

Leçon 171 : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications

TABLE DES MATIÈRES

1. Dernier rapport du Jury (2019)	1
2. Remarques/Commentaires	1
3. Attention	2
4. Les fondamentaux	2
5. Questions/Réponses	3
6. Exercices	3
7. Développements possibles	10
Références	11

1. DERNIER RAPPORT DU JURY (2019)

Dans cette leçon, la loi d'inertie de Sylvester doit être présentée ainsi que l'orthogonalisation simultanée. L'algorithme de Gauss doit être énoncé et pouvoir être expliqué sur une forme quadratique de $\mathbb{R}^3$; le lien avec la signature doit être clairement énoncé et la signification géométrique des deux entiers r et s composant la signature d'une forme quadratique réelle doit être expliquée. La différentielle seconde d'une fonction de plusieurs variables est une forme quadratique importante qui mérite d'être présentée dans cette leçon. La définition et les propriétés classiques des coniques d'un plan affine euclidien doivent être connues. On peut présenter les liens entre la classification des formes quadratiques et celles des coniques ; de même il est intéressant d'évoquer le lien entre le discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et la signature de la forme quadratique $ax^2 + bxy + cy^2$. S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi aller vers la théorie des représentations et présenter l'indicatrice de Schur-Frobenius qui permet de réaliser une représentation donnée sur le corps des réels.

2. REMARQUES/COMMENTAIRES

Une forme quadratique sur un espace vectoriel E de dimension finie est tout simplement une fonction polynomiale homogène de degré 2 en les coordonnées (ce qui ne dépend pas de la base

choisie). En caractéristique différente de 2 les formes quadratiques sont en bijection avec les formes bilinéaires symétriques ; la bijection est donnée par la formule

$$b(x, y) = \frac{1}{2} (q(x + y) - q(x) - q(y))$$

et l'avantage de cette forme polaire est de pouvoir définir une matrice symétrique associée dans une base fixée.

Il y a plusieurs façons d'aborder une forme quadratique q de forme polaire b :

- ◊ par sa matrice symétrique $A = (b(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ dans une base ;
- ◊ par son endomorphisme associé φ via un produit scalaire : $b(u, v) = \langle u, \varphi(v) \rangle$;
- ◊ par sa formule polynomiale explicite (par exemple pour la méthode de Gauss).

Comme d'habitude en algèbre linéaire une matrice symétrique est bien tentante car elle permet de faire des calculs plutôt que des raisonnements. Mais il ne faut jamais oublier que cette matrice n'est que l'ombre d'un objet plus géométrique : la forme quadratique dont elle est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Cette forme quadratique est plus souple et solide à la fois : elle permet de passer à la géométrie et de faire plus aisément des considérations de changements de bases.

3. ATTENTION

- ◊ Ne pas confondre le noyau de la forme quadratique qui est un sous-espace et le cône isotrope qui est un cône. Le premier est inclus dans le second, strictement sauf dans les cas positifs ou négatifs.
- ◊ Ne pas confondre non dégénéré et défini positif.
- ◊ La restriction d'une forme quadratique non dégénérée à un sous-espace F peut être dégénérée. En fait le noyau de cette restriction est égal à $F \cap F^\perp$. En revanche la restriction reste non dégénérée pour un produit scalaire.
- ◊ Même dans le cas non dégénéré l'orthogonal d'un sous-espace F n'est pas toujours en somme directe avec son orthogonal $F^\perp$.
- ◊ Il y a plusieurs classifications des coniques : la classification affine, la classification euclidienne et le groupe des similitudes pour se restreindre au programme et la classification projective.

4. LES FONDAMENTAUX

- ◊ Orbites de congruence pour l'action de $GL(n, \mathbb{R})$ par congruence sur $\text{Sym}(n, \mathbb{R})$ classifiées par la signature (théorème de Sylvester), voir par exemple [CG17, V-1.4.1 (ii), B.3].
- ◊ Les stabilisateurs d'orbites sont les groupes orthogonaux. Forme normale. Groupes $O(p, q)$, voir par exemple [CG17, V-1.4.7].
- ◊ Lien entre réduction et congruence, le théorème d'orthogonalisation simultanée, voir par exemple [CG17, V-5.3, 5.4, 5.5, 5.6].
- ◊ Coniques réelles. Classification affine, classification euclidienne, voir par exemple [CG17, V-6].
- ◊ Le terme d'ordre 2 dans le développement de Taylor d'une fonction $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est une forme quadratique. En cas de singularité cette forme quadratique (en fait sa signature) décide de quel type est cette singularité.

