Feuille d'exercices n° 3

Exercice 1

Soient $\Bbbk$ un corps et $\mathrm{G} \subset \mathrm{GL}(2, \Bbbk)$ le sous-groupe des matrices 2×2 triangulaires supérieures. Déterminer si chacune des conditions suivantes définit un sous-groupe distingué de G, et si oui, utiliser le théorème d'isomorphisme pour identifier le quotient :

(i) $a_{11} = 1$;
(ii) $a_{12} = 0$;
(iii) $a_{11} = a_{22}$;
(iv) $a_{11} = a_{22} = 1$.

Solution 1

Le groupe G est

$$\mathrm{G} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \,\middle|\, a_{11},\, a_{22} \in \Bbbk^*,\, a_{12} \in \Bbbk \right\}$$

La loi de composition sur G est :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab' + bc' \\ 0 & cc' \end{pmatrix} \tag{1}$$

(i) Le sous-groupe défini par la condition $a_{11} = 1$ est

$$\mathrm{K} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \,\middle|\, b \in \Bbbk,\, c \in \Bbbk^* \right\}$$

Posons

$$\varphi \colon \mathrm{G} \to \Bbbk^*, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mapsto a$$

La relation (1) assure que φ est un morphisme, et on constate que $\mathrm{K} = \ker \varphi$; en particulier K est distingué dans G. De plus φ est surjectif, car étant donné $a \in \Bbbk^*$ la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est un antécédent de a par φ. Le théorème d'isomorphisme permet de conclure que le quotient G/K est isomorphe à $\Bbbk^*$.
Remarque : on peut vérifier directement avec la définition que K est distingué dans G (c'est-à-dire vérifier que pour toutes matrices $A \in \mathrm{K}$ et $B \in \mathrm{G}$ on a $BAB^{-1} \in \mathrm{K}$) ; ceci étant il faut identifier K à un noyau pour utiliser le théorème d'isomorphisme...
On peut chercher à voir s'il existe un sous-groupe H de G tel que $\mathrm{G} = \mathrm{K} \rtimes \mathrm{H}$. Posons

$$\mathrm{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \Bbbk^* \right\}$$

On voit que $\mathrm{K} \cap \mathrm{H} = \{\mathrm{id}\}$ et $\mathrm{KH} = \mathrm{G}$ (à nouveau par (1)) dont H convient.
Remarquons que H n'est pas uniquement déterminé ; par exemple

$$\mathrm{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \Bbbk^* \right\}$$

convient aussi.
En fait il y a une infinité d'autres choix possibles pour H.

(ii) Le sous-groupe défini par la condition $a_{12} = 0$ est

$$\mathrm{K} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \,\middle|\, a,\, c \in \Bbbk^* \right\}.$$

Si $\Bbbk \neq \mathbb{F}_2$, alors ce groupe n'est pas distingué dans G : pour tout $b \neq 0$ et $a \neq c$ nous avons

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & bc \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b(c-a) \\ 0 & c \end{pmatrix} \notin \mathrm{K}.$$

Si $\Bbbk = \mathbb{F}_2$, alors on ne peut pas choisir deux éléments $a \neq c$ dans $\Bbbk^*$, et donc le contre-exemple ne tient plus. Dans ce cas le groupe K est trivial, donc en particulier distingué dans G...

(iii) Le sous-groupe défini par la condition $a_{11} = a_{22}$ est

$$\mathrm{K} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \Bbbk^*,\, b \in \Bbbk \right\}.$$

Posons

$$\varphi \colon \mathrm{G} \to \Bbbk^*, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mapsto \frac{a}{c}$$

La relation (1) montre que φ est un morphisme, et donc $\mathrm{K} = \ker \varphi$ est distingué dans G. De plus φ est surjectif, donc le théorème d'isomorphisme permet de conclure que le quotient G/K est isomorphe à $\Bbbk^*$.
Notons que $\mathrm{G} = \mathrm{K} \rtimes \mathrm{H}$ pour le choix suivant de sous-groupe H :

$$\mathrm{K} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \Bbbk^* \right\}.$$

À noter qu'il y a une infinité d'autres choix possibles pour H.

(iv) Le sous-groupe défini par la condition $a_{11} = a_{22} = 1$ est

$$\mathrm{K} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \Bbbk \right\}$$

Posons

$$\varphi \colon \mathrm{G} \to \Bbbk^* \times \Bbbk^*, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mapsto (a, c)$$

De nouveau la relation (1) assure que φ est un morphisme surjectif, donc $\mathrm{K} = \ker \varphi$ est distingué ; d'après le théorème d'isomorphisme le quotient G/K est isomorphe à $\Bbbk^* \times \Bbbk^*$.
Notons que $\mathrm{G} = \mathrm{K} \rtimes \mathrm{H}$ par exemple pour le choix suivant de sous-groupe H :

$$\mathrm{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a,\, c \in \Bbbk^* \right\}$$

À noter qu'il y a une infinité d'autres choix possibles pour H.

Les exemples dans cet exercice peuvent donner la fausse idée que dès que $\mathrm{K} \subset \mathrm{G}$ est un sous-groupe distingué, il existe un sous-groupe $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$ tel que . C'est faux ; considérer par exemple $\mathrm{G} = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ et $\mathrm{K} = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ et se convaincre qu'un tel H n'existe pas dans ce cas...

Exercice 2

On se propose de montrer que le groupe alterné $\mathcal{A}_4$ ne contient aucun sous-groupe d'ordre 6.

(1) En général, montrer que si $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$ est un sous-groupe d'indice 2, alors H est distingué dans G.
(2) Rappeler la liste des classes de conjugaison de $\mathcal{A}_4$ et leurs cardinaux.
(3) Conclure.

Solution 2

(1) Soit $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$ d'indice 2. Si g appartient à H, alors $g\mathrm{H} = \mathrm{H}g = \mathrm{H}$ (l'hypothèse indice 2 est inutile ici). Si g n'appartient pas à H, alors puisque H est d'indice 2 nous avons

$$\mathrm{G} = \mathrm{H} \cup g\mathrm{H} = \mathrm{H} \cup \mathrm{H}g.$$

On voit que $g\mathrm{H} = \mathrm{H}g = \mathrm{G} \smallsetminus \mathrm{H}$; en particulier $g\mathrm{H} = \mathrm{H}g$, autrement dit H est distingué dans G.

