Partiel du 16 décembre 2019

Exercice 1 Donner la table de caractères de $\mathcal{S}_3$. Justifier votre réponse.

Exercice 2 Montrer qu'un groupe d'ordre 200 n'est pas simple.

Exercice 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un morphisme injectif de $\mathcal{S}_n$ dans $\mathcal{A}_{n+2}$.

Exercice 4 Soit G un groupe de type fini.
Un sous-groupe H de G est-il nécessairement de type fini ? Justifiez votre réponse.

Exercice 5 Soit G un groupe abélien d'ordre pq où p et q sont deux nombres premiers distincts. Montrer que G est cyclique.

Exercice 6

(1) Soit H un sous-groupe distingué de $\mathcal{S}_4$ qui contient un 4-cycle. Montrer que $\mathrm{H} = \mathcal{S}_4$.

(2) Soient P_1 et P_2 deux sous-groupes d'ordre 8 de $\mathcal{S}_4$. Supposons que $\mathrm{P}_1 \cap \mathrm{P}_2$ contienne un 4-cycle. Montrer que $\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_2$ (indication : on montre que le normalisateur de $\mathrm{P}_1 \cap \mathrm{P}_2$ dans $\mathcal{S}_4$ contient $\mathrm{P}_1 \cup \mathrm{P}_2$, on considère le sous-groupe engendré par $\mathrm{P}_1 \cup \mathrm{P}_2$ et on utilise 1.)

(3) D'après ce qui précède un 4-cycle est dans un unique sous-groupe d'ordre 8 de $\mathcal{S}_4$. En déduire le nombre de sous-groupes d'ordre 8 de $\mathcal{S}_4$ en comptant le nombre de 4-cycles.

Exercice 7 Soit G un groupe d'ordre 15.

(1) Combien G possède-t-il d'éléments d'ordre 3 ?

(2) Combien G possède-t-il d'éléments d'ordre 5 ?

(3) Démontrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.

Exercice 8 Soient p un nombre premier et n un entier naturel avec $p > n$. Considérons un groupe G d'ordre pn et H un sous-groupe de G d'ordre p. Montrer que H est un sous-groupe distingué de G.
Indication : compter les p-Sylow de G.

Exercice 9 Déterminer à isomorphisme près tous les groupes d'ordre 33.

Exercice 10

(1) Soit G un groupe fini de cardinal p^m avec p premier et $m \in \mathbb{N}^*$ qui opère sur un ensemble fini non vide E. Posons
$$E^{\mathrm{G}} = \{x \in E \mid \forall g \in \mathrm{G},\, g \cdot x = x\}.$$
Montrer que $|E^{\mathrm{G}}| = |E| \bmod p$.

(2) Soit H un groupe fini d'ordre n. Soit p un diviseur premier de n. Montrer que H contient un élément d'ordre p (lemme de CAUCHY). Indication : faire agir $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur l'ensemble E des $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de H^p tels que $x_1 x_2 \ldots x_p = e$.

(3) Soit H un groupe fini d'ordre n. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $x \in \mathrm{H}$ on ait $x^m = e$. Montrer que n divise une puissance de m.

Exercice 11 Soit G un groupe d'ordre 2009.

(1) Montrer que $\mathrm{G} \simeq \mathrm{P} \times \mathrm{Q}$ où P est un groupe d'ordre 41 et Q est un groupe d'ordre 49. En déduire que chaque groupe d'ordre 2009 est abélien.

(2) Classifier à isomorphisme près tous les groupes d'ordre 2009.

(3) Soient P est un groupe d'ordre 41 et Q est un groupe d'ordre 49. Montrer que $\mathrm{Aut}(\mathrm{G}) \simeq \mathrm{Aut}(\mathrm{P}) \times \mathrm{Aut}(\mathrm{Q})$.

(4) Montrer que
   a) si Q est cyclique, alors Aut(Q) est cyclique aussi. Quel est l'ordre de Aut(Q) quand Q est cyclique ?
   b) si Q n'est pas cyclique, alors Aut(Q) est isomorphe à $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_7)$ où $\mathbb{F}_7$ est le corps à 7 éléments. Quel est l'ordre de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_7)$?