm{t}}BB = 0$. Si on écrit B sous la forme $B = (b_{ij})$ il vient $\displaystyle\sum_{i,j} b_{i,j}^2 = 0$ puis $B = 0$. De même $C = 0$. Par conséquent $A \in \mathrm{O}(p)$ et $D \in \mathrm{O}(q)$. Ainsi

$$\mathrm{O}(p,q)\cap\mathrm{O}(n) = \left\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \mid A \in \mathrm{O}(p),\, D \in \mathrm{O}(q)\right\} \simeq \mathrm{O}(p)\times\mathrm{O}(q).$$

Pour la seconde intersection on utilise que
- ⋄ $\exp\colon \mathrm{S}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{S}^{++}(n,\mathbb{R})$ est un homéomorphisme
- ⋄ $\exp\colon L = \big\{U \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R}) \,|\, UI_{p,q} + I_{p,q}U = 0\big\} \to \mathrm{O}(p,q)$

Nous en déduisons l'homéomorphisme

$$\mathrm{S}(n,\mathbb{R}) \cap L \simeq \mathrm{S}^{++}(n,\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(p,q).$$

Or $\mathrm{S}(n,\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ et on peut vérifier que

$$\dim\big(\mathrm{S}(n,\mathbb{R}) \cap L\big) = pq$$

d'où $\mathrm{O}(p,q) \cap \mathrm{S}^{++}(n,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{pq}$.

Finalement nous avons l'homéomorphisme

$$\mathrm{O}(p,q) \simeq \mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q) \times \mathbb{R}^{pq}.$$

□

5.2. **Les groupes** $\mathrm{SU}(2,\mathbb{C})/\{\pm\mathrm{id}\}$ **et** $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ **sont isomorphes.**

Référence : [CG17, p. 232-234]

5.2.1. *Groupes de matrices.* Soit $E = \mathbb{R}^n$ et soit q la forme quadratique canonique $q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$. L'ensemble des éléments f du groupe linéaire $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ tels que $q(f(x)) = q(x)$ pour tout $x \in E$ est un groupe appelé groupe orthogonal standard. Il s'identifie canoniquement au groupe des matrices orthogonales $n \times n$

$$\mathrm{O}(n,\mathbb{R}) = \big\{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \,|\, {}^{\mathrm{t}}\!AA = A\,{}^{\mathrm{t}}\!A = \mathrm{Id}\big\}$$

où ${}^{\mathrm{t}}\!A$ est la matrice transposée de A. Le déterminant d'un élément de $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ appartient à $\big\{1, -1\big\}$. Le sous-groupe $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R}) = \mathrm{O}(n,\mathbb{R}) \cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ des éléments de $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ dont le déterminant est 1 est un sous-groupe de $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$.

Rappelons que le groupe unitaire est

$$\mathrm{U}(n,\mathbb{C}) = \big\{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \,|\, A^*A = AA^* = \mathrm{Id}\big\}$$

où la matrice ajdointe de A est notée A^* (*i.e.* $A^* = {}^{\mathrm{t}}\overline{A}$). Le groupe spécial unitaire est par définition $\mathrm{SU}(n,\mathbb{C}) = \mathrm{U}(n,\mathbb{C}) \cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$; il est formé des matrices unitaires de déterminant 1. Pour $n = 2$ on a

$$\mathrm{SU}(2,\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2,\mathbb{C}) \,|\, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}.$$

Rappelons que le groupe $\mathrm{SU}(2,\mathbb{C})$ est difféomorphe à la sphère $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ via

$$\varphi \colon \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4 \to \mathrm{SU}(2,\mathbb{C}), \qquad (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \mapsto \begin{pmatrix} \alpha + \mathbf{i}\beta & -\gamma + \mathbf{i}\delta \\ \gamma + \mathbf{i}\delta & \alpha - \mathbf{i}\beta \end{pmatrix}.$$

5.2.2. *Définition des quaternions.* On appelle *corps des quaternions*quaternions (corps des) l'algèbre $\mathbb{H}\mathbb{H}$ de dimension 4 sur le corps des réels ayant pour base (1, i, j, k) dans laquelle la multiplication est définie par

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1, \qquad \mathrm{ijk} = -1.$$

L'élément 1 est neutre et la dernière relation signifie

$$\mathrm{ij} = \mathrm{k} = -\mathrm{ji}, \qquad \mathrm{jk} = \mathrm{i} = -\mathrm{kj}, \qquad \mathrm{ki} = \mathrm{j} = -\mathrm{ik}.$$

Remarque 4. Il n'est pas clair que l'algèbre $\mathbb{H}$ est un corps, ni même une algèbre associative. Nous allons le démontrer (Lemme 5 et Corollaire 7) ; à noter que nous pouvons aussi nous en convaincre à l'aide de la représentation matricielle des quaternions.