(2) Le groupe $\mathcal{A}_4$ compte quatre classes de conjugaison, qui sont :
- ◇ la classe de l'identité, de cardinal 1,
- ◇ la classe des doubles transposition, de cardinal 3,
- ◇ une première classe de 3-cycles, de cardinal 4,
- ◇ une deuxième classe de 3-cycles, de cardinal 4.

Notons que dans $\mathcal{S}_4$ la réponse serait différente : les 3-cycles forment une seule classe de conjugaison dans $\mathcal{S}_4$, de cardinal 8.

(3) Supposons que $\mathrm{H} \subset \mathcal{A}_4$ soit un sous-groupe d'ordre 6 ; il est ainsi d'indice 2 dans $\mathcal{A}_4$. La question (1) assure que H est donc distingué dans $\mathcal{A}_4$. Alors H devrait être union de classes de conjugaison, dont celle du neutre, mais il n'est pas possible d'obtenir 6 en sommant des nombres parmi $\{1, 3, 4, 4\}$: contradiction.

Remarque : d'après (2) les cardinaux possibles pour un sous-groupe distingué de $\mathcal{A}_4$ sont
- ◇ 1 (sous-groupe trivial),
- ◇ $4 = 1 + 3$ (c'est le groupe de Klein engendré par les double-transpositions),
- ◇ $5 = 1 + 4$ (en fait impossible par Lagrange),
- ◇ $8 = 1 + 3 + 4$ (en fait impossible par Lagrange),
- ◇ $9 = 1 + 4 + 4$ (en fait impossible par Lagrange),
- ◇ $12 = 1 + 3 + 4 + 4$ (groupe $\mathcal{A}_4$ entier).

Exercice 3

Soit p un nombre premier. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Soient G un groupe d'ordre p^n et $Z(\mathrm{G})$ son centre. Considérons un sous-groupe distingué H de G non trivial.

1. Montrer que $\mathrm{H} \cap Z(\mathrm{G}) \neq \{e\}$.
2. Montrer que l'ordre de $Z(\mathrm{G})$ est > 1 (sans utiliser le premier point).

Indication : faire agir G par conjugaison sur H.

Solution 3

Soit p un nombre premier. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Soient G un groupe d'ordre p^n et $Z(\mathrm{G})$ son centre. Considérons un sous-groupe distingué H de G non trivial.

1. Montrons que $\mathrm{H} \cap Z(\mathrm{G}) \neq \{e\}$. Faisons agir G par conjugaison sur H ; notons que c'est possible car H étant distingué dans G nous avons $\forall\, g \in \mathrm{G}$, $g\mathrm{H}g^{-1} \subset \mathrm{H}$.

   L'ordre de H est une puissance de p soit p^β car $|\mathrm{H}|$ divise $|\mathrm{G}|$ qui est une puissance de p. L'ordre de H est aussi somme des cardinaux des orbites pour cette action ; chacune de ces orbites a pour cardinal un diviseur de $|\mathrm{G}|$, c'est-à-dire de p^n donc une puissance de p.

   Raisonnons par l'absurde : supposons que $Z(\mathrm{G}) \cap \mathrm{H} = \{e\}$; alors une seule des orbites est réduite à un seul élément [1] : l'orbite de e. Nous avons alors

   $$|\mathrm{H}| = p^\beta = 1 + \text{ somme de puissances de } p$$

   contradiction. Par suite $Z(\mathrm{G}) \cap \mathrm{H} \neq \{e\}$.
2. Montrons que l'ordre de $Z(\mathrm{G})$ est > 1. Nous allons encore appliquer la formule des classes. Remarquons que les orbites de G pour l'action de G par conjugaison sur lui-même ont pour cardinal des puissances de p ; en effet ces cardinaux sont des diviseurs de $|\mathrm{G}| = p^n$.

   Raisonnons par l'absurde : supposons que $|Z(\mathrm{G})| = 1$, alors

   $$p^n = |\mathrm{G}| = 1 + \text{ somme de puissances de } p$$

   contradiction. Il en résulte que $|Z(\mathrm{G})| > 1$.

Exercice 4

Soit G un groupe. Désignons par $\mathrm{Aut}(\mathrm{G})$ le groupe des automorphismes de G. Si a appartient à G, notons $\varphi(a)$ l'application

$$\varphi(a)\colon \mathrm{G} \to \mathrm{G} \qquad\qquad g \mapsto aga^{-1}.$$

a) Montrer que pour tout a dans G l'application $\varphi(a)$ est un automorphisme de G (appelé automorphisme intérieur de G).

1. $\mathcal{O}_g = \{g\} \iff \{h \cdot g \,|\, g \in \mathrm{G}\} = \{g\} \iff \{hgh^{-1} \,|\, g \in \mathrm{G}\} = \{g\} \iff \forall\, h \in \mathrm{G}\, hgh^{-1} = g$

b) Montrer que $\varphi\colon \mathrm{G} \to \mathrm{Aut}(\mathrm{G})$, $g \mapsto \varphi(g)$ est un morphisme de groupes de G dans Aut(G).

c) Notons Int(G) l'ensemble des automorphismes intérieurs de G. Montrer que Int(G) est un sous-groupe distingué de Aut(G).

d) Notons $Z(\mathrm{G})$ le centre de G. Montrer que $\mathrm{Int}(\mathrm{G}) \simeq {}^{\mathrm{G}}\!/_{Z(\mathrm{G})}$.

