Partiel du 16 octobre 2018

Exercice 1.
Quels sont les éléments d'ordre 3 du groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$?

Exercice 2.
Étudier le groupe $\mathrm{Aut}\Big(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\Big)$.

Exercice 3.
Montrer que les groupes $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $\mathcal{U} = \big\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\big\}$ sont isomorphes.

Exercice 4.
Donner un exemple de groupe et de sous-groupes dont la réunion n'est pas un sous-groupe.

Exercice 5.
Soient G un groupe fini, H et K deux sous-groupes de G d'ordre h et k respectivement.
Si h et k sont premiers entre eux, que peut-on dire de $\mathrm{H} \cap \mathrm{K}$?

Exercice 6.
Quel est le cardinal de $\mathrm{Aut}\Big(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\Big)$? Et le cardinal de $(\mathbb{F}_4)^\times$?

Exercice 7.
Dans les groupes suivants, donner un exemple d'élément d'ordre 4 s'il en existe, sinon donner un argument pour justifier qu'il n'y en a pas :

(a) le groupe linéaire $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$;
(b) le groupe alterné $\mathcal{A}_8$;
(c) le groupe $\mathrm{Isom}^+(T) \subset \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ des rotations de $\mathbb{R}^3$ préservant un tétraèdre régulier T ;
(d) un groupe d'ordre 16 quelconque (attention il s'agit de déterminer si *tout* sous-groupe d'ordre 16 admet un élément d'ordre 4).

Exercice 8.
On note $\mathbb{H}_8$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, appelé *groupe des quaternions* engendré par les trois matrices

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix}$$

1. Calculer l'ordre de $\mathbb{H}_8$.
2. Exhiber les sous-groupes de $\mathbb{H}_8$.
3. Exhiber les sous-groupes distingués de $\mathbb{H}_8$.
4. Est-il isomorphe au groupe diédral D_8 ?

Exercice 9.

(1) Soit G un groupe abélien. Soient a et b deux éléments de G d'ordres finis premiers entre eux. Montrer que $\mathrm{ordre}(ab) = \mathrm{ordre}(a)\mathrm{ordre}(b)$.
(2) Soit G un groupe abélien fini et soit m le maximum parmi les ordres des éléments de G, m est appelé l'exposant de G. Montrer que l'ordre de tout élément de G divise m.
(3) Soit $\Bbbk$ un corps et $\mathrm{G} \subset \Bbbk^*$ un sous-groupe fini du groupe multiplicatif $\Bbbk^*$. Montrer que G est cyclique. [Indication : on peut considérer les racines du polynôme $X^m - 1 \in \Bbbk[X]$ où m est l'exposant de G.]
(4) Qu'en déduire pour le groupe $\Big(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\Big)^*$ avec p premier ? Qu'en déduire pour le groupe $\mathbb{C}^*$?

Exercice 10.

(1) Soient $n \geq 1$ et k deux entiers. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :
   (i) $\overline{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ engendre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$;
   (ii) n et k sont premiers entre eux ;
   (iii) $\overline{k}$ est inversible dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(2) Montrer que $\big(\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), \circ\big) \simeq \big((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \times\big)$.

Exercice 11.

Montrer que le sous-groupe $\mathrm{Int}(\mathrm{G})$ des automorphismes intérieurs de G est un sous-groupe distingué du groupe $\mathrm{Aut}(\mathrm{G})$ et que $\mathrm{Int}(\mathrm{G}) \simeq \mathrm{G}/Z(\mathrm{G})$ où $Z(\mathrm{G})$ est le centre de G.

Exercice 12.

Soit G un groupe abélien infini. Montrer que l'ensemble T des éléments d'ordre fini de G est un sous-groupe de G.

Si $\mathrm{T} = \{e\}$, on dit que G est sans torsion.

Montrer que G/T est sans torsion.

Exercice 13. Soient $p < q$ deux nombres premiers tels que p divise $q - 1$. Donner un exemple de groupe non-abélien G d'ordre pq constitué de matrices triangulaires dans $\mathrm{GL}_2\big(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}\big)$.

Exercice 14. Soient G un groupe et H un sous-groupe de G.

(a) Montrer qu'en posant $g \cdot a\mathrm{H} = (ga)\mathrm{H}$, où a, $g \in \mathrm{G}$, on définit une action de G sur l'ensemble G/H des classes à gauche modulo H.

(b) Montrer que cette action est transitive.
    Déterminer le stabilisateur de $a\mathrm{H}$.

(c) On suppose G fini. Calculer le cardinal d'une orbite et retrouver un théorème classique.