Nous identifions $\mathbb{R}$ à la sous-algèbre de $\mathbb{H}$ engendrée par 1. Nous notons $\mathbb{I}$ le sous-espace de $\mathbb{H}$ suivant

$$\mathbb{I} = \mathbb{R}\mathrm{i} \oplus \mathbb{R}\mathrm{j} \oplus \mathbb{R}\mathrm{k};$$

ses éléments sont appelés *imaginaires* ou *imaginaires quaternioniques*imaginaires quaternioniques.

Pour $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ et $h = x + y\mathrm{i} + z\mathrm{j} + t\mathrm{k} \in \mathbb{H}$ nous appelons *conjugué*conjugué (quaternionique) de h le quaternion

$$\overline{h} = x - y\mathrm{i} - z\mathrm{j} - t\mathrm{k}$$

Nous appelons *norme* de h le quaternion

$$N(h) = h\overline{h}.$$

Lemme 5. *Soient h, h', h'' dans $\mathbb{H}$. Nous avons :*

(i) $(hh')h'' = h(h'h'')$;
(ii) $h \in \mathbb{R}$ *si et seulement si* $\overline{h} = h$;
(iii) $h \in \mathbb{I}$ *si et seulement si* $h^2 \in \mathbb{R}^-$ *si et seulement si* $\overline{h} = -h$;
(iv) si $h = x + y\mathrm{i} + z\mathrm{j} + t\mathrm{k}$*, alors* $N(h) = h\overline{h} = \overline{h}h = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \in \mathbb{R}$;
(v) $N(hh') = N(h)N(h')$.

Remarque 6. La démonstration est laissée en exercice (il s'agit uniquement de calculs directs). À noter que l'égalité $N(hh') = N(h)N(h')$ prend un relief nouveau une fois vue la réalisation matricielles des quaternions : la norme, dans cette réalisation, n'est autre que le déterminant.

Notons que $q \mapsto N(q)$ est une forme quadratique euclidienne sur $\mathbb{H}$ de forme polaire $\varphi(q_1, q_2) = \frac{1}{2}\big(q_1\overline{q_2} + q_2\overline{q_1}\big)$. La base (1, i, j, k) est orthonormée relativement à N et la conjugaison est une symétrie orthogonale, d'espaces propres $\mathbb{R}$ et $\mathbb{I}$.

Corollaire 7. *L'algèbre $\mathbb{H}$ est un corps non commutatif.*

Démonstration. L'associativité a été « vue » dans le Lemme 5.

Reste a vérifier que tout élément non nul a un inverse : si $h = x + y\mathrm{i} + z\mathrm{j} + t\mathrm{k} \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$, alors

$$h^{-1} = \frac{1}{N(h)}\overline{h}.$$

□

La non-commutativité de l'algèbre des quaternions fait que nous nous intéressons en premier à son centre. Puisque 1 est central dans $\mathbb{H}$, il en est de même de la sous-algèbtre $\mathbb{R}$. En fait la réciproque est vraie.

Proposition 8. *Le centre de $\mathbb{H}$ est réduit à $\mathbb{R}$.*

Démonstration. D'apès l'assertion qui précède il suffit de montrer une seule inclusion.