5. QUESTIONS/RÉPONSES

5.1. Questions.

- ◇ Méthode de Gauss.
- ◇ Soient f, g deux formes linéaires sur un espace vectoriel réel E . Montrer que fg est une forme quadratique. Quel est son rang ? Quelle est sa signature ?
- ◇ Pourquoi une matrice symétrique définie positive S peut s'écrire sous la forme $S = {}^tPP$?
- ◇ Peut-on trouver une matrice symétrique non diagonalisable ?
- ◇ Pourquoi une forme quadratique définie est-elle forcément définie positive ou définie négative ?
- ◇ Dessiner les surfaces d'équation $q(u) = k, u \in \mathbb{R}^3, k \in \mathbb{R}^1$.
- ◇ Si une matrice symétrique est définie positive toutes ses sous-matrices principales sont symétriques définies positives.
- ◇ Le théorème de Witt dans le cas réel.
- ◇ Supposons que q soit une forme quadratique sur un espace réel de dimension n de signature (s, t) avec $s + t = n$. Quelle est la dimension d'un sous-espace isotrope maximal ?
- ◇ Quelle est la signature de la forme quadratique $\text{tr}({}^tAA)$ sur l'espace $M(n, \mathbb{R})$? Quelle est la signature de la forme quadratique $\text{tr}(A^2)$ sur l'espace $M(n, \mathbb{R})$? Pourquoi sont-elles bien des formes quadratiques ?
- ◇ Qu'est-ce qu'une classification ?

5.2. Réponses.

- ◇ Pour la méthode de Gauss voir par exemple [CG17, V-1.3.1].
- ◇ Voir par exemple [CG17, V-D.2]
- ◇ Voir par exemple [CG17, V-B.3.7 (iv)]
- ◇ Sur $\mathbb{R}$ non, sur $\mathbb{C}$ par exemple $\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & -1 \end{pmatrix}$.
- ◇ Voir par exemple [CG17, V-D.1]
- ◇ ...
- ◇ Voir par exemple [CG17, V-D. 3]
- ◇ Pour le théorème de Witt dans le cas réel voir par exemple [CG17, V-D.15]
- ◇ La dimension d'un sous-espace isotrope maximal est $\min(s, t)$.
- ◇ Voir par exemple [CG17, V-D.8]
- ◇ C'est se donner une relation d'équivalence (par exemple être égal à changement de base près) et regarder les classes pour cette relation.

6. EXERCICES

6.1. Énoncés.

Exercice 1

Soient

$$q_0: M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, M \mapsto \text{tr}(M^t M) \qquad q: M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, M \mapsto \text{tr}(M^2).$$

- i) Montrer que q_0 est une forme quadratique définie positive.

1. On parle aussi des nappes quadratiques en dimension 3.

- ii) a) Montrer que q est une forme quadratique et expliciter sa forme polaire φ .
- b) Montrer que l'ensemble $\text{Sym}(n, \mathbb{R})$ des matrices symétriques de $M(n, \mathbb{R})$ et l'ensemble $\text{Ant}(n, \mathbb{R})$ des matrices antisymétriques de $M(n, \mathbb{R})$ sont des sous-espaces φ -orthogonaux de $M(n, \mathbb{R})$.
- c) Déterminer la signature de q .

Exercice 2

Montrer l'existence d'une base orthogonale pour toute forme quadratique réelle.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{k}$ de caractéristique différente de 2. Soient q, q' deux formes quadratiques non dégénérées sur E de formes polaires respectives φ et φ' . Désignons par

$$\mathcal{C}_q = \{u \in E \mid q(u) = 0\}$$

le cône isotrope de q .

Supposons qu'il existe u non nul dans $\mathcal{C}_q$.

Le but est de montrer que $\mathcal{C}_{q'} = \mathcal{C}_q$ si et seulement si q et q' sont proportionnelles entre elles.

