Partiel 4 novembre 2019

Exercice 1.

Montrer que le groupe symétrique $\mathcal{S}_3$ est isomorphe à son groupe d'automorphisme $\mathrm{Aut}(\mathcal{S}_3)$.

Exercice 2.

Soient G un groupe et X un ensemble. Notons $\mathcal{S}_X$ l'ensemble des permutations de X. Soit $\phi\colon G \to \mathcal{S}_X$ un morphisme de groupes.

(1) Montrer que $g \cdot x = \phi(g)(x)$ définit une action du groupe G sur X.

(2) Considérons l'action de G sur lui-même par translation à gauche.
   i) Expliciter $\phi\colon \mathrm{G} \to \mathcal{S}_{\mathrm{G}}$ dans ce cas.
   ii) Montrer que cette action est fidèle.

(3) Supposons que $|\mathrm{G}| = n$.
   i) Montrer que $\mathcal{S}_{\mathrm{G}}$ est isomorphe au groupe des permutations $\mathcal{S}_n$.
   ii) Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$.

Exercice 3.

Soit $\mathcal{A}_4$ l'ensemble des éléments du groupe des permutations $\mathcal{S}_4$ de signature 1.

(1) Faire la liste des éléments de $\mathcal{A}_4$ et donner leurs ordres.

(2) Soit H l'ensemble formé de l'identité et des permutations

$$(1\ 2)(3\ 4) \qquad (1\ 3)(2\ 4) \qquad (1\ 4)(2\ 3)$$

   i) Montrer que H est un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
   ii) Montrer que H est un sous-groupe distingué de $\mathcal{A}_4$.

(3) Montrer que les sous-groupes propres de H ne sont pas distingués dans $\mathcal{A}_4$.

(4) Montrer que tout sous-groupe d'indice 2 d'un groupe G est distingué.

(5) Déduire des questions précédentes que $\mathcal{A}_4$ n'a pas de sous-groupe d'ordre 6 (on pourra raisonner par l'absurde et remarquer qu'une intersection de sous-groupes distingués est distinguée).

(6) Déterminer tous les sous-groupes de $\mathcal{A}_4$. Lesquels sont distingués ?

Exercice 4.

Soit $n \geq 2$ un entier.

(1) Montrer que les transpositions sont conjuguées dans $\mathcal{S}_n$, *i.e.* montrer que pour tout couple (τ_1, τ_2) de transpositions il existe une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ telle que $\tau_2 = \sigma\tau_1\sigma^{-1}$.

(2) En déduire que le seul morphisme de groupes non trivial de $\mathcal{S}_n$ dans $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ est la signature.

(3) En déduire que le seul sous-groupe de $\mathcal{S}_n$ d'indice 2 est le groupe $\mathcal{A}_n$ des permutations de signature 1 (on pourra utiliser le fait que tout sous-groupe d'indice 2 d'un groupe G est distingué).

Exercice 5.

Soit G un groupe fini. Soit p un facteur premier de G.

(1) Montrer que le sous-ensemble

$$\Sigma = \big\{(x_1, \ldots, x_p) \in \mathrm{G}^p \,|\, x_1 \ldots x_p = \mathrm{e_G}\big\}$$

de G^p est en bijection avec G^{p-1}.

(2) Notons "n mod p" le reste de la division euclidienne de n par p. Montrer que l'application

$$\phi\colon \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \Sigma \to \Sigma \quad (\overline{k}, (x_1, \ldots, x_p)) \mapsto \overline{k} \cdot (x_1, \ldots, x_p) = (x_{1+k \bmod p}, \ldots, x_{p+k \bmod p})$$

est bien définie et que c'est une action du groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur l'ensemble Σ.

(3) Montrer que le stabilisateur de $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si et seulement si $x_1 = x_2 = \ldots = x_p$.

(4) En appliquant l'équation aux classes, en déduire que G contient au moins un élément d'ordre p.

Exercice 6. Produit semi-direct

(1) Soient H et K deux groupes multiplicatifs. Désignons par Aut(H) le groupe des automorphismes de H. Soit

$$\varphi\colon \mathrm{K} \to \mathrm{Aut(H)}, \qquad\qquad k \mapsto \varphi_k$$

un morphisme de groupes.

a) Montrer que l'ensemble H × K muni de la loi

$$(h, k) \cdot (h', k') = (h\varphi_k(h'), kk')$$

est un groupe. Le groupe ainsi obtenu est appelé produit semi-direct de H par K relativement à φ et est noté $\mathrm{H} \rtimes_\varphi \mathrm{K}$. Si φ est le morphisme trivial (*i.e.* si $\varphi_k = 1_{\mathrm{Aut(H)}} = \mathrm{id_H}$ pour tout $k \in \mathrm{K}$), on retrouve le produit direct de H et K.

b) Supposons que H et K sont abéliens. Montrer que $\mathrm{H} \rtimes_\varphi \mathrm{K}$ est abélien si et seulement si φ est le morphisme trivial.

c) Soient

$$\mathrm{H}' = \mathrm{H} \times \{1\} = \big\{(h, 1) \,|\, h \in \mathrm{H}\big\} \qquad \mathrm{K}' = \{1\} \times \mathrm{K} = \big\{(1, k) \,|\, k \in \mathrm{K}\big\}$$

Montrer que H′ et K′ sont deux sous-groupes de $\mathrm{H} \rtimes_\varphi \mathrm{K}$.
Montrer que $\mathrm{H}' \subset \mathrm{H} \rtimes_\varphi \mathrm{K}$ est distingué.
Remarquer que $\mathrm{H}' \cdot \mathrm{K}' = \mathrm{H} \rtimes \mathrm{K}$ et $\mathrm{H}' \cap \mathrm{K}' = \{(1, 1)\}$ et montrer que le groupe quotient $\mathrm{H} \rtimes \mathrm{K}/\mathrm{H}'$ est isomorphe à K.