Solution 4

a) Il faut montrer que $\varphi(a)$ est un morphisme de G dans G ; bien sûr $\varphi(a)(e) = e$. Il reste donc à montrer que $\varphi(a)(gg') = \varphi(a)(g)\varphi(a)(g')$. Or

$$\varphi(a)(gg') = agg'a^{-1} = (aga^{-1})(ag'a^{-1}) = \varphi(a)(g)\varphi(a)(g').$$

Montrons que $\ker\varphi(a) = \{e\}$. Soit $g \in \ker\varphi(a)$, alors $\varphi(a)(g) = e$, autrement dit $aga^{-1} = e$ d'où $g = a^{-1}a = e$. Ainsi $\varphi(a)$ est un morphisme injectif.
Soit g dans G. On a $g = a(a^{-1}ga)a^{-1} = \varphi(a)(a^{-1}ga)$. Autrement dit $\varphi(a)$ est surjectif.
Il en résulte que $\varphi(a)$ est un automorphisme de G et $(\varphi(a))^{-1} = \varphi(a^{-1})$.

b) D'une part $\varphi(e)(g) = ege^{-1} = g$, *i.e.* $\varphi(e) = \mathrm{id}$. D'autre part

$$\varphi(a) \circ \varphi(a')(g) = a(a'ga'^{-1})a^{-1} = (aa')g(aa')^{-1} = \varphi(aa')(g)$$

c'est-à-dire $\varphi(a) \circ \varphi(a') = \varphi(aa')$. Par suite φ est un morphisme de groupes de G dans Aut(G).

c) Int(G) est l'image de G par le morphisme de groupes φ ; c'est donc un sous-groupe de Aut(G).
Soit τ un automorphisme de G ; alors

$$\tau \circ \varphi(a) \circ \tau^{-1}(g) = \tau(a\tau^{-1}(g)a^{-1}) = \tau(a)\tau(\tau^{-1}(g))\tau(a^{-1}) = \tau(a)g\tau(a^{-1})$$

Ainsi $\tau \circ \varphi(a) \circ \tau^{-1} = \varphi(\tau(a))$ appartient à $\mathrm{Im}\,\varphi$. Le groupe Int(G) est distingué dans Aut(G).

d) D'une part $\ker\varphi$ est le centre $Z(\mathrm{G})$ de G [2], d'autre part $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Int}(\mathrm{G})$ (voir c)). Le théorème d'isomorphisme assure que $\mathrm{Int}(\mathrm{G}) \simeq {}^{\mathrm{G}}\!/_{Z(\mathrm{G})}$.

Exercice 5 [Formule de Burnside et coloriage de polyèdres]

1. Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. Pour tout $x \in X$ on désigne par $\mathcal{O}_x$ l'orbite de x par l'action de G et par G_x son stabilisateur.

   a) Soient $x \in X$ et $y \in \mathcal{O}_x$. Trouvez $z \in \mathrm{G}$ tel que

   $$\mathrm{G}_y = z^{-1}\mathrm{G}_x z.$$

   b) Montrer que pour tout $x \in X$

   $$|\mathrm{G}| = \sum_{y \in \mathcal{O}_x} |\mathrm{G}_y|.$$

   c) En déduire que

   $$|\Omega| = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{x \in X} |\mathrm{G}_x|$$

   où $\Omega = \{\mathcal{O}_x \,|\, x \in X\}$ est l'ensemble des orbites dans X par l'action de G.

   d) En décomposant de deux façons différentes l'ensemble $F = \{(g, x) \in \mathrm{G} \times X \,|\, g \cdot x = x\}$ déduire de la question précédente la formule de Burnside

   $$|\Omega| = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{g \in \mathrm{G}} |\mathrm{Fix}(g)|$$

   où $\mathrm{Fix}(g)$ est l'ensemble des points $x \in X$ tels que $g \cdot x = x$.

2. On cherche maintenant à déterminer le nombre de façons de colorier les faces et les arêtes d'un tétraèdre régulier, où k couleurs sont disponibles, à chaque face et à chaque arête étant attribuée une couleur et une seule. Le tétraèdre T est vu comme un sous-ensemble de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et on le suppose centré en 0.

   Nous identifions deux coloriages du tétraèdre s'il existe une rotation R de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ qui préserve le tétraèdre, *i.e.* $R(T) = T$, et qui envoie le premier coloriage sur le second.

2. $\ker\varphi = \{g \in \mathrm{G} \,|\, \varphi(g) = \mathrm{id}\} = \{g \in \mathrm{G} \,|\, \forall h \in \mathrm{G},\, \varphi(g)(h) = h\} = \{g \in \mathrm{G} \,|\, \forall h \in \mathrm{G},\, ghg^{-1} = h\} = \{g \in \mathrm{G} \,|\, \forall h \in \mathrm{G},\, gh = hg\} = Z(\mathrm{G})$

a) Soit X l'ensemble des coloriages où on interdit cette identification. Quel est le cardinal de X ?

b) Montrer que l'ensemble des rotations préservant T, muni de la loi de composition, est un groupe. Notons G ce groupe. On admet qu'il est fini et plus précisément que $|\mathrm{G}| = 12$:
- l'identité $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$;
- 3 rotations d'axe passant par le milieu d'une arête et le milieu de l'arête opposée, et d'angle π ;
- 8 rotations d'axe passant par un sommet et le centre de la face opposée, et d'angle $\pm 2\pi/3$.

c) Le groupe G agit naturellement sur X, et chaque coloriage du tétraèdre correspond à une orbite $\mathcal{O}_x$ dans X par l'action de G. Exprimer le nombre de coloriages du tétraèdre en fonction de k.

Solution 5

1. a) Soient $x \in X$ et $y \in \mathcal{O}_x$. Il existe $g \in \mathrm{G}$ tel que $y = g \cdot x$. Soit $w \in \mathrm{G}_x$, alors $w \cdot x = x$. D'une part $w \cdot x = w \cdot (g^{-1}y)$, d'autre part $x = g^{-1}y$. Par conséquent $w \cdot x = x$ se réécrit $w \cdot (g^{-1}y) = g^{-1}y$ ou encore $(gwg^{-1}) \cdot y = y$; autrement dit gwg^{-1} appartient à G_y et $g\mathrm{G}_x g^{-1} \subset \mathrm{G}_y$. Un raisonnement analogue conduit à $\mathrm{G}_y \subset g\mathrm{G}_x g^{-1}$. Il s'en suit que $\mathrm{G}_y = g\mathrm{G}_x g^{-1}$ et que $z = g^{-1}$ convient.

   b) D'après a) $\mathrm{G}_y = g\mathrm{G}_x g^{-1}$ donc $|\mathrm{G}_y| = |\mathrm{G}_x|$ et
$$\sum_{y \in \mathcal{O}_x} |\mathrm{G}_y| = \sum_{y \in \mathcal{O}_x} |\mathrm{G}_x| = |\mathrm{G}_x| \sum_{y \in \mathcal{O}_x} 1 = |\mathrm{G}_x|\,|\mathcal{O}_x|.$$
   Or l'application
$$\mathrm{G}/\mathrm{G}_x \to \mathcal{O}_x, \qquad \overline{g} \mapsto g \cdot x$$
   est bien définie et est une bijection ; par suite $\left|\mathrm{G}/\mathrm{G}_x\right| = |\mathcal{O}_x|$, *i.e.* $|\mathrm{G}| = |\mathcal{O}_x|\,|\mathrm{G}_x|$. Ainsi $\sum_{y \in \mathcal{O}_x} |\mathrm{G}_y| = |\mathrm{G}|$.