L'assertion "si q et q' sont proportionnelles entre elles alors $\mathcal{C}_q = \mathcal{C}_{q'}$ " est directe. Intéressons-nous à la réciproque. Supposons que $\mathcal{C}_{q'} = \mathcal{C}_q$. Désignons par H_u (resp. H'_u) l'hyperplan orthogonal à u pour la forme quadratique q (resp. q').

1. Soit v un vecteur non nul de E . Soit $D_{u,v} = \{\alpha u + v \mid \alpha \in \mathbb{k}\}$ la droite affine de direction u "passant par" v .
 - (a) Supposons que v appartienne à H_u . Montrer que $\mathcal{C}_q \cap D_{u,v}$ est égal soit à $D_{u,v}$ si v appartient à $\mathcal{C}_q$, soit à l'ensemble vide si v n'appartient pas à $\mathcal{C}_q$.
 - (b) Supposons que v n'appartienne pas à H_u . Montrer que $\mathcal{C}_q \cap D_{u,v}$ consiste en un point unique que l'on précisera.
2. (a) Dédurre de 1. que $H_u = H'_u$ puis qu'il existe $\lambda_u \in \mathbb{k}^*$ tel que $\varphi'(u, ?) = \lambda_u \varphi(u, ?)$.
 (b) Dédurre de 1.(b) que $q'(v) = \lambda_u q(v)$ pour tout $v \notin H_u$. Comment conclure que q et q' sont proportionnelles lorsque $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$?
3. Montrer que $\varphi'(v, w) = \lambda_u \varphi(v, w)$ pour tout $v, w \notin H_u$. On pourra noter que dans ce cas soit $v + w \notin H_u$, soit $v + 2w \notin H_u$.
4. Montrer que pour tout hyperplan H de E il existe une base $(e_i)_i$ de E telle que $e_i \notin H$ pour tout i puis conclure que q et q' sont proportionnelles.

Exercice 4

Soient q_1 et q_2 deux formes quadratiques sur un espace vectoriel réel E de dimension finie. Supposons que pour tout $x \in E$, nous avons $0 \leq q_1(x) \leq q_2(x)$. Fixons une base de E et désignons par A et B les matrices respectives de q_1 et q_2 dans cette base. Montrons que $\det A \leq \det B$.

Exercice 5

Soit Φ la forme bilinéaire symétrique définie sur $M(n, \mathbb{R})$ par $(A, B) \mapsto \text{tr}(AB)$.

- a) Quelle est la signature de la restriction de Φ au sous-espace des matrices symétriques?

- b) Quelle est la signature de la restriction de Φ au sous-espace des matrices antisymétriques ?
- c) En déduire la signature de Φ .

Exercice 6

Donnons un exemple de deux formes quadratiques non dégénérées φ et ψ sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie telles qu'il n'existe pas de base orthogonale à la fois pour φ et ψ .

Exercice 7

Soit $\mathbb{k}$ le corps $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Considérons la forme quadratique sur $\mathbb{k}^3$ définie par

$$q(x, y, z) = (1 + \sqrt{2})x^2 + 2(1 + \sqrt{2})xy + \sqrt{2}y^2 - 3z^2$$

- a) Montrer que la forme q est équivalente sur $\mathbb{k}$ à la forme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{k}^3$ est la matrice diagonale de valeurs propres $1 + \sqrt{2}$, -1 et -3 .
- b) Montrer que l'équation $q(x, y, z) = 0$ a une solution non triviale dans $\mathbb{R}^3$.
- c) Cette équation a-t-elle une solution non triviale dans $\mathbb{k}^3$?

Exercice 8

Soit q une forme quadratique non dégénérée sur le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $E = \mathbb{R}^n$. Notons $\text{SO}(q)$ le sous-groupe de $\text{GL}(E)$ constitué des isométries (pour la forme q) de déterminant 1. On le munit de la topologie induite par celle de $\text{M}(n, \mathbb{R})$.

- a) On suppose q définie. Montrer que $\text{SO}(q)$ est compact et connexe.
- b) Que se passe-t-il si q n'est plus supposée définie ?

6.2. Éléments de correction.

