SOUS-GROUPES ADDITIFS DE $\mathbb{R}$

Référence : Francinou, Giunella, Nicolas, exercices de mathématiques, oraux x-ens, analyse 1, page 29.

Leçons possibles :
102 : groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes de racines de l'unité. Exemples et applications.
108 : exemple de parties génératrices d'un groupe. Applications.

Proposition 1. *Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$. Alors G est ou bien dense dans $\mathbb{R}$, ou bien monogène, i.e. de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a > 0$ (donc discret).*

Démonstration. Si G est monogène, *i.e.* si $G = a\mathbb{Z}$, avec $a > 0$, alors a est le plus petit élément strictement positif de G. Si G est dense dans $\mathbb{R}$, alors $G \cap \mathbb{R}_+^*$ n'a pas de plus petit élément mais une borne inférieure non nulle. On introduit donc

$$G_+ = G \cap \mathbb{R}_+^* \qquad\qquad a = \inf G_+$$

Le réel $a \geq 0$ est bien défini car G_+ est non vide et minorée. En effet il existe un élément g dans G non nul donc x ou $-x$ est dans G_+ qui est minoré par 0.

On va distinguer le cas $a > 0$ du cas $a = 0$.

- Supposons $a > 0$. Montrons que a appartient à G puis que $G = a\mathbb{Z}$.

  Raisonnons par l'absurde : supposons que a n'appartienne pas à G. Puisque $a > 0$, on a $2a > a$. Il existe g dans G_+ tel que $g < 2a$. Comme a n'appartient pas à G, on a les inégalités $a < g < 2a$. Il existe alors h dans G_+ tel que $h < g$. On a $a < h < g < 2a$ car a n'appartient pas à G. De plus comme g et h appatiennent à G, la différence $g - h$ appartient à G et on a même $g - h$ appartient à G_+. D'une part $a < h$ donc $a - h < 0$ et $2a - h < a$, d'autre part $g < 2a$ donc $g - h < 2a - h$. Par conséquent $g - h < a$: contradiction avec la définition de a. Par suite a appartient à G. Ainsi le groupe $a\mathbb{Z}$ engendré par a est inclus dans G.

  Réciproquement soit g un élément de G. Posons $k = E\left(\frac{g}{a}\right) \in \mathbb{Z}$. Puisque G est un groupe le réel $g - ak$ appartient à G. Comme $k \leq \frac{x}{a} < k+1$ on a $0 \leq g - ak < a = \min G_+$. Nécessairement $g - ak = 0$ et $g = ak \in a\mathbb{Z}$. Il en résulte que $G = a\mathbb{Z}$.

- Supposons que $a = 0$. Montrons qu'alors G est dense dans $\mathbb{R}$, autrement dit que G rencontre tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Comme $a = 0$ il existe $g \in G$ tel que $0 < g < b - a$. Le sous-groupe $g\mathbb{Z}$ engendré par g est inclus dans G et intersecte I (sinon il existerait $k \in \mathbb{Z}$ tel que $I \subset]kg, (k+1)g[$ ce qui contredirait l'inégalité $g < b - a$). Il s'en suit que G est dense dans $\mathbb{R}$.

$\square$