   c) Nous avons
$$\sum_{x \in X} |\mathrm{G}_x| = \sum_{\mathcal{O}_x \subset \Omega} \sum_{y \in \mathcal{O}_x} |\mathrm{G}_y|.$$
   D'après b) $\sum_{y \in \mathcal{O}_x} |\mathrm{G}_y| = |\mathrm{G}|$ d'où
$$\sum_{x \in X} |\mathrm{G}_x| = \sum_{\mathcal{O}_x \subset \Omega} |\mathrm{G}| = |\mathrm{G}| \sum_{\mathcal{O}_x \subset \Omega} 1 = |\mathrm{G}|\,|\Omega|.$$
   Finalement
$$|\Omega| = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{x \in X} |\mathrm{G}_x|.$$

   d) Le groupe G est fini ; désignons par g_1, g_2, …, g_p ses éléments. L'ensemble X est fini ; désignons par x_1, x_2, …, x_q ses éléments. D'une part
$$\begin{aligned} F &= \{(g,x) \in \mathrm{G} \times X \,|\, g \cdot x = x\} \\ &= \{(g,x) \in \mathrm{G} \times X \,|\, x \in \mathrm{Fix}(g)\} \\ &= \Big(\{g_1\} \times \mathrm{Fix}(g_1)\Big) \cup \Big(\{g_2\} \times \mathrm{Fix}(g_2)\Big) \cup \ldots \cup \Big(\{g_p\} \times \mathrm{Fix}(g_p)\Big) \end{aligned}$$
   d'où $|F| = \sum_{g \in \mathrm{G}} |\mathrm{Fix}(g)|$.
   D'autre part
$$\begin{aligned} F &= \{(g,x) \in \mathrm{G} \times X \,|\, g \cdot x = x\} \\ &= \{(g,x) \in \mathrm{G} \times X \,|\, g \in \mathrm{G}_x\} \\ &= \Big(\mathrm{G}_{x_1} \times \{x_1\}\Big) \cup \Big(\mathrm{G}_{x_2} \times \{x_2\}\Big) \cup \ldots \cup \Big(\mathrm{G}_{x_q} \times \{x_q\}\Big) \end{aligned}$$
   d'où $|F| = \sum_{x \in X} |\mathrm{G}_x|$. Par conséquent $\sum_{g \in \mathrm{G}} |\mathrm{Fix}(g)| = \sum_{x \in X} |\mathrm{G}_x|$. Mais c) assure que $|\Omega|\,|\mathrm{G}| = \sum_{x \in X} |\mathrm{G}_x|$. donc
$$|\Omega| = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{g \in \mathrm{G}} |\mathrm{Fix}(g)|$$

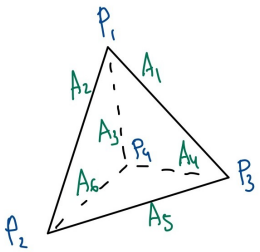
2. On cherche maintenant à déterminer le nombre de façons de colorier les faces et les arêtes d'un tétraèdre régulier, où k couleurs sont disponibles, à chaque face et à chaque arête étant attribuée une couleur et une seule. Le tétraèdre T est vu comme un sous-ensemble de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et on le suppose centré en 0.

   Nous identifions deux coloriages du tétraèdre s'il existe une rotation R de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ qui préserve le tétraèdre, *i.e.* $R(T) = T$, et qui envoie le premier coloriage sur le second.

   a) Soit X l'ensemble des coloriages où on interdit cette identification. Quel est le cardinal de X ?
   Un tétraèdre régulier a quatre faces S_1, S_2, S_3, S_4 et six arêtes A_1, A_2, …, A_6. En particulier il y a dix objets à colorier. On a donc $|X| = k^{10}$.

   b) Montrons que l'ensemble des rotations préservant T, muni de la loi de composition, est un groupe.
   Voir cours.
   Notons G ce groupe. On admet qu'il est fini et plus précisément que $|\mathrm{G}| = 12$:
   - l'identité $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$;
   - 3 rotations d'axe passant par le milieu d'une arête et le milieu de l'arête opposée, et d'angle π ;
   - 8 rotations d'axe passant par un sommet et le centre de la face opposée, et d'angle $\pm 2\pi/3$.

   c) Le groupe G agit naturellement sur X, et chaque coloriage du tétraèdre correspond à une orbite $\mathcal{O}_x$ dans X par l'action de G. Exprimons le nombre de coloriages du tétraèdre en fonction de k.
   Appliquons la formule de Burnside : soit n le nombre de coloriages, ou de manière équivalente le nombre d'orbites de G sur X. Alors
   $$n = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{g \in \mathrm{G}} |\mathrm{Fix}(g)|$$
   Trois cas sont à distinguer :
   - Si $g = \mathrm{id}$, alors $\mathrm{Fix}(g) = X$; par suite $|\mathrm{Fix}(g)| = |X| = k^{10}$.
   - Si g est l'une des trois rotations d'axe passant par le milieu d'une arête et le milieu de l'arête opposée, et d'angle π. Alors $|\mathrm{Fix}(g)| = k^6$.



g : $P_1 \to P_2 \to P_1$
une fois A_1, A_2 & A_3 fixés A_1, A_4 & A_5 le sont $\Rightarrow k^3$ choix

g : $P_3 \to P_4 \to P_3$
aucune contrainte sur A_6 $\Rightarrow k$ choix

g : $P_1P_2P_3 \to P_1P_2P_4 \to P_1P_2P_3$
autrement dit les faces $P_1P_2P_3$ & $P_1P_2P_4$ ont même couleur
$\Rightarrow k$ choix

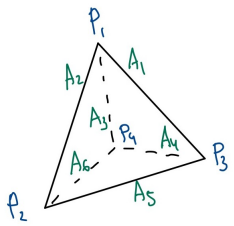
g : $P_2P_3P_4 \to P_1P_3P_4 \to P_2P_3P_4$