Éléments de réponse 1

- i) Montrons que q_0 est une forme quadratique définie positive. Soit $\varphi_0: \text{M}(n, \mathbb{R}) \times \text{M}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^t B)$. Si A et B désignent des éléments de $\text{M}(n, \mathbb{R})$, alors

$$\varphi_0(A, B) = \text{tr}(A^t B) = \text{tr}\left({}^t(A^t B)\right) = \text{tr}\left({}^t({}^t B) {}^t A\right) = \text{tr}(B^t A) = \varphi_0(B, A).$$

ce qui démontre que φ_0 est symétrique. De plus si A, B, C appartiennent à $\text{M}(n, \mathbb{R})$ et λ à $\mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} \varphi_0(A + \lambda B, C) &= \text{tr}\left((A + \lambda B)^t C\right) = \text{tr}\left(A^t C + \lambda B^t C\right) \\ &= \text{tr}\left(A^t C\right) + \lambda \text{tr}\left(B^t C\right) = \varphi_0(A, C) + \lambda \varphi_0(B, C). \end{aligned}$$

Par symétrie de φ_0 nous en déduisons que φ_0 est bilinéaire.

Pour $M \in \text{M}(n, \mathbb{R})$ nous avons $q_0(M) = \varphi_0(M, M)$; par suite q_0 est une forme quadratique dont φ_0 est la forme polaire.

Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ un élément de $M(n, \mathbb{R})$. Pour tout $1 \leq i, j \leq n$ notons m'_{ij} le coefficient (i, j) de tM et c_{ij} celui du produit $M {}^tM$. Si $1 \leq i, j \leq n$ nous avons $m'_{ij} = m_{ji}$ et donc

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n m_{ik} m'_{kj} = \sum_{k=1}^n m_{ik} m_{jk}.$$

Par conséquent

$$q_0(M) = \sum_{\ell=1}^n c_{\ell\ell} = \sum_{\ell=1}^n \left(\sum_{k=1}^n m_{\ell k}^2 \right) = \sum_{i,j=1}^n m_{ij}^2$$

ce qui démontre que q_0 est de signature $(n^2, 0)$ donc est définie positive.

ii) a) Montrons que q est une forme quadratique et expliciter sa forme polaire φ .

Considérons

$$\varphi: M(n, \mathbb{R}) \times M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (A, B) \mapsto \text{tr}(AB)$$

Les propriétés de la trace permettent de montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique. Puisque $q(M) = \varphi(M, M)$ pour toute matrice $M \in M(n, \mathbb{R})$ nous avons : q est bien une forme quadratique et φ est sa forme polaire.

b) Montrons que l'ensemble $\text{Sym}(n, \mathbb{R})$ des matrices symétriques de $M(n, \mathbb{R})$ et l'ensemble $\text{Ant}(n, \mathbb{R})$ des matrices antisymétriques de $M(n, \mathbb{R})$ sont des sous-espaces φ -orthogonaux de $M(n, \mathbb{R})$.

Soient $S \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$ et $A \in \text{Ant}(n, \mathbb{R})$. Alors ${}^tS = S$ et ${}^tA = -A$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \varphi(A, S) &= \text{tr}(AS) = \text{tr}(SA) = \text{tr}({}^t(SA)) \\ &= \text{tr}({}^tA {}^tS) = \text{tr}(-AS) = -\text{tr}(AS) = -\varphi(A, S). \end{aligned}$$

Il s'en suit que $\varphi(A, S) = 0$ d'où la φ -orthogonalité de $\text{Sym}(n, \mathbb{R})$ et $\text{Ant}(n, \mathbb{R})$.

c) Déterminons la signature de q .

Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ un élément de $M(n, \mathbb{R})$. Pour $1 \leq i, j \leq n$ notons c_{ij} le coefficient de M^2 situé à la i ème ligne et j ème colonne. Nous avons

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n m_{ik} m_{kj}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} q(M) &= \sum_{\ell=1}^n c_{\ell\ell} = \sum_{\ell=1}^n \left(\sum_{k=1}^n m_{\ell k} m_{k\ell} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n m_{ij} m_{ji} = \sum_{i=1}^n m_{ii}^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_{ij} m_{ji} \end{aligned}$$