Soit h dans le centre de $\mathbb{H}$. Montrons que h est réel. Posons $h = x + y\mathrm{i} + z\mathrm{j} + t\mathrm{k}$ avec x, y, z et t dans $\mathbb{R}$. Alors les égalités $h\mathrm{i} = \mathrm{i}h$, $h\mathrm{j} = \mathrm{j}h$ et $h\mathrm{k} = \mathrm{k}h$ donnent par identification $y = -y$, $z = -z$ et $t = -t$. Ainsi $h = x$ est réel. □

Donnons maintenant la réalisation matricielle complexe des quaternions. Considérons dans $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ les sous-groupes $\mathbb{R}^{+*} = \mathbb{R}^{+*}\mathrm{Id}$ et $\mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$:

$$\mathrm{SU}(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2, \mathbb{C}) \,|\, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}.$$

Leur intersection est triviale et ils commutent entre eux. Le groupe engendré par ces deux sous-groupes de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ est isomorphe à leur produit direct topologique

$$H^* \simeq \mathbb{R}^{+*} \times \mathrm{SU}(2, \mathbb{C}).$$

Nous définissons alors $H = H^* \cup \{0\}$ de sorte que

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2, \mathbb{C}) \,|\, a,\, b \in \mathbb{C} \right\}$$

En tant qu'espace vectoriel réel H est de dimension 4 et admet pour base

$$\mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi si x, y, z, $t \in \mathbb{R}$ et si $a = x + \mathbf{i}y$ et $b = -z + \mathbf{i}t$, alors un élément typique de H s'écrit

$$h = x\mathrm{id} + yI + zJ + tK = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$$

Nous pouvons vérifier que H est un corps non commutatif isomorphe à $\mathbb{H}$. Dans cette réalisation l'anti-automorphisme de conjugaison $\bar{\ }$: $h \mapsto h^*$ s'identifie à l'adjoinction des matrices et la norme multiplicative d'un élément h est

$$N(h) = h\overline{h} = \overline{h}h = |a|^2 + |b|^2 = \det h.$$

5.2.3. *L'isomorphisme.*

Théorème 9. *Les groupes* $\mathrm{SU}(2, \mathbb{C})/_{\{\pm\mathrm{id}\}}$ *et* $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ *sont isomorphes :*

$$\mathrm{SU}(2, \mathbb{C})/_{\{\pm\mathrm{id}\}} \simeq \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$$

Lemme 10. *Les retournements, i.e. les rotations d'angle π, engendrent* $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$.

Démonstration. Tout élément de $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ est la composition d'un nombre pair de réflexions. Il suffit donc de montrer que la composée de deux réflexions est une composée de deux retournements.

Soient x et y deux points de $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}$. On désigne par τ_x et τ_y les réflexions respectives par rapport à $x^\perp$ et $y^\perp$. On a

$$\tau_x \circ \tau_y = (-\tau_x) \circ (-\tau_y)$$

et $-\tau_x$ et $-\tau_y$ sont des retournements. $\square$

Démonstration du Théorème 9. Rappelons que

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{C}) \,|\, a,\, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 dont la base canonique est $\big\{\mathrm{id},\, I,\, J,\, K\big\}$ où

$$I = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant correspond à la norme au carrée $N\colon h \mapsto h\overline{h}$ donc au produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^4$; du point de vue matriciel $\overline{h}$ correspond à la transposée conjuguée.

Le sous-espace

$$\mathbb{I} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{C}) \,|\, a \in \mathbf{i}\mathbb{R},\, b \in \mathbb{C} \right\}$$

des quaternions imaginaires purs est l'orthogonale de $\mathbb{R} = \mathbb{R}\mathrm{id}$; il s'identifie à $\mathbb{R}^3$.

Notons que $\mathrm{SU}(2,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{S}^3$ agit sur $\mathbb{H}$ par automorphismes d'algèbres

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathrm{SU}(2,\mathbb{C}) &\to \mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \\ h &\mapsto \varphi_h\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H} \\ &\qquad\qquad u \mapsto huh^{-1} \end{aligned}$$

L'application φ_h est linéaire et respecte la norme de $\mathbb{H}$ car $N(huh^{-1}) = N(u)$. Comme id est central dans $\mathbb{H}$ l'action de $\mathrm{SU}(2,\mathbb{C})$ préserve $\mathbb{R}$ et donc préserve son orthogonal $\mathbb{I}$. On peut alors considérer

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathrm{SU}(2,\mathbb{C}) &\to \mathrm{O}(\mathbb{I}) \\ h &\mapsto \varphi_h\colon \mathbb{I} \to \mathbb{I} \\ &\qquad\qquad u \mapsto huh^{-1} \end{aligned}$$

Via le choix d'une base on a un isomorphisme entre les isométries de $\mathbb{I}$ et le groupe orthogonal $\mathrm{O}(3,\mathbb{R})$. On peut donc définir un morphisme encore noté $\varphi\colon \mathrm{SU}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{O}(3,\mathbb{R})$.