(2) Réciproquement soient G un groupe et E, F deux sous-groupes de G. Supposons que E est distingué dans G, que $\mathrm{E} \cdot \mathrm{F} = \mathrm{G}$ et que $\mathrm{E} \cap \mathrm{F} = \{1\}$. On définit

$$\psi\colon \mathrm{F} \to \mathrm{Int(E)}, \qquad\qquad x \mapsto \psi_x$$

où ψ_x est l'automorphisme intérieur $y \mapsto xyx^{-1}$ de E. Montrer que G et $\mathrm{E} \rtimes_\psi \mathrm{F}$ sont isomorphes.

(3) a) Soit $n \geq 1$ un entier. Exhiber un isomorphisme entre le groupe diédral D_{2n} et un produit semi-direct de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. A-t-on $\mathrm{D}_{2n} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

b) À l'aide de la question 1. b) construire un groupe non abélien d'ordre $21 = 3 \times 7$.

Exercice 7. Sous-groupes transitifs de $\mathcal{S}_4$

Soit $n \geq 1$.

Rappelons qu'un sous-groupe G de $\mathcal{S}_n$ est dit transitif si son action sur $\{1, 2, \ldots, n\}$ est transitive, c'est-à-dire si pour tous i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ il existe $g \in \mathrm{G}$ tel que $g(i) = j$.

Rappelons aussi que le commutant d'un élément γ d'un groupe Γ est le sous-groupe de Γ des éléments qui commutent avec γ.

(1) Montrer que n divise l'ordre de tout sous-groupe transitif de $\mathcal{S}_n$.

(2) Déterminer les sous-groupes transitifs de $\mathcal{S}_3$.

(3) Soit H le sous-groupe de $\mathcal{S}_4$ engendré par (1 2 3 4) et (1 3).
   a) Déterminer les sous-groupes de H qui sont transitifs.
   b) Déterminer le commutant de chaque élément d'ordre 2 de $\mathcal{S}_4$, et réaliser H de cette manière.
   c) Soit G un sous-groupe transitif de $\mathcal{S}_4$ d'ordre un diviseur de 8. Montrer qu'il est conjugué à l'un de ceux déterminés au a).
   d) Établir, à conjugaison près, la liste des sous-groupes transitifs de $\mathcal{S}_4$.

Exercice 8. Classification des groupes non abéliens d'ordre 8

Le but de cet exercice est de déterminer tous les groupes non abéliens d'ordre 8 à isomorphisme près.

Soit G un group fini ; on désigne par $Z(\mathrm{G})$ le centre de G.

(1) Montrer que $Z(\mathrm{G})$ est un sous-groupe distingué de G. Si G est d'ordre 8, quels sont les ordres possibles pour $Z(\mathrm{G})$?

(2) Montrer que si ${}^{\mathrm{G}}\!/_{Z(\mathrm{G})}$ est un groupe cyclique, alors G est abélien.

(3) Soit p un nombre premier. Supposons que le cardinal de G soit une puissance de p. Montrer que $Z(\mathrm{G}) \neq \{e_{\mathrm{G}}\}$ (indication : on pourra considérer l'action de G sur lui-même par conjugaison puis utiliser l'équation aux classes pour trouver une formule du type suivant

$$|\mathrm{G}| = |Z(\mathrm{G})| + \sum_{i=1}^{n} \frac{|\mathrm{G}|}{|\mathrm{H}_i|}$$

les $\mathrm{H}_i \subsetneq \mathrm{G}$ désignant certains sous-groupes de G).

(4) Supposons désormais que G est non abélien d'ordre $8 = 2^3$.
   a) Montrer que $Z(\mathrm{G}) \subset \mathrm{G}$ est un sous-groupe d'ordre 2 et que ${}^{\mathrm{G}}\!/_{Z(\mathrm{G})} \simeq {}^{\mathbb{Z}}\!/_{2\mathbb{Z}} \times {}^{\mathbb{Z}}\!/_{2\mathbb{Z}}$.
   b) Montrer que G contient au moins un élément d'ordre 4.
   c) Montrer que tout sous-groupe de G d'ordre 4 est distingué dans G.
   Soit $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$ un sous-groupe cyclique d'ordre 4 de G.
   cas 1 Il existe dans $\mathrm{G} \setminus \mathrm{H}$ un élément d'ordre 2. Montrer alors que $\mathrm{G} = \langle \mathrm{H}, x \rangle$.
   Montrer que l'automorphisme

$$\mathrm{H} \to \mathrm{H} \qquad\qquad g \mapsto xgx^{-1}$$

   est égal à $g \mapsto g^{-1}$. En déduire que G est isomorphe au groupe diédral D_8.
   cas 2 Tout élément de $\mathrm{G} \setminus \mathrm{H}$ est d'ordre 4. Montrer alors que G n'a qu'un seul élément d'ordre 2 et qu'il engendre $Z(\mathrm{G})$. On le note par -1. Soit i un générateur de H et soit $j \in \mathrm{G} \setminus \mathrm{H}$. On pose $k = ij$. Montrer que $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. On note alors $-i$ pour i^3, $-j$ pour j^3 et $-k$ pour k^3. Écrire la table de Cayley de G.