Si $1 \leq i < j \leq n$

$$m_{ij} m_{ji} = \frac{(m_{ij} + m_{ji})^2}{4} - \frac{(m_{ij} - m_{ji})^2}{4}$$

d'où

$$q(M) = \sum_{i=1}^n m_{ii}^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(m_{ij} + m_{ji})^2}{4} - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(m_{ij} - m_{ji})^2}{4}$$

Comme $\text{Card}\{i, j \mid 1 \leq i < j \leq n\} = \frac{n(n-1)}{2}$ la signature (s, t) de q vérifie

$$s = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}, \quad t = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Éléments de réponse 2

Soit on applique l'algorithme de Gauss. Soit on raisonne par récurrence :

- si $n = 1$, toute base est orthogonale ;
- supposons que ce soit vrai au rang n . Si $q = 0$ alors c'est bon. Sinon il existe e_{n+1} tel que $q(e_{n+1}) \neq 0$. On définit F le sous-espace engendré par e_{n+1} . $F^\perp$ est le noyau de la forme linéaire $B(e_{n+1}, \cdot)$, il est donc de dimension n . Si F était isotrope, on aurait $F \subset F^\perp$. Or $q(e_{n+1}) = B(e_{n+1}, e_{n+1}) \neq 0$: contradiction. Ainsi F est non isotrope et $F \oplus F^\perp = E$. En appliquant l'hypothèse de récurrence à $F^\perp$ on obtient le résultat voulu.

Éléments de réponse 3

1. Puisque $q(u) = 0$ nous avons

$$q(\alpha u + v) = \alpha^2 q(u) + 2\alpha \varphi(u, v) + q(v) = 2\alpha \varphi(u, v) + q(v).$$

- (a) Comme v appartient à H_u on sait que $\varphi(u, v) = 0$. La formule ci-dessus prouve que $q(\alpha u + v) = q(v)$. Nous en déduisons que si $q(v) = 0$ alors $D_{u,v} \subset \mathcal{C}_q$ et que sinon $D_{u,v} \cap \mathcal{C}_q = \emptyset$.
- (b) Si v n'appartient pas à H_u , alors $\varphi(u, v) \neq 0$. Nous obtenons que

$$0 = q(\alpha u + v) = 2\alpha \varphi(u, v) + q(v).$$

En caractéristique différente de 2 la seule intersection est $\alpha_0 u + v$ pour $\alpha_0 = -\frac{q(v)}{2\varphi(u,v)}$.

2. (a) D'après 1. on constate que v appartient à H_u si (voir 1.(b)) et seulement si (voir 1.(a)) $\mathcal{C}_q \cap D_{u,v}$ est une droite ou l'ensemble vide. Comme $\mathcal{C}_q = \mathcal{C}_{q'}$ il est équivalent de dire que v appartient à H'_u . Ainsi $H_u = H'_u$.

Dans E^* posons $\varphi_u = \varphi(u, ?)$ de sorte que H_u est l'anté-orthogonal de φ_u . Dans E^* posons $\varphi'_u = \varphi'(u, ?)$ de sorte H'_u est l'anté-orthogonal de φ'_u . Plus précisément

$$H_u = \{x \mid \varphi_u(x) = 0\}$$

et

$$H'_u = \{x \mid \varphi'_u(x) = 0\}.$$

Par suite

$$\mathbb{K}\varphi_u = H_u^\perp = H'^{\perp}_u = \mathbb{K}\varphi'_u$$

d'où l'existence de λ_u qui est non nul.

(b) Par hypothèse $\mathcal{C}_q \cap D_{u,v} = \mathcal{C}_{q'} \cap D_{u,v}$. Si v n'appartient pas à H_u , alors d'après 1.(b)

$$-\frac{q'(v)}{2\varphi'(u,v)} = -\frac{q(v)}{\varphi(u,v)}$$

Nous obtenons l'assertion demandée en utilisant $\varphi'(u,v) = \lambda_u \varphi(u,v)$.

Dans les cas $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ nous avons $q'(v) = \lambda_u q(v)$ sur le complémentaire de H_u qui est dense² dans E . Par continuité des formes quadratiques l'égalité a lieu sur tout E .