Remarquons qu'en fait φ est à valeurs dans $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$; en effet $\mathrm{SU}(2,\mathbb{C})$ est connexe donc $\varphi(\mathrm{SU}(2,\mathbb{C}))$ est contenu dans la composante connexe de l'identité de $\mathrm{O}(3,\mathbb{R})$, à savoir $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$.

Déterminons $\ker\varphi$. Par définition

$$\ker\varphi = \big\{ M \in \mathrm{SU}(2,\mathbb{C}) \,|\, \ M \text{ commute avec } I,\ J \text{ et } K \big\}.$$

Ainsi $\ker\varphi$ correspond à l'intersection du centre de $\mathbb{H}$ (*i.e.* les quaternions réels) avec la sphère unité. Par suite $\ker\varphi = \{\pm\mathrm{id}\}$.

Montrons que φ est surjective. D'après le Lemme 10 il suffit de montrer que tout retournement est dans l'image de φ. Soit h un élément de $\mathbb{S}^3 \cap \mathbb{I} \simeq \mathbb{S}^2$. Considérons

◇ d'une part le retournement r_h de $\mathbb{I} \simeq \mathbb{R}^3$ d'axe $\mathbb{R}h$,

◇ d'autre part la rotation φ_h.

Montrons que $\varphi_h = r_h$:

◇ on a $\varphi_h(h) = hhh^{-1} = h$;

◇ soit $u \in h^\perp$, *i.e.* u tel que $u\overline{h} + h\overline{u} = 0$ car la forme bilinéaire symétrique associée à la norme $N(h) = h\overline{h}$ est

$$\langle h, h'\rangle = \frac{1}{2}\Big(h\overline{h'} + h'\overline{h}\Big).$$

Puisque u et h appartiennent à $\mathbb{I}$ l'égalité $u\overline{h} + h\overline{u} = 0$ se réécrit $-uh - hu = 0$ ou encore $huh^{-1} = -u$ soit $\varphi_h(u) = -u$.

□

5.3. **Simplicité de** $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$**.**

Référence : Francinou, Gianella, Nicolas, exercices de mathématiques, oraux x-ens, algèbre tome 3*, p.* 67-70

Rappelons que $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ est le groupe des rotations de l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^3$. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$. On désigne par G_0 la composante connexe par arcs de id dans G.

Le groupe $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ est une partie de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ muni de sa topologie d'espace normé. Un chemin de G est une application $\gamma\colon [0,1] \to \mathrm{G}$ continue, $\gamma(0)$ est l'origine du chemin et $\gamma(1)$ son extrémité.

Théorème 11. *Le groupe* $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ *est simple.*

Lemme 12. *On considère sur* G *la relation* $\mathcal{R}$ *définie par* $g\mathcal{R}h$ *s'il existe un chemin de* G *d'origine* g *et d'extrémité* h*. Cette relation est une relation d'équivalence.*

Démonstration. Si $g \in \mathrm{G}$, alors $g\mathcal{R}g$ comme on le voit en considérant $\gamma\colon t \mapsto g$.

Si γ est un chemin d'origine g et d'extrémité h, l'application $t \mapsto \gamma(1-t)$ est un chemin d'origine h et d'extrémité g.

Si $g\mathcal{R}h$ et $h\mathcal{R}k$ et si γ (resp. γ') est un chemin de G d'origine g (resp. h) et d'extrémité h (resp. k) l'application $\gamma''\colon [0,1] \to \mathrm{G}$ définie par

$$\gamma''(t) = \begin{cases} \gamma(2t) \text{ si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma'(2t-1) \text{ si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

est un chemin d'origine g et d'extrémité k.

Les classes d'équivalence pour cette relation sont les composantes connexes par arcs de G. □

Lemme 13. G_0 *est un sous-groupe de* G.