   Par exemple si g est la rotation d'axe passant par le milieu de l'arête A_2 et le milieu de l'arête A_4 alors
   - ◇ g envoie P_1 sur P_2 et P_2 sur P_1 donc une fois A_1, A_2 et A_3 fixés, A_1, A_4 et A_5 le sont $\rightsquigarrow k^3$ choix,
   - ◇ g envoie P_3 sur P_4 et P_4 sur P_3, il n'y a donc aucune contrainte sur A_6 $\rightsquigarrow k$ choix,
   - ◇ g envoie $P_1P_2P_3$ sur $P_1P_2P_4$ et $P_1P_2P_4$ sur $P_1P_2P_3$, autrement dit les faces $P_1P_2P_4$ et $P_1P_2P_3$

ont même couleur $\rightsquigarrow k$ choix,
- ◇ g envoie $P_2P_3P_4$ sur $P_1P_3P_4$ et $P_1P_3P_4$ sur $P_2P_3P_4$, autrement dit les faces $P_1P_3P_4$ et $P_2P_3P_4$ ont même couleur $\rightsquigarrow k$ choix

soit au total k^6 choix.

- Si g est l'une des huit rotations d'axe passant par un sommet et le centre de la face opposée, et d'angle $\pm\frac{2\pi}{3}$. Par conséquent $|\mathrm{Fix}(g)| = k^4$.



g rotation d'axe passant par un sommet et le centre de la face opposée d'angle $\pm\frac{2\pi}{3}$

$g : A_1 \to A_2 \to A_3 \to A_1$

$g : A_4 \to A_6 \to A_5 \to A_4$

$\Rightarrow$ les arêtes A_1, A_2 & A_3 sont de même couleur, k choix

les arêtes A_4, A_5 & A_6 sont de même couleur, k choix

Par exemple si g est une rotation d'axe passant par P_1 et le centre de la face $P_2P_3P_4$, alors
- ◇ g envoie A_1 sur A_2, A_2 sur A_3 et A_3 sur A_1 donc les arêtes A_1, A_2 et A_3 sont de même couleur $\rightsquigarrow k$ choix,
- ◇ g envoie A_4 sur A_6, A_6 sur A_5 et A_5 sur A_4 donc les arêtes A_4, A_5 et A_6 sont de même couleur $\rightsquigarrow k$ choix,
- ◇ g laisse fixe la face $A_4A_5A_6$ $\rightsquigarrow k$ choix,
- ◇ g envoie la face $A_1A_2A_5$ sur la face $A_1A_3A_4$, la face $A_1A_3A_4$ sur la face $A_2A_3A_6$ et la face $A_2A_3A_6$ sur la face $A_1A_2A_5$ donc les faces $A_1A_2A_5$, $A_1A_3A_4$ et $A_2A_3A_6$ sont de même couleur $\rightsquigarrow k$ choix

soit au total k^4 choix

Finalement

$$n = \frac{1}{12}\left(k^{10} + 3\cdot k^6 + 8\cdot k^4\right)$$

Exercice 6

1. Soit G un groupe fini qui opère sur un ensemble fini non vide E. Supposons que G soit d'ordre p^m avec p premier et $m \in \mathbb{N}^*$. Posons
$$E^{\mathrm{G}} = \left\{x \in E \,|\, \forall\, g \in \mathrm{G},\, g\cdot x = x\right\}.$$
Montrer que $|E^{\mathrm{G}}| = |E| \bmod p$.
2. Soit H un groupe fini d'ordre n. Soit p un diviseur premier de n. Montrer que H contient un élément d'ordre p (lemme de Cauchy). Indication : faire agir $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur l'ensemble E des $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de H^p tels que $x_1x_2\ldots x_p = e$.
3. Soit H un groupe fini d'ordre n. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $x \in \mathrm{H}$ on ait $x^m = e$. Montrer que n divise une puissance de m.

Solution 6

1. Si x appartient à E, nous notons $\mathcal{O}(x)$ l'orbite de x sous l'action de G. Les éléments de E^{G} sont exactement les éléments x de E tels que $\mathcal{O}(x) = \{x\}$. Notons ω_1, ω_2, …, ω_r les orbites de E de cardinal strictement

supérieur à 1. Si x_i est un élément de ω_i, alors $|\omega_i| = \left|{}^{\mathrm{G}}\!/_{\mathrm{G}_{x_i}}\right| = \frac{|\mathrm{G}|}{|\mathrm{G}_{x_i}|}$, c'est donc une puissance de p. Il résulte de l'équation aux classes que

$$|E| = |E^{\mathrm{G}}| + \sum_{i=1}^{r} |\omega_i| \equiv |E^{\mathrm{G}}| \mod p$$

2. Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ un élément de E. Nous avons $x_1 x_2 \ldots x_p = e$. En multipliant à gauche par x_1^{-1} et à droite par x_1 nous obtenons $x_2 x_3 \ldots x_p x_1 = e$, *i.e.* $(x_2, x_3, \ldots, x_p, x_1)$ appartient à E. Notons c le cycle $(1\ 2\ \ldots\ p)$ de $\mathcal{S}_p$. Il s'agit d'un élément d'ordre p qui engendre un sous-groupe cyclique K isomorphe à ${}^{\mathbb{Z}}\!/_{p\mathbb{Z}}$. Nous définissons une opération de K sur l'ensemble H^p par

$$c \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_p) = (x_{c(1)}, x_{c(2)}, \ldots, x_{c(p)}) = (x_2, x_3, \ldots, x_p, x_1).$$

La remarque ci-dessus montre que E est stable par cette opération. Appliquons alors le résultat de la question précédente à l'opération induite sur E. Nous avons $|E| \equiv |E^{\mathrm{K}}| \mod p$. Le cardinal de E est n^{p-1} (en effet on peut choisir x_1, x_2, …, x_{p-1} quelconques, x_p est alors déterminé de manière unique). Comme p divise n, $|E^{\mathrm{K}}|$ est nul modulo p. Or les éléments de E^{K} sont justement les p-uplets $(x, x, \ldots, x)$ avec $x^p = e$. Notons que E^{K} contient le p-uplet $(e, e, \ldots, e)$; en particulier E^{K} est non vide et par suite E^{K} a un cardinal supérieur à p. Il y a donc au moins $(p-1)$ éléments d'ordre p dans H.