3. Soient v et w deux éléments qui n'appartiennent pas à H_u .

Commençons par remarquer que soit $v + w$ n'appartient pas à H_u , soit $v + 2w$ n'appartient pas à H_u . Supposons que $v + w$ appartienne à H_u . Si $v + 2w$ appartient à H_u , alors $w = (v + 2w) - (v + w)$ appartient à H_u : contradiction.

Nous allons maintenant distinguer les deux cas : $v + w \in H_u$ et $v + w \notin H_u$.

— Si $v + w$ n'appartient pas à H_u , alors on peut utiliser la formule classique

$$2\varphi(v,w) = q(v+w) - q(v) - q(w)$$

et 2.(b) pour obtenir le résultat demandé.

— Si $v + w$ appartient à H_u , alors d'après ce qui précède $v + 2w$ n'appartient pas à H_u et nous utilisons

$$4\varphi(v,w) = q(v+2w) - q(v) - 4q(w)$$

pour conclure.

4. Soit H un hyperplan de E . Construisons la base $(e_i)_i$. Fixons une base $(e'_i)_i$ de E ; soit H' l'hyperplan d'équation $\sum_i x'_i = 0$ dans cette base. Clairement H' ne contient aucun des vecteurs e'_i . Soit g dans $\text{GL}(E)$ qui envoie H' sur H . Posons $e_i = g(e'_i)$ pour tout i .

Posons $H = H_u$. D'après 3. dans la base $(e_i)_i$ ainsi construite les matrices de φ et φ' sont proportionnelles. Par conséquent φ' et φ sont proportionnelles.

Éléments de réponse 4

Si q_1 n'est pas définie, alors $\det A = 0$ et le résultat est clair puisque B est positive ; on peut donc supposer q_1 définie positive, ce qui permet d'utiliser le théorème de réduction simultanée : il existe P inversible avec ${}^tPAP = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ et ${}^tPBP = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$, les a_i et les b_i étant des réels positifs. L'hypothèse $q_1(x) \leq q_2(x)$ (appliquée aux vecteurs de la base de diagonalisation) donne $a_i \leq b_i$ pour tout i , donc $a_1 a_2 \dots a_n \leq b_1 b_2 \dots b_n$, d'où on déduit immédiatement $\det A \leq \det B$ étant donné que $(\det P)^2$ est un réel positif.

Éléments de réponse 5

a) Si A est symétrique, soient a_1, a_2, a_n ses valeurs propres (non nécessairement distinctes) qui sont réelles étant donné que A est diagonalisable. Alors $\Phi(A) = \sum_{i=1}^n a_i^2$ est positif ou nul et n'est nul que si tous les a_i sont nuls ce qui implique $A = 0$ puisque A est

2. Si x appartient à H_u et y n'appartient pas à H_u , alors $x + \varepsilon y$ n'appartient pas à H_u pour tout $\varepsilon > 0$ d'où la densité du complémentaire.

diagonalisable. Alors la restriction de Φ à l'espace des matrices symétriques est définie positive ou encore de signature $(n(n+1)/2, 0)$.

- b) Si A est antisymétrique, alors $\mathbf{i}A$ est hermitienne (donc diagonalisable avec des valeurs propres réelles) d'où (même raisonnement qu'à la question précédente) $\text{tr}((\mathbf{i}A)^2) \geq 0$ et cette quantité n'est nulle que si $\mathbf{i}A = 0$, *i.e.* $A = 0$ ce qui implique que la restriction de Φ à l'espace des matrices antisymétriques est définie négative ou encore de signature $(0, n(n-1)/2)$.
- c) Par le théorème de Sylvester, a) et b) assurent que la signature de Φ est $(n(n+1)/2, n(n-1)/2)$ étant donné que

$$n(n+1)/2 + n(n-1)/2 = n^2 = \dim M(n, \mathbb{R}).$$

Éléments de réponse 6

Soient A et B les matrices correspondantes dans une base. Si on a une diagonalisation simultanée des deux formes, il existe P inversible avec tPAP et tPBP diagonales ce qui implique que $A^{-1}B$ est diagonalisable. Il suffit donc de trouver A et B symétriques et inversibles avec AB non diagonalisable (quitte à changer A en A^{-1}). On peut par exemple prendre

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres ne sont pas réelles (le polynôme caractéristique est $X^2 + 1$).