Démonstration. Par définition G_0 contient id. Soient g et h deux éléments de G_0. Soit γ (resp. γ') un chemin de G_0 reliant id à g (resp. h). Considérons l'application

$$\gamma''\colon t \mapsto \gamma(t)\big(\gamma'(t)\big)^{-1}.$$

Pour tout $t \in [0,1]$ $\gamma(t)$ et $\gamma'(t)$ appartiennent à G donc $\gamma(t)\gamma'(t)$ appartient à G (en effet G est un sous-groupe de $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$). Enfin l'application $g \mapsto g^{-1}$ est continue sur $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$: si on identifie un élément de $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ à sa matrice dans la base canonique les coefficients de g^{-1} dépendent polynomialement des coefficients de g. De plus $\gamma''(0) = \mathrm{idid} = \mathrm{id}$ et $\gamma''(1) = gh^{-1}$. Ainsi γ'' est un chemin de id à gh^{-1} et gh^{-1} appartient à G_0. Il en résulte que G_0 est un sous-groupe de G. □

Lemme 14. *Si* G *est distingué dans* $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$*, alors* G_0 *est distingué dans* $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$

Démonstration. Soient $g \in \mathrm{G}_0$, γ un chemin de G de id à g et $h \in \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$. Considérons l'application

$$\gamma' \colon [0,1] \to \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) \qquad\qquad t \mapsto h\gamma(t)h^{-1}.$$

Pour tout $t \in [0,1]$ $\gamma(t)$ appartient à G et G étant distingué $h\gamma(t)h^{-1}$ appartient à G. L'application γ est continue de même que la multiplication à gauche ou à droite par un élément de $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$; par conséquent γ' est continue. De plus

$$\gamma'(0) = h\mathrm{id}h^{-1} = \mathrm{id} \qquad\qquad \gamma'(1) = hgh^{-1}.$$

L'application γ' est donc un chemin de id à hgh^{-1} et hgh^{-1} appartient à G_0. Autrement dit G_0 est distingué dans $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$.

□

Lemme 15. *Supposons que* G *soit un sous-groupe de* $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ *connexe par arcs, distingué et non réduit à* $\{\mathrm{id}\}$*. Alors* G *contient une rotation d'angle* π*.*

Démonstration. Si ϑ est l'angle d'une rotation g de $\mathbb{R}^3$ (si on change l'orientation de l'axe de la rotation l'angle est changé en son opposé donc ϑ est défini au signe près), alors il existe une base orthonormale dans laquelle sa matrice est

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si bien que $\mathrm{Tr}\, g = 2\cos\vartheta + 1$ et donc l'application

$$\mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) \to [-1,1] \qquad\qquad g \mapsto \cos\vartheta = \frac{\mathrm{Tr}\, g - 1}{2}$$

est une application continue. Il suffit de montrer que cette application prend la valeur -1 pour avoir une rotation $g \in \mathrm{G}$ d'angle π.

Montrons que G contient une rotation r d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$, alors r^2 sera une rotation de G d'angle π. Par hypothèse G contient un élément g distinct de id. Quitte à considérer g^{-1} on peut supposer qu'une mesure ϑ de son angle appartient à $]0,\pi]$. Si $\cos\vartheta \leq 0$ on pose $s = g$. Si $\cos\vartheta > 0$, alors $\vartheta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Notons N la partie entière de $\frac{\pi}{2\vartheta}$, *i.e.* $N = E\left(\frac{\pi}{2\vartheta}\right)$. Alors

$$N\vartheta \leq \frac{\pi}{2} < (N+1)\vartheta < 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi.$$

En particulier g^{N+1} est une rotation d'angle $(N+1)\vartheta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. On pose alors $s = g^{N+1}$. Ainsi G contient une rotation s d'angle ϑ avec $\cos\vartheta \leq 0$.

Le groupe G étant connexe par arcs il existe un chemin γ de id à s. L'application

$$\varphi\colon [0,1] \to [-1,1] \qquad t \mapsto \frac{\mathrm{Tr}(\gamma(t)) - 1}{2}$$

est continue car Tr et γ le sont. Par ailleurs $\varphi(0) = \cos 0 = 1$ et $\varphi(1) = \frac{\mathrm{Tr}(s)-1}{2} \leq 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure donc l'existence de $t_0 \in [0,1]$ tel que $\varphi(t_0) = 0$. La rotation $r = \gamma(t_0)$ a un angle de $\pm\frac{\pi}{2}$. Par conséquent $R = r^2$ est une rotation d'angle π, *i.e.* un retournement. □

Lemme 16. *Les retournements, c'est-à-dire les rotations d'angle π, engendrent le groupe* $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$.