3. Il suffit de montrer que tous les facteurs premiers de n sont des facteurs premiers de m. Soit p un premier divisant n. Le lemme de Cauchy garantit l'existence d'un élément $x \in \mathrm{H}$ d'ordre p. Or par hypothèse $x^m = e$ donc p divise m.

Exercice 7 Soit G un groupe fini. Soit p le plus petit nombre premier divisant $|\mathrm{G}|$. Soit H un sous-groupe de G d'indice p. On se propose de montrer que H est distingué dans G.

a) Montrer que H opère sur l'ensemble des classes à gauche ${}^{\mathrm{G}}\!/_{\mathrm{H}}$ par $h \cdot (a\mathrm{H}) = (ha)\mathrm{H}$ pour tout $h \in \mathrm{H}$ et pour tout $a \in \mathrm{G}$.
Quel est le stabilisateur de $a\mathrm{H}$?
Quelle est l'orbite de la classe H ?

b) Montrer que si H n'était pas distingué dans G, alors au moins une des orbites aurait un cardinal $\geqslant p$.

c) Conclure.

Solution 7

a) On peut vérifier que $h \cdot (a\mathrm{H}) = (ha)\mathrm{H}$ est bien définie : si $a\mathrm{H} = b\mathrm{H}$, alors $(ha)\mathrm{H} = (hb)\mathrm{H}$ donc $h \cdot (a\mathrm{H})$ ne dépend pas du représentant a choisi dans une même classe à gauche), et que ceci définit une opération de groupe.
Le stabilisateur de $a\mathrm{H}$ est

$$\begin{aligned}
\mathrm{G}_{a\mathrm{H}} &= \left\{h \in \mathrm{H} \,|\, h \cdot (a\mathrm{H}) = a\mathrm{H}\right\} \\
&= \left\{h \in \mathrm{H} \,|\, (ha)\mathrm{H} = a\mathrm{H}\right\} \\
&= \left\{h \in \mathrm{H} \,|\, a^{-1}ha \in \mathrm{H}\right\} \\
&= \left\{h \in \mathrm{H} \,|\, h \in a\mathrm{H}a^{-1}\right\} \\
&= \mathrm{H} \cap a\mathrm{H}a^{-1}.
\end{aligned}$$

L'orbite de H est réduite à H :

$$\mathcal{O}_{\mathrm{H}} = \left\{h \cdot \mathrm{H} \,|\, h \in \mathrm{H}\right\} = \left\{h\mathrm{H} \,|\, h \in \mathrm{H}\right\} = \mathrm{H}.$$

b) Si H n'est pas distingué dans G, alors il y a au moins une orbite dont le cardinal n'est pas 1 puisque cela signifie qu'il existe $a \in \mathrm{G}$ et $h \in \mathrm{H}$ tel que $a^{-1}(ha)$ n'appartient pas à H. Puisque le cardinal de cette orbite divise celui de H (donc aussi celui de G par le théorème de Lagrange) ce cardinal est au moins p étant donné que p est le plus petit diviseur $\geqslant 2$ de $|\mathrm{G}|$.

c) Si H n'est pas distingué dans G, alors il y a au moins une orbite de cardinal au moins p mais il y a aussi une orbite de cardinal 1 (celle de H).
Rappel : soit K un groupe agissant sur un ensemble X ; X est réunion disjointe des orbites de X sous l'action de G, *i.e.* $|X| = \sum_{i=1}^{p} |\mathcal{O}_i|$ où les $\mathcal{O}_i$ sont les orbites de X sous l'action de G.
Puisque H opère sur l'ensemble des classes à gauche, nous avons $\left|{}^{\mathrm{G}}\!/_{\mathrm{H}}\right| \geqslant p+1$: contradiction avec le fait que $\underbrace{[\mathrm{G} : \mathrm{H}]}_{\left|{}^{\mathrm{G}}/_{\mathrm{H}}\right|} = p$.

Exercice 8

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps $\Bbbk$.

a) Faisons opérer le groupe linéaire $\mathrm{G} = \mathrm{GL}(E)$ sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E par $g \cdot F := g(F)$ pour tout $g \in \mathrm{G}$ et tout sous-espace F de E. Quelles sont les orbites pour cette action ?

b) On prend $\Bbbk = {}^{\mathbb{Z}}\!/_{7\mathbb{Z}}$ et $n = 5$. Combien E possède-t-il de sous-espaces vectoriels de dimension 3 ?

Solution 8

a) L'orbite d'un sous-espace de dimension d ne contient que des sous-espaces de dimension d.
Réciproquement si F et G sont des sous-espaces de dimension d, on choisit une base $(f_1, f_2, \ldots, f_d)$ de F que l'on complète en une base $(f_1, f_2, \ldots, f_d, f_{d+1}, \ldots, f_n)$ de E. De même on peut prendre une base $(g_1, g_2, \ldots, g_d)$ de F que l'on complète en une base $(g_1, g_2, \ldots, g_d, g_{d+1}, \ldots, g_n)$ de E. L'endomorphisme qui envoie f_i sur g_i est bijectif et vérifie $u(F) = G$. Finalement les orbites sont les sous-espaces de dimension d pour $d = 0, 1, \ldots, n$.

b) Fixons un sous-espace F de dimension 3 (on sait qu'il y en a au moins 1). D'après a) le nombre cherché est le cardinal de l'orbite de F sous l'action de $\mathrm{GL}(E)$ ou encore l'ordre de $\mathrm{GL}(E)$ divisé par celui du stabilisateur S de F. Le cardinal de $\mathrm{GL}(E)$ est obtenu en comptant le nombre de bases de E, il vaut

$$(7^5-1)(7^5-7)(7^5-7^2)(7^5-7^3)(7^5-7^4).$$

En prenant une base de F que l'on complète en une base de E on voit que S est isomorphe au groupe des matrices-bloc de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{F}_7)$, $B \in \mathrm{M}_{3,2}(\mathbb{F}_7)$ et $C \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_7)$. Ainsi

$$|S| = (7^3-1)(7^3-7)(7^3-7^2)(7^2-1)(7^2-7)7^6.$$

Par suite le cardinal cherché est

$$\begin{aligned} &\frac{(7^5-1)(7^5-7)(7^5-7^2)(7^5-7^3)(7^5-7^4)}{(7^3-1)(7^3-7)(7^3-7^2)(7^2-1)(7^2-7)7^6} \\ &\quad = \frac{7 \times 7^2 \times 7^3 \times 7^4 \times (7^5-1)(7^4-1)(7^3-1)(7^2-1)(7-1)}{7 \times 7^2 \times 7 \times 7^6 \times (7^3-1)(7^2-1)(7-1)(7^2-1)(7-1)} \\ &\quad = \frac{(7^5-1)(7^4-1)}{(7^2-1)(7-1)} \\ &\quad = 140050 \end{aligned}$$