Éléments de réponse 7

- a) La réduction de Gauss donne

$$q(x, y, z) = (1 + \sqrt{2})(x + y)^2 - y^2 - 3z^2$$

d'où on déduit facilement le résultat.

- b) D'après a), la signature de q est $(1, 2)$, ce qui rend le résultat évident, la forme q étant isomorphe sur $\mathbb{R}$ à $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$.
- c) D'après a), on est ramené par changement de base à l'équation

$$(1 + \sqrt{2})x^2 - y^2 - 3z^2 = 0$$

Soit φ l'automorphisme du corps $\mathbb{k}$ qui envoie tout $a + b\sqrt{2}$ (avec $a, b \in \mathbb{Q}$) sur $a - b\sqrt{2}$. Si on avait une solution non triviale dans K^3 , en appliquant φ il en irait de même de l'équation

$$(1 - \sqrt{2})(x + y)^2 - y^2 - 3z^2 = 0$$

Or, cette équation n'a pas de solution non triviale dans $\mathbb{k} \subset \mathbb{R}$ étant que $(1 - \sqrt{2})$, -1 et -3 sont tous < 0 .

Éléments de réponse 8

Notons que si S est la matrice de q dans une base de $\mathbb{R}^n$, le groupe $O(q)$ des isométries pour q est isomorphe à celui des matrices O telles que ${}^tOSO = S$. En effet cette condition signifie que pour tout vecteur colonne X , nous avons

$${}^t(OX)S(OX) = {}^tXSX.$$

- a) Ce cas correspond à $S = \text{id}$ ou $S = -\text{id}$, et le groupe $SO(q)$ est donc isomorphe au groupe $SO(n, \mathbb{R})$ des matrices O de déterminant 1 telles que ${}^tOO = \text{id}$. Ce groupe est connexe (pour relier une matrice de $SO(n, \mathbb{R})$ à id par un chemin continu, on utilise la réduction des isométries de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire canonique) et compact (comme fermé dans $O(n, \mathbb{R})$, lequel est fermé borné dans $M(n, \mathbb{R})$).
- b) Prenons $n = 2$ et

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le calcul donne que $O(q)$ correspond aux matrices

$$O = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

telles que soit $a = d = 0$ et $bc = 1$, soit $b = c = 0$ et $ad = 1$. Le premier cas donne des matrices de déterminant -1 et non pas 1. Ainsi, $SO(q)$ correspond finalement aux matrices de la forme

$$O = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}$$

avec $a \in \mathbb{R}^*$. Ce groupe n'est ni compact (a n'est pas borné) ni connexe (son image par l'application continue qui envoie une matrice sur son coefficient en haut à gauche est $\mathbb{R}^*$, lequel n'est pas connexe).

7. DÉVELOPPEMENTS POSSIBLES

- ◇ Théorème de Pascal.
- ◇ Détermination du nombre de racines distinctes d'un polynôme.
- ◇ Par cinq points passe une conique.
- ◇ Formes de Hankel.
- ◇ Ellipse de Steiner.
- ◇ Ellipsoïde de Jonh Loewner.
- ◇ Théorème de Sylvester, voir par exemple [CG17, V-1.4.1, B.3]
- ◇ Lien entre réduction et congruence : le théorème d'orthogonalisation simultanée, voir par exemple [CG17, V-5.4]
- ◇ Critère pour la signature d'une matrice symétrique réelle par les mineurs principaux, voir par exemple [CG17, V-D.3]
- ◇ Décomposition polaire et applications :
 - (a) Étude du groupe $O(p, q)$ et $O(p, q)$ est compact si et seulement si la forme quadratique est définie, voir par exemple [CG17, V-B.5] et [CG17, VI-A]
 - (b) Tout hyperplan contient une matrice orthogonale, voir par exemple [CG17, V-D.7] et [CG17, VI-B.10]

- ◇ Représentation sur l'espace des formes bilinéaires symétriques, voir par exemple [CG15, X-B.21]. Indicateur de Frobenius Schur, voir par exemple [CG15, X-E.6]

RÉFÉRENCES

- [CG15] P. Caldero and J. Germoni. *Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries-Tome 2*. Calvage et Mounet, 2015.
- [CG17] P. Caldero and J. Germoni. *Nouvelles Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries*. Calvage et Mounet, 2017.