Démonstration. Tout élément de $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ est la composition d'un nombre pair de réflexions. Il suffit donc de montrer que la composée de deux réflexions est une composée de deux retournements.

Soient x et y deux points de $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}$. On désigne par τ_x et τ_y les réflexions respectives par rapport à $x^\perp$ et $y^\perp$. On a

$$\tau_x \circ \tau_y = (-\tau_x) \circ (-\tau_y)$$

et $-\tau_x$ et $-\tau_y$ sont des retournements. □

Lemme 17. *Supposons que* G *soit un sous-groupe de* $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ *connexe par arcs, distingué et non réduit à* $\{\mathrm{id}\}$. *Alors* $\mathrm{G} = \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$.

Démonstration. D'après le Lemme 15 le groupe G contient un retournement. Puisque G est distingué pour tout g dans $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ gRg^{-1} appartient à G. Par ailleurs $\mathrm{Tr}(gRg^{-1}) = \mathrm{Tr}(R)$ donc gRg^{-1} est aussi un retournement. Si le vecteur u appartient à l'axe Δ de R on a $(gRg^{-1})(g(u)) = g(u)$, c'est-à-dire gRg^{-1} est un retournement d'axe $g(\Delta)$. Étant donnée une droite D de $\mathbb{R}^3$ on peut trouver une rotation g de $\mathbb{R}^3$ telle que $D = g(\Delta)$ en prenant un axe orthogonal à D et Δ et un angle ad hoc (*i.e.* $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ agit transitivement sur les droites de $\mathbb{R}^3$). Le groupe G contient donc tous les retournements. On conclut en invoquant le Lemme 16 qui assure que les retournements engendrent $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$. □

Démonstration du Théorème 11. Soit G un sous-groupe distingué de $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$. Montrons que $\mathrm{G} = \{\mathrm{id}\}$ ou $\mathrm{G} = \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$. Désignons par G_0 la composante connexe par acrs de id. Les Lemmes 13 et 14 assurent que G_0 est un sous-groupe distingué de $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$; par définition G_0 est connexe par arcs. Si $\mathrm{G}_0 \neq \{\mathrm{id}\}$, alors $\mathrm{G}_0 = \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ (Lemme 17) et donc $\mathrm{G} = \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$.

Supposons que $\mathrm{G}_0 = \{\mathrm{id}\}$ et montrons que $\mathrm{G} = \{\mathrm{id}\}$. Remarquons que toutes les composantes connexes par arcs de G sont des singletons ; en effet si g' est dans la composante de g, relié par le chemin γ, alors $t \mapsto g^{-1}\gamma(t)$ est un chemin de G reliant id à $g^{-1}g'$. Par suite $g^{-1}g'$ appartient à $\mathrm{G}_0 = \{\mathrm{id}\}$ et $g' = g$.

Raisonnons par l'absurde : supposons que G contienne un élément g distinct de id. Soit h une rotation quelconque non triviale. Soit ϑ une mesure de l'angle de h. Pour tout $t \in [0,1]$ on désigne par h_t la rotation de même axe et d'angle $t\vartheta$. L'application $t \mapsto h_t$ est continue car elle se traduit matriciellement dans une certaine base orthonormale par

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t\vartheta) & -\sin(t\vartheta) & 0 \\ \sin(t\vartheta) & \cos(t\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'application

$$[0,1] \to \mathrm{G} \qquad\qquad t \mapsto h_t g h_t^{-1}$$

est un chemin de G (car G est distingué) d'origine g et d'extrémité hgh^{-1}. Il s'en suit que hgh^{-1} appartient à la composante connexe par arcs de g. Cette dernière étant réduite à un singleton on obtient $hgh^{-1} = g$. Or si g est une rotation d'axe Δ, hgh^{-1} est une rotation d'axe $h(\Delta)$. Par conséquent $h(\Delta) = \Delta$ ce qui est impossible (une droite ne peut pas être invariante par toutes les rotations de l'espace). □

Références

[CG17] P. Caldero and J. Germoni. *Nouvelles Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries*. Calvage et Mounet, 2017.