Exercice 9

a) Combien y a-t-il d'opérations du groupe ${}^{\mathbb{Z}}\!/_{4\mathbb{Z}}$ sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?

b) Soient G et X deux groupes. On dit que G *opère par automorphismes sur* X si on s'est donné une opération $(g, x) \mapsto g \cdot x$ de G sur X telle que pour tout $g \in \mathrm{G}$ l'application $x \mapsto g \cdot x$ soit un automorphisme de X.
L'opération de G sur lui-même par translation est-elle une opération par automorphismes ?
L'opération de G sur lui-même par conjugaison est-elle une opération par automorphismes ?

c) Si $\mathrm{G} = \left(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +\right)$ et $X = \left(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}, +\right)$ combien y a-t-il d'actions de G sur X par automorphismes ?

d) Si $\mathrm{G} = \left(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +\right)$ et $X = \left(\mathcal{S}_3, \circ\right)$ combien y a-t-il d'actions de G sur X par automorphismes ?

Solution 9

a) On cherche le nombre de morphismes de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ dans le groupe des permutations $\mathcal{S}_5$. Se donner un tel morphisme f revient à se donner un élément d'ordre divisant 4 (à savoir $f(\overline{1})$) dans $\mathcal{S}_5$. Or $\mathcal{S}_5$ contient
— un élément d'ordre 1 (l'identité),
— $\binom{5}{2} = 10$ transpositions,
— $5 \cdot 3 = 15$ doubles transpositions (cinq façons de choisir le point fixe puis trois double transpositions avec les quatre éléments restants),
— $5 \cdot 6 = 30$ 4-cycles (cinq façons de choisir le point fixe et six 4-cycles dans le groupe des permutations des quatre éléments restants).
Il y a donc au total $1 + 10 + 15 + 30 = 56$ possibilités.

b) L'opération de G sur lui-même par translation n'est pas une opération par automorphismes.
L'opération de G sur lui-même par conjugaison est une opération par automorphismes.

c) Le groupe des automorphismes de X est isomorphe au groupe multiplicatif de l'anneau $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ (en effet si on pose $\varphi_a(x) = ax$ on peut vérifier que $a \mapsto \varphi_a$ est un isomorphisme de $\left(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}\right)^\times$ sur $\mathrm{Aut}(X)$) lequel est isomorphe au groupe additif $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ car 13 est premier. On cherche donc le nombre de morphismes de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ ou encore le nombre d'éléments de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ d'ordre divisant 3. Il y a ainsi 3 possibilités.

d) Les seuls automorphismes de $\mathcal{S}_3$ sont intérieurs. Le groupe des automorphismes de $\mathcal{S}_3$ est donc isomorphe à $\mathcal{S}_3$ quotienté par son centre, c'est-à-dire à $\mathcal{S}_3$. On est donc ramené à chercher le nombre d'éléments d'ordre 1 ou 3 dans $\mathcal{S}_3$ et il y a 3 possibilités.

Exercice 10

1. Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. En considérant l'ensemble

$$E = \left\{(g, x) \in \mathrm{G} \times X \,|\, g \cdot x = x\right\},$$

calculer le nombre moyen de points fixes d'un élément de G. Que dire en particulier si l'action est transitive ? Que dire de la moyenne du nombre de points fixes d'une permutation aléatoire ?

2. Combien de colliers de 9 perles différents peut-on faire avec 4 perles bleues, 3 perles blanches et 2 perles oranges ?

Solution 10

1. Désignons par $\mathrm{Fix}(g) = \left\{x \in X \,|\, g \cdot x = x\right\}$ l'ensemble des points fixes de g dans X.
   ◇ Soient $x \in X$ et $y \in \mathcal{O}_x$. Montrons que G_y et G_x sont conjugués.
   Il existe $g \in \mathrm{G}$ tel que $y = g \cdot x$. Soit $w \in \mathrm{G}_x$, alors $w \cdot x = x$. D'une part $w \cdot x = w \cdot (g^{-1}y)$, d'autre part $x = g^{-1}y$. Par conséquent $w \cdot x = x$ se réécrit $w \cdot (g^{-1}y) = g^{-1}y$ ou encore $(gwg^{-1}) \cdot y = y$; autrement dit gwg^{-1} appartient à G_y et $g\mathrm{G}_x g^{-1} \subset \mathrm{G}_y$. Un raisonnement analogue conduit à $\mathrm{G}_y \subset g\mathrm{G}_x g^{-1}$. Il s'en suit que $\mathrm{G}_y = g\mathrm{G}_x g^{-1}$.
   ◇ D'après ce qui précède $\mathrm{G}_y = g\mathrm{G}_x g^{-1}$ donc $|\mathrm{G}_y| = |\mathrm{G}_x|$ et

$$\sum_{y \in \mathcal{O}_x} |\mathrm{G}_y| = \sum_{y \in \mathcal{O}_x} |\mathrm{G}_x| = |\mathrm{G}_x| \sum_{y \in \mathcal{O}_x} 1 = |\mathrm{G}_x|\,|\mathcal{O}_x|.$$

   Or l'application

$$\mathrm{G}/\mathrm{G}_x \to \mathcal{O}_x, \qquad \overline{g} \mapsto g \cdot x$$

   est bien définie et est une bijection ; par suite $\left|\mathrm{G}/\mathrm{G}_x\right| = |\mathcal{O}_x|$, *i.e.* $|\mathrm{G}| = |\mathcal{O}_x|\,|\mathrm{G}_x|$. Ainsi $\sum_{y \in \mathcal{O}_x} |\mathrm{G}_y| = |\mathrm{G}|$.

◇ Nous avons

$$\sum_{x\in X}|\mathrm{G}_x| = \sum_{\mathcal{O}_x\subset\Omega}\sum_{y\in\mathcal{O}_x}|\mathrm{G}_y|.$$

D'après b) $\displaystyle\sum_{y\in\mathcal{O}_x}|\mathrm{G}_y| = |\mathrm{G}|$ d'où

$$\sum_{x\in X}|\mathrm{G}_x| = \sum_{\mathcal{O}_x\subset\Omega}|\mathrm{G}| = |\mathrm{G}|\sum_{\mathcal{O}_x\subset\Omega}1 = |\mathrm{G}|\,|\Omega|.$$

Finalement

$$|\Omega| = \frac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{x\in X}|\mathrm{G}_x|.$$

◇ D'une part

$$\begin{aligned} E &= \{(g,x)\in \mathrm{G}\times X \,|\, g\cdot x = x\} \\ &= \{(g,x)\in \mathrm{G}\times X \,|\, x\in \mathrm{Fix}(g)\} \\ &= \Big(\{g_1\}\times\mathrm{Fix}(g_1)\Big)\cup\Big(\{g_2\}\times\mathrm{Fix}(g_2)\Big)\cup\ldots\cup\Big(\{g_p\}\times\mathrm{Fix}(g_p)\Big) \end{aligned}$$

d'où $|E| = \displaystyle\sum_{g\in\mathrm{G}}|\mathrm{Fix}(g)|$.

D'autre part

$$\begin{aligned} E &= \{(g,x)\in \mathrm{G}\times X \,|\, g\cdot x = x\} \\ &= \{(g,x)\in \mathrm{G}\times X \,|\, g\in \mathrm{G}_x\} \\ &= \Big(\mathrm{G}_{x_1}\times\{x_1\}\Big)\cup\Big(\mathrm{G}_{x_2}\times\{x_2\}\Big)\cup\ldots\cup\Big(\mathrm{G}_{x_q}\times\{x_q\}\Big) \end{aligned}$$

d'où $|E| = \displaystyle\sum_{x\in X}|\mathrm{G}_x|$. Par conséquent $\displaystyle\sum_{g\in\mathrm{G}}|\mathrm{Fix}(g)| = \sum_{x\in X}|\mathrm{G}_x|$. Mais d'après ce qui précède $|\Omega|\,|\mathrm{G}| = \displaystyle\sum_{x\in X}|\mathrm{G}_x|$. donc

$$|\Omega| = \frac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{g\in\mathrm{G}}|\mathrm{Fix}(g)|$$

Cela signifie que le nombre moyen de points fixes d'un élément de G est exactement $|\Omega|$, *i.e.* le nombre d'orbites de l'action.

En particulier si l'action est transitive ce nombre vaut 1.

Par exemple si $\mathrm{G} = \mathcal{S}_n$ agit (via l'action évidente) sur $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, alors le nombre moyen de points fixes d'une permutation est exactement 1.

2. On représente un collier par un cercle du plan euclidien orienté $\mathbb{R}^2$ (de centre O et de rayon 1) muni de neuf points A_1, A_2, …, A_9 disposés à intervalles réguliers.
Deux colliers sont dits équivalents si et seulement si on peut obtenir l'un à partir de l'autre en effectuant une rotation plane du collier ou en le retournant (comme une crêpe) dans l'espace de dimension 3.
Autrement dit l'ensemble X de tous les colliers possibles à 9 perles dont 4 bleues, 3 blanches et 2 rouges, est muni d'une action du groupe diédral $\mathrm{G} = \mathrm{D}_{18}$ des isométries d'un polygône régulier à neuf côtés. Ce groupe G est donc un sous-groupe de $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$, il est d'ordre 18 et ses éléments sont les suivants

$$\mathrm{G} = \big\{\mathrm{id},\, r,\, r^2,\, r^3,\, r^4,\, r^5,\, r^6,\, r^7,\, r^8,\, s,\, r\circ s,\, r^2\circ s,\, r^3\circ s,\, r^4\circ s,\, r^5\circ s,\, r^6\circ s,\, r^7\circ s,\, r^8\circ s\big\}$$

où r est la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{9}$ et s est la symétrie orthogonale d'axe $\Delta = (OA_1)$. En particulier G contient neuf rotations et neuf symétries orthogonales.
Le nombre de colliers est exactement le nombre d'orbites dans l'action de G sur X, *i.e.* $|\Omega|$.
On calcule ce nombre à l'aide de la formule obtenue en 1.

$$|\Omega| = \frac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{g\in\mathrm{G}}|\mathrm{Fix}(g)|.$$

Déterminons $\mathrm{Fix}(g)$ pour tout g dans G. Soit $g\in\mathrm{G}$.

- ◇ Si $g = \mathrm{id}$, alors $\mathrm{Fix}(g) = X$.
- ◇ Si $g = r$, r^2, r^4, r^5, r^7, r^8, alors le sous-groupe de G engendré par g est constitué des 9 rotations (r^k engendre ce groupe si et seulement si k est premier avec 9). Donc un collier fixe par g est fixe par r ce qui implique que toutes les perles sont de la même couleur. Ceci n'est pas possible. Par suite $\mathrm{Fix}(g) = \emptyset$.
- ◇ Si $g = r^3$, r^6, alors dans un collier fixe par g le nombre de perles d'une couleur donnée doit être un multiple de 3, ce qui n'est pas le cas dans l'ensemble X, donc $\mathrm{Fix}(g) = \emptyset$.
- ◇ Si g est une symétrie, nous pouvons supposer que $g = s$, les autres cas étant identiques. Puisque l'axe Δ de g ne contient que la perle A_1, dans un collier fixe par g, les perles A_i, $i \neq 1$, vont par paire de même couleur. Cela assure que la perle A_1 est nécessairement blanche. Se donner un collier fixe par g revient alors à se donner les couleurs des perles A_2, A_3, A_4, A_5 de sorte que 2 soient bleues, 1 blanche et 1 rouge. Il est clair que le nombre de tels colliers vaut

$$|\mathrm{Fix}(g)| = \binom{4}{2}\binom{2}{1} = 6 \times 2 = 12.$$

Enfin le cardinal de X est

$$|X| = \binom{9}{4}\binom{5}{3} = 126 \times 10 = 1260.$$

On en déduit que

$$|\Omega| = \frac{1}{18}\Big(1260 + 9 \times 12\Big) = 76.$$

Il y a donc 76 colliers distincts (à équivalence près) satisfaisant les contraintes de l'